УДК 530.145

В. С. Барбуляк, науч. сотр. (Львов. ун-т),
Ю. Г. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ

Получены результаты для периодических гиббсовских состояний квантовых решеточных систем. Сформулированы определения периодических гиббсовских состояний и соответствующих им мер, доказаны теоремы существования этих состояний и теоремы существования критической температуры для системы ангармонических квантовых осцилляторов с попарным воздействием.

Одержані результати для періодичних гіббсових станів квантових граткових систем. Сформульовані означення періодичних гіббсових станів і відповідних їм мір, доведені теореми існування цих станів і теорема існування критичної температури для системи ангармонічних квантових осциляторів з попарною взаємодією.

Гиббсовские состояния в квантовой статистической физике строятся по формальному гамильтониану как функционалы на некоторой алгебре наблюдаемых. Оказывается [1, 2], что построение таких состояний эквивалентно построению мер ν_β специального вида (β — обратная температура) на функциональном пространстве непрерывных функций на окружности длины β (и даже более узком множестве — непрерывных по Гельдеру функций с показателем гельдеровости $\sigma < \frac{1}{2}$), принимающих значения в бесконечномерном пространстве. В дальнейшем такие меры будем называть мерами, отвечающими гиббсовским состояниям, либо мерами, отвечающими гамильтонианам, по которым эти состояния строятся.

Важным частным случаем гиббсовских состояний являются периодические гиббсовские состояния, т. е. состояния в бесконечном объеме, полученные как предел состояний в конечных объемах с периодическими граничными условиями. Построению таких состояний и исследованию их свойств посвящена данная статья.

1. Основные определения. Обозначим через $\mathcal{T}_N$ фактор-группу $\mathbb{Z}^d / N\mathbb{Z}^d$. Здесь $\mathbb{N} \ni N > 1$, а $\mathbb{Z}^d$ — d-мерная целочисленная решетка. Для $k \in \mathbb{Z}^d$ обозначим через $[\,k\,]$ смежный класс, которому этот элемент принадлежит, и положим $\|[\,k\,]\| = \min\limits_{k \in [k]} \|\,k\,\|_{\mathbb{R}^d}$. Далее не будем различать точку k и ее смежный класс $[\,k\,]$ и квадратные скобки опускаем.

С каждой точкой $k \in \mathcal{T}_N$ свяжем квантовую частицу с одной внутренней степенью свободы. Этой частице отвечает пространство состояний $\mathcal{H}_k = L_2(\mathbb{R}^1, d\,x_k)$, канонические операторы импульса и координаты, определяемые формулами

$$(p_k\ f)(x_k) = -i\ \frac{d}{dx_k} f(x_k), \quad (q_k\ f)(x_k) = x_k\, f(x_k),$$

самосопряженные в $\mathcal{H}_k$ на естественных областях определения.

Пусть $B = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathcal{T}_N \mid k_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \dots, d\}$ — элементарный кубик на торе и задана измеримая функция $U = \mathbb{R}^B \to \mathbb{R}$, зависящая лишь от переменных $x_k, k \in B$. Сдвиг функции $G\colon \mathbb{R}^{\mathcal{T}_N} \to \mathbb{R}$ определим посредством формул $(T^l x)_k = x_{k-l}$, $k, l \in \mathcal{T}_N$, $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_N}$; $(T^l G)(x) = G(T^{-l} x)$.

Периодическим потенциалом взаимодействия назовем сумму

$$V_N(x) = \sum_{l \in \mathcal{T}_N} (T^l U)(x).$$

Обозначим через S_β окружность длины β. Пространством конфигураций назовем множество

$$\Omega_N = \{\omega(\cdot) = (\omega_k(\cdot))_{k \in \mathcal{T}_N} \mid \omega: S_\beta \to \mathbb{R}^{\mathcal{T}_N}, \forall\, k \in \mathcal{T}_N \quad \omega_k \in \mathcal{S}\}.$$

Здесь $\mathcal{S} \equiv H_\sigma(S_\beta)$ — пространство непрерывных по Гельдеру функций с некоторым фиксированным $\sigma < 1/2$ и топологией, индуцированной из $C(S_\beta)$.

