УДК 517.946

Г. Д. Оруджев, канд. физ.-мат. наук (Бакин. ун-т)

О ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Построены полиномиальные приближения решений дифференциальных уравнений первого и второго порядков в банаховом пространстве, для которых задача Коши поставлена корректно.

Побудовано поліноміальні наближення розв'язків диференціальних рівнянь першого та другого порядків у банаховому просторі, для яких задача Коші поставлена коректно.

Рассмотрим задачи Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < T < \infty, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in \mathfrak{D}(A) \tag{2}$$

($\mathfrak{D}(\cdot)$ — область определения оператора), где A — генератор сильно непрерывной полугруппы класса C_0 в банаховом пространстве E, и

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < T < \infty, \tag{3}$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{4}$$

где A — генератор косинус-оператор-функции $C(t, A)$, $u^k \in E^{2-k}$, $k = 0, 1$,

$$E^k = \{x \in E \mid C(t, A)x \in C^k(R, E)\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$C^k(R, E)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых на $R = (-\infty, \infty)$ вектор-функций. Указанные условия на A обеспечивают равномерную корректность задач (1), (2) и (3), (4) [1].

Обозначим $C^\infty(A) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$. В рассматриваемой ситуации $\overline{C^\infty(A)} = E$ (см.,например, [2]). Пусть также

$$C_{(m_n)}(A) = \{x \in C^\infty(A) \mid \forall\, \alpha > 0 \;\exists\, c > 0: \| A^n x \| \le c\alpha^n m_n\},$$

$$C_{\{m_n\}}(A) = \{x \in C^\infty(A) \mid \exists\, \alpha > 0 \;\exists\, c > 0: \| A^n x \| \le c\alpha^n m_n\},$$

где $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел со свойством $\exists\, M > 0$, $\exists\, h > 0$: $m_{n+1} \le M h^n m_n$.

В настоящей статье исследуется возможность полиномиального приближения решений задач (1), (2) и (3), (4) в случае, когда начальными данными служат элементы пространств $C_{(m_n)}(A)$ и $C_{\{m_n\}}(A)$. В случае, когда $0 < A$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, этот вопрос изучался в [3, 4].

Теорема 1. *Пусть A — генератор сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ класса C_0. Если $x \in C_{\{m_n\}}(A)$ ($x \in C_{(m_n)}(A)$), то существуют $c_1 > 0$ и $\rho = \rho(T)$ ($\forall \rho > 0$, $\exists\, c_1 > 0$) такие, что для произвольного $t \in [0, T]$*

$$\| U(t)x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k x \| \le c_1 \rho^n \frac{m_n}{n!}. \tag{5}$$

Обратно, если $\exists\, c_1 > 0, \exists\, \rho > 0$ ($\forall \rho > 0$, $\exists\, c_1 > 0$) такие, что для $\forall\, t \in [0, T]$ выполняется (5), то $x \in C_{\{m_n\}}(A)$.

Доказательство. Пусть $x \in C_{\{m_n\}}(A)$. Используя формулу Тейлора [1]

$$U(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k x + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\xi)^{n-1} U(\xi) A^n x d\xi \tag{6}$$

и ограниченность функции $\| U(t) \|$ на любом конечном интервале, нетрудно получить (5).

Обратно, пусть выполняется (5). Используя представление [1]

$$U(\xi)x = x + \int_0^{\xi} U(\tau) A x d\tau$$

и интегрируя по частям второе слагаемое в (6), получаем оценку

$$\| A^n x \| \le c_1 (\rho / T)^n m_n + \frac{c_1 T}{n+1} (\rho / T)^{n+1} m_{n+1}.$$

Учитывая свойства чисел m_n, получаем требуемое соотношение $\exists\, \alpha > 0$, $\exists\, c > 0$: $\| A^n x \| \le c \alpha^n m_n$, т. е. $x \in C_{\{m_n\}}(A)$.

Случай $x \in C_{(m_n)}(A)$ доказывается аналогично.

Из теоремы 1 следует, что если $u_0 \in C_{(n!)}(A)$, то $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k u_0 \rightrightarrows U(t) u_0$ — решению задачи (1), (2) на $[0, T]$, причем скорость сходимости достаточно высока. В предположении, что A — генератор ограниченной аналитической полугруппы, множество $C_{(n!)}(A)$ плотно в E [2], а значит, любое решение $U(t)u_0$ можно приблизить полиномами $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k u_m$, где $u_m \to u_0$, $u_m \in C_{(n!)}(A)$, равномерно на любом конечном интервале.

Перейдем к задаче (3), (4). Обозначим

$$S(t, A)x = \int_0^t C(s, A) x ds, \quad x \in E.$$

При принятых предположениях относительно A решение $u(t)$ задачи (3), (4) представляется как

$$u(t) = C(t, A)u^0 + S(t, A)u^1, \quad t \in [0, T] \tag{7}$$

где $u^k \in E^{2-k}$, $k = 0, 1$.

