УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, д-р физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т),
А. А. Лигун, д-р физ.-мат. наук (Днепродзерж. индустр.ин-т)

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Получены уточнения известных неравенств типа неравенства Бернштейна для тригонометрических полиномов.

Одержані уточнення відомих перівностей типу нерівності Бернштейна для тригонометричних поліномів.

Пусть C — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \|f\|_C = \max\{|f(t)|\colon t \in [0, 2\pi]\}$; $\mathcal{T}_{2n+1}, n \in \mathbb{N}$, — множество всех вещественных тригонометрических полиномов порядка не выше n .

Известно (см., например, [1, с.143], что для любого $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$ справедливо неулучшаемое неравенство Бернштейна

$$\|\tau^{(k)}\| \le n^k \|\tau\|, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

С.Б.Стечкин [2] доказал, что если $\Delta_h^1\tau(\cdot) = \frac{1}{2}(\tau(\cdot + \frac{h}{2}) - \tau(\cdot - \frac{h}{2}))$ и $\Delta_h^k\tau = \Delta_h^1(\Delta_h^{k-1}\tau)$, $k \ge 2$, то при $0 < h \le \pi/n$

$$\|\tau^{(k)}\| \le \left(\frac{n}{\sin(nh/2)}\right)^k \|\Delta_h^k\tau\| \le n^k \|\tau\|. \tag{2}$$

Докажем следующее уточнение первого из неравенств (2).

Теорема 1. *Для любых* $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < h \le \pi/n$ *и* $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$

$$\|\tau^{(k)}\| \le \left(\frac{2}{h}\right)^k \left(\|\Delta_h^k\tau\| + \left(\left(\frac{nh/2}{\sin(nh/2)}\right)^k - 1\right)\frac{\|\Delta_h^{k+2}\tau\|}{\sin^2(nh/2)}\right) \tag{3}$$

и, в частности (при $h = \pi/n$*),*

$$\|\tau^{(k)}\| \le n^k \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \|\Delta_{\pi/n}^k\tau\| + \left(1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^k\right)\|\Delta_{\pi/n}^{k+2}\tau\|\right). \tag{4}$$

Замечание. Оценивая в (3) $\|\Delta_h^{k+2}\tau\|$ через $\|\Delta_h^k\tau\|$ с помощью второго из неравенств (2), получаем первое из неравенств (2).

Доказательство теоремы. Нетрудно проверить, что

$$\tau'(x) - \frac{2}{h}\Delta_h^1\tau(x) = \int_0^{h/2}\left(\frac{2t}{h} - 1\right)\Delta_{2t}^k\tau''(x)\,dt.$$

Поэтому

$$\| \tau' \| \le \left\| \tau' - \frac{2}{h} \Delta^1_h \tau \right\| + \frac{2}{h} \| \Delta^1_h \tau \| \le \int\limits_0^{h/2} \left(1 - \frac{2t}{h} \right) \| \Delta_{2t} \tau'' \| \, dt + \frac{2}{h} \| \Delta^1_h \tau \|. \quad (5)$$

Боас (см., например, [3, с. 266]), доказал, что если $0 < \delta < h \le \pi / n$, то

$$\| \Delta^k_\delta \tau \| \left(\sin \frac{n\delta}{2} \right)^{-k} \le \| \Delta^k_h \tau \| \left(\sin \frac{nh}{2} \right)^{-k}.$$

Отсюда и из (5) имеем

$$\| \tau' \| \le \frac{\| \Delta^1_h \tau'' \|}{\sin (nh/2)} \int\limits_0^{h/2} \left(1 - \frac{2t}{h} \right) \sin nt \, dt + \frac{2}{h} \| \Delta^1_h \tau \|.$$

или

$$\| \tau' \| \le \| \Delta^1_h \tau'' \| \left(\frac{1}{n \sin(nh/2)} - \frac{2}{n^2 h} \right) + \frac{2}{h} \| \Delta^1_h \tau \|.$$

Используя теперь (2), получаем неравенство (3) при $k = 1$.