Рассмотрим на множестве $\mathcal{S}$ σ-алгебру $\mathcal{G}_0$, порожденную цилиндрическими множествами вида

$$C^{t_0,\dots,t_n}_{B_0,\dots,B_n} = \{\omega \in \mathcal{S} \mid \omega(t_j) \in B_j,\ j = 0, 1, \dots, n\},$$

где $0 \le t_0 \le \dots \le t_n \le \beta$ (если воспринимать S_β как отрезок $[0, \beta]$ с отождествленными концами), а B_j принадлежат алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ борелевых множеств из $\mathbb{R}^1$. Через $\mathcal{G}_{\sigma,N}$ обозначим σ-алгебру подмножеств пространства Ω_N, порожденную цилиндрическими множествами $\{\omega \in \Omega_N \mid \omega_k \in C_k,\ C_k \in \mathcal{G}_0,\ k \in \Lambda \subset \mathcal{T}_N\}$.

Введем функции на траекториях

$$(T^l U)(\omega(\cdot)) = \int_0^\beta (T^l U)(\omega(\tau))\, d\tau.$$

В терминах этих функций зададим периодический потенциал взаимодействия на Ω_N в виде

$$V_N(\omega(\cdot)) = \sum_{l \in \mathcal{T}_N} (T^l U)(\omega(\cdot)).$$

2. Существование одночастичных мер. Меры в конечных объемах. Рассмотрим оператор Шредингера (оператор энергии частицы, находящейся в точке k):

$$H_k = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx_k^2} + W(x_k).$$

Пусть потенциал W удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ W \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1); \\ &2)\ W(x) \ge a x^2 + b;\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0;\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

При этих условиях существует мера ν^0_β на алгебре $\mathcal{G}_0$, отвечающая оператору H_k и имеющая формальный вид

$$d\nu^0_\beta(\omega(\cdot)) = \frac{1}{z}\exp\left[-\frac{m}{2}\int_0^\beta \dot{\omega}^2(\tau)\, d\tau - \int_0^\beta W(\omega(\tau))\, d\tau\right] \prod_{\tau \in S_\beta} d\omega(\tau),$$

где $d\omega(\tau)$ — мера Лебега. Смысл в это представление вкладывается с помощью аппроксимационной процедуры (см. [3], где аналогичное представление обсуждается в случае винеровской меры).

Пусть система взаимодействующих частиц на торе описывается гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2m} \sum_{k \in \mathcal{T}_N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{k \in \mathcal{T}_N} W(x_k) + V_N(x).$$

Мера, отвечающая этому гамильтониану, имеет вид [4]

$$d\,\nu_N(\omega(\cdot)) = \frac{1}{z_N} \exp\left[-V_N(\omega(\cdot))\right]\, d\,\nu^0_{\beta,N}(\omega(\cdot)), \tag{2}$$

где

$$d\,\nu^0_{\beta,N}(\omega(\cdot)) = \mathop{\times}_{k \in \mathcal{T}_N} d\,\nu^0_{\beta,N}(\omega_k(\cdot)).$$

Множитель

$$z_N = \int \exp\left[-V_N(\omega(\cdot))\right]\, d\,\nu^0_{\beta,N}(\omega(\cdot))$$

называется статсуммой. Среднее по мере ν_N обозначим через $\langle \ldots \rangle$. Меру ν_N будем называть также состоянием на торе $\mathcal{T}_N$.

3. Свойство отражательной положительности. Шахматные оценки. Рассмотрим $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ и обозначим Θ^k $(k = \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots)$ группу преобразований пространства $\mathbb{R}^d$, порожденную отражениями θ_L в гиперплоскостях $L \subset \mathbb{R}^d$ вида $L = \{t \in \mathbb{R}^d \mid t^{(m)} = kn\}$ для $n \in \mathbb{Z}$ и некоторого $m \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Ясно, что $\theta_L \mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^d$, поэтому образующие группы Θ^k порождают также отражения торов $\mathcal{T}_N$. В дальнейшем под Θ^k будем понимать группу преобразований тора.