Теорема 2. *Пусть A — генератор косинус-оператор-функции $C(t, A)$. Если $u^0, u^1 \in C_{\{m_n\}}(A)$ $(u^0, u^1 \in C_{(m_n)}(A))$, то $\exists\, M > 0$, $\exists\, \rho = \rho(T) > 0$ $(\forall\, \rho > 0$, $\exists\, M > 0)$:*

$$\| u(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!} A^{k-1} u^0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} A^{k-1} u^1 \| \le M \rho^n \frac{m_n}{(2n)!} \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{8}$$

Обратно, если $\exists\, M > 0$, $\exists\, \rho = \rho(T)$ $(\forall\, \rho > 0, \exists\, M > 0)$: $\forall\, t \in [0, T]$ выполнено (8), то $u^0, u^1 \in C_{\{m_n\}}(A)$ $(u^0, u^1 \in C_{(m_n)}(A))$.

Доказательство. Пусть $u^1 = 0$. Тогда если $u^0 \in C_{\{m_n\}}(A)$, то из формулы [1]

$$C(t,A)u^0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!} A^{k-1}u^0 + \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^t (t-\xi)^{2n-1} C(\xi,A)A^n u^0 d\xi \qquad (9)$$

и ограниченности $C(t,A)$ на $[0,T]$ следует оценка

$$\| C(t,A)u^0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!} A^{k-1}u^0 \| \le M_1 \rho_1^n \frac{m_n}{(2n)!} \quad \forall\, t \in [0,T]. \qquad (10)$$

Обратно, пусть существует $M_1 > 0$ и $\rho_1 > 0$ такие, что для всех $t \in [0,T]$ выполняется (10). Тогда, применив формулу интегрирования по частям ко второму слагаемому из (9), с учетом ограниченности функции $\| C(t,A) \|$ на конечном интервале получаем неравенство

$$\frac{t^{2n}}{(2n)!} \| A^n u^0 \| \le M_1 \rho_1^n \frac{m_n}{(2n)!} + M_1 \rho_1^{n+1} \frac{m_{n+1}}{(2n+2)!}.$$

Благодаря свойству последовательности $\{m_n\}_0^\infty$, после несложных вычислений устанавливаем, что $\| A^n u^0 \| \le c\alpha^n m_n$, т. е. $u^0 \in C_{\{m_n\}}(A)$.

Аналогично доказывается, что принадлежность u^1 к множеству $C_{\{m_n\}}(A)$ $(C_{(m_n)}(A))$ эквивалентна утверждению $\exists\, M_2 > 0$, $\exists\, \rho_2 = \rho_2(T)$ $(\forall\, \rho_2 > 0$, $\exists\, M_2 > > 0)$:

$$\| S(t,A)u^1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!} A^{k-1}u^1 \| \le M_2 \rho_2^n \frac{m_n}{(2n+1)!} \quad \forall\, t \in [0,T]. \qquad (11)$$

Далее, если $u^0, u^1 \in C_{\{m_n\}}(A)$ $(u^0, u^1 \in C_{(m_n)}(A))$, то неравенство (8) следует из (10) и (11).

Наоборот, если выполняется (8), то на основании (7), (10), (11) и свойства нормы $\| x - y \| \ge \| x \| - \| y \|$ получаем $u^0, u^1 \in C_{\{m_n\}}(A)$ $(u^0, u^1 \in C_{(m_n)}(A))$.

Если оператор A генерирует косинус-оператор-функцию, то A — генератор аналитической полугруппы [5], а потому множество $C_{\{n!\}}(A)$ плотно в E. В силу теоремы 2 при $u^0, u^1 \in C_{\{n!^\beta\}}(A)$, $1 \le \beta < 2$, решение задачи Коши (3), (4) достаточно быстро аппроксимируется полиномами. А так как $C_{\{n!\}}(A) \subseteq \subseteq C_{\{n!^\beta\}}(A)$ и $\overline{C_{\{n!^\beta\}}(A)} = E$, то решение (3), (4) с $u^k \in E^{2-k}$, $k = 0, 1$, можно аппроксимировать полиномами вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!} A^{k-1}u_m^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} A^{k-1}u_m^1,$$

где $u_m^0, u_m^1 \in C_{\{n!\}}(A)$; $u_m^k \to u^k$ в E равномерно на любом конечном интервале.

1. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус-оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ / ВИНИТИ.– 1990. – **28**. – С. 87-202.
2. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, №3. – С. 55-91.
3. *Городецкий В. В., Горбачук М. Л.* О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1984. – 36, №4. – С. 500-502.
4. *Бабин А. В.* Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методом теории приближения функций // Мат. сб. – 1984. – **2**, №2. – С. 147-173.
5. *Fattorini H. O.* Ordinary differential equations in linear topological spaces, I // J. Different. Equat. – 1969. – **5**, №1. – P. 72 – 105.

Получено 18.01.91