Пусть теперь (3) верно для $k = 1, \ldots, N$. Тогда

$$\| \tau^{(N+1)} \| \le \left(\frac{2}{h} \right)^N \left(\| \Delta^N_h \tau' \| + \left(\left(\frac{nh/2}{\sin (nh/2)} \right)^N - 1 \right) \frac{\| \Delta^{N+2}_h \tau' \|}{\sin^2 (nh/2)} \right). \quad (6)$$

Кроме того, в силу (2)

$$\| \Delta^{N+2}_h \tau' \| \le n \frac{\| \Delta^{N+3}_h \tau \|}{\sin (nh/2)}, \quad (7)$$

и в силу (3) при $k = 1$

$$\| \Delta^N_h \tau' \| \le \frac{2}{h} \left(\| \Delta^{N+1}_h \tau \| + \left(\frac{nh/2}{\sin (nh/2)} - 1 \right) \frac{\| \Delta^{N+3}_h \tau \|}{\sin^2 (nh/2)} \right). \quad (8)$$

Сопоставляя неравенства (6) – (8), получаем неравенство (3) при $k = N + 1$, и по индукции завершаем доказательство.

Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространство суммируемых в p-й степени на $[0, 2\pi]$ (существенно ограниченных при $p = \infty$) вещественных 2π-периодических функций f с соответствующими нормами $\| f \|_p = \| f \|_{L_p}$. С помощью одного приема И. Стейна (см., например, [4, с. 117, 118, 123, 124]) из теоремы 1 нетрудно вывести, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любых* $p \in [1, \infty]$; $n, k \in \mathbb{N}$; $0 < h \le \pi / n$; $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$ *справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\| \tau^{(k)} \|_p \le \left(\frac{2}{h} \right)^k \left(\| \Delta^k_h \tau \|_p + \left(\left(\frac{nh/2}{\sin (nh/2)} \right)^k - 1 \right) \frac{\| \Delta^{k+2}_h \tau \|_p}{\sin^2 (nh/2)} \right). \quad (9)$$

В частности (при $h = \pi / n$*),*

$$\|\tau^{(k)}\|_p \le n^k\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^k\left\|\Delta^k_{\pi/n}\tau\right\|_p+\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^k\right)\left\|\Delta^{k+2}_{\pi/n}\tau\right\|_p\right). \qquad (10)$$

Приведем несколько следствий из неравенств (4), (10). В [5] доказано, что для любого $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty)$

$$\|\tau^{(k)}\|_p \le n^k \|\cos(\cdot)\|_p \|\tau\|_\infty . \qquad (11)$$

Из (11) следует, что при $k \ge 2$

$$\|\tau^{(k)}\|_p \le n \|\cos(\cdot)\|_p \|\tau^{(k-1)}\|_\infty .$$

Отсюда и из (4) получаем неравенство

$$\|\tau^{(k)}\|_p \le n^k \left\|\cos(\cdot)\right\|_p\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1}\left\|\Delta^{k-1}_{\pi/n}\tau\right\|_\infty+\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1}\right)\left\|\Delta^{k+1}_{\pi/n}\tau\right\|_\infty\right),$$

уточняющее неравенство (11).

В [6] доказано, что для любого $\tau \in \mathcal{T}_{2n+1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $p \in (1, \infty)$

$$\|\tau^{(k)}\|_1 \le 4n^k \|\cos(\cdot)\|_p \|\tau^{(k)}\|_p , \qquad (12)$$

и, следовательно, при $k \ge 2$

$$\|\tau^{(k)}\|_1 \le 4n^k \|\cos(\cdot)\|_p^{-1} \|\tau^{(k-1)}\|_p$$

Отсюда и из (10) получаем следующее уточнение неравенства (12):

$$\|\tau^{(k)}\|_1 \le \frac{4\,n^k}{\left\|\cos(\cdot)\right\|_p}\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1}\left\|\Delta^{k-1}_{\pi/n}\tau\right\|_p+\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-1}\right)\left\|\Delta^{k+1}_{\pi/n}\tau\right\|_p\right).$$

Используя вместо неравенств (4) и (10) неравенства (3) и (9), можно получить и более общие неравенства.

В заключение отметим, что аналоги неравенств (3), (4), (9), (10) верны для целых функций экспоненциального типа.

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
2. *Стечкин С.Б.* Обобщение некоторых неравенств Бернштейна // Докл. АН СССР. – 1948. – **60**, № 9. – С. 1511 – 1514.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 252 с.
5. *Тайков Л. В.* Одно обобщение неравенства С.Н.Бернштейна // Тр. Мат.ин-та АН СССР. – 1965. – **78**. – С. 43 – 47.
6. *Лигун А. А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385 – 391.

Получено 06. 05. 91