Пусть теперь θ — некоторое отражение тора. Образ гиперплоскости L при отображении факторизации разделяет тор $\mathcal{T}_N$ на два подтора $\mathcal{T}^+_N$ и $\mathcal{T}^-_N$. Для тора $\mathcal{T}^+_N$ можно построить σ-алгебру $\mathcal{G}^+_{\sigma,N}$ подобно тому, как была построена алгебра $\mathcal{G}_{\sigma,N}$. Состояние на торе $\mathcal{T}_N$ называется отражательно положительным (в дальнейшем — ОП-состоянием) относительно отражения θ, если для любой $\mathcal{G}^+_{\sigma,N}$-измеримой функции F на Ω_N справедливо неравенство

$$\langle F \theta F \rangle \geq 0. \tag{3}$$

Здесь $(\theta F)(x) = F(\theta x)$, $(\theta x)_k = x_{\theta k}$.

Благодаря соотношению (3) можно определить скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\theta$ на $\mathcal{G}^+_{\sigma,N}$-измеримых функциях $(F, G)_\theta = \langle F \theta G \rangle$, при этом справедливо неравенство Шварца

$$|\langle FG \rangle| \leq \langle F \theta F \rangle^{1/2} \langle G \theta G \rangle^{1/2}. \tag{4}$$

В [5] приведен простой критерий того, что мера обладает ОП-свойством.

Лемма 1. *Пусть мера, отвечающая гиббсовскому состоянию, имеет вид*

$$\frac{1}{z_N} \exp\left[-\mathcal{V}(\omega(\cdot))\right] d\,\nu^0_{\beta,N}(\omega(\cdot)),$$

а функция $\mathcal{V}(\omega(\cdot))$, $\omega \in \Omega_N$, *может быть представлена в виде*

$$\mathcal{V} = B + \theta B + \sum_{j=1}^{m} C_j\, \theta\, C_j,$$

где функции B, C_i являются $\mathcal{G}^{+}_{\sigma, N}$-измеримыми. Тогда это состояние будет ОП-*состоянием относительно отражения* θ.

Пусть для любого преобразования θ такого, что $\theta B = B$ (B — элементарный кубик) функция U обладает следующим свойством симметрии: $U(\theta x) = U(x)$. Тогда из леммы 1 вытекает, что меры (2) обладают свойством отражательной положительности.

Важным следствием неравенства (3) являются шахматные оценки [5, 6, 4].

Лемма 2. *Пусть гиббсовское состояние на $\mathcal{T}_N$ является* ОП-*состоянием относительно отражений группы Θ^1. Кроме того, пусть для некоторого целого k N делится на $2k$, а G — $\mathcal{G}_0$-измеримая функция. Тогда*

$$\langle G(x_0) \rangle \leq \left\langle \prod_{t \in 2k\mathcal{T}_N} G(x_t) \right\rangle^{(2k/N)^d},$$

где $2k\mathcal{T}_N = 2k\, \mathbb{Z}^d / N\mathbb{Z}^d$.

Лемма 3. *В условиях леммы 2 при наличии* ОП-*свойства относительно отражений группы $\Theta^{1/2}$ справедлива оценка*

$$\langle G(x_0) \rangle \leq \left\langle \prod_{t \in \mathcal{T}_N} G(x_t) \right\rangle^{1/|\mathcal{T}_N|}.$$

4. Критерий существования периодических гиббсовских состояний. Благодаря методу отражательной положительности для периодических гиббсовских состояний может быть получен достаточно простой критерий существования соответствующих мер [4]. Он является обобщением на квантовый случай результатов, полученных С. Б. Шлосманом в классическом случае [6].

Теорема 1. *Пусть $Z_2 < \infty$. Тогда множество мер ν_{2^m}, $m = 1, 2, \ldots$, слабо компактно.*

Доказательство. Пусть $K(x, y) = K(y, x) \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Из неравенства Шварца следует

$$\int K(x, y) K(y, z) K(z, t) K(t, x)\, dx\, dy\, dz\, dt \leq \left[\int K(x, y) K(y, x)\, dx\, dy \right]^2. \tag{5}$$

Благодаря условию $Z_2 < \infty$ явно строится некоторая компактная функция (определение см. в [6]) $h(x_k)$.

Обозначим через $\langle \ldots \rangle_m$ среднее по мере ν_{2^m}. Следствие из неравенства Шварца (4), подобное (5), и шахматные оценки позволяют получить равномерную по m оценку $\langle h(x_k) \rangle_m \leq C_1$ для произвольного $k \in \mathcal{T}_{2^m}$. Утверждение теоремы теперь следует из теоремы Прохорова [7]. Детальное доказательство см. в [4].

С помощью приведенной теоремы могут быть получены критерии существования периодических гиббсовских состояний для более конкретных модельных гамильтонианов. Приведем два важных примера таких критериев.

Следствие 1. *Периодическое гиббсовское состояние, отвечающее гамильтониану*

$$H = -\frac{1}{2m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} W(x_k) + \sum_{\langle k, j \rangle} V(x_k, x_j)$$

при обратной температуре $\beta > 0$, *существует, если для* $\lambda = 2^{d+1}$ *и оператора*

$$H_\lambda = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \lambda V(x, y) + W(x) + W(y)$$

оператор $\exp(-\beta H_\lambda)$ *ядерный в гильбертовом пространстве* $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Здесь символ $\langle k, j \rangle$ обозначает пару ближайших соседей, т. е. таких, что $\|k - j\|_{\mathbb{R}^d} = 1$.

Следствие 2. *Периодическое гиббсовское состояние для модели с гамильтонианом*

$$H = -\frac{1}{2m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} W(x_k) - \mathcal{J}\sum_{\langle k,j\rangle} x_k x_j \tag{6}$$

при данной обратной температуре $\beta > 0$ *существует, если оператор* $\exp(-\beta H_0)$ *ядерный в* $L_2(\mathbb{R}^1)$, *где*

$$H_0 = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + W(x) - \mathcal{J} d x^2.$$

Постоянная $\mathcal{J} > 0$ называется постоянной взаимодействия.

5. Фазовые переходы. Периодические гиббсовские состояния как в классическом, так и в квантовом случае служат для исследования явления фазового перехода. Именно: признаком фазового перехода является возникновение так называемого дальнего порядка в периодическом гиббсовском состоянии (см., например, [8 – 10]. Приведем соответствующие определения.

Рассмотрим наряду с гамильтонианом (6) локальный гамильтониан

$$H_N = -\frac{1}{2m}\sum_{k\in\mathcal{T}_N}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{k\in\mathcal{T}_N} W(x_k) - \mathcal{J}\sum_{\langle k,j\rangle} x_k x_j. \tag{7}$$

Среднее по мере, отвечающей гамильтониану (7), обозначим через $\langle \ldots \rangle_{\beta,N}$. Среднее по предельной мере, отвечающей гамильтониану (6), обозначим через $\langle \ldots \rangle_\beta$.

Параметром дальнего порядка назовем число $P(\beta) \geq 0$, определенное для данной обратной температуры $\beta > 0$ соотношением

$$P(\beta) = \lim_{N\to\infty}\left\langle \left(\frac{1}{|\mathcal{T}_N|}\sum_{k\in\mathcal{T}_N} x_k\right)^2 \right\rangle_{\beta,N}.$$

Его положительность при β, больших некоторого β_0, свидетельствует о возникновении дальнего порядка в системе. Температуру β_0 назовем критической.

Наложим на потенциал W наряду с условиями (1), достаточными для существования одночастичных мер, такие условия:

1) $W \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$;

2) $a > \mathcal{J} d$ (параметр a входит в условие 2 из (1));

3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad W(x) = W(-x)$; (8)

4) при некотором $q_0 > 0$ функция $W(x)$ в точках $\pm q_0$ имеет строгий глобальный невырожденный минимум.

Ввиду соотношения 2 из (8) выполнены условия следствия 2 теоремы 1, поэтому периодическое гиббсовское состояние системы с гамильтонианом (6) (предельная мера) существует. Условия 3 и 4 из (8) влекут неединственность периодического гиббсовского состояния.

Теорема 2. *Пусть* $d \geq 3$. *Для произвольного потенциала* W, *удовлетворяющего условиям* (1), (8), *найдется такое* $m_0 > 0$, *что* $\forall\, m > m_0$ *в системе, описываемой гамильтонианом* (6), *существует критическая температура.*

Доказательство. Определим преобразование Фурье

$$\tilde{x}_p = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{T}_N|}} \sum_{k \in \mathcal{T}_N} x_k\, e^{ipk},$$

где $p \in \mathcal{T}^* = \{ p = (p_1, \ldots, p_d) \mid p_i = \frac{2\pi}{N} k_i,\ (k_1, \ldots, k_d) = k \in \mathcal{T}_N \}$. Отсюда непосредственно следует

$$\frac{1}{|\mathcal{T}_N|} \tilde{x}_0^2 = \left(\frac{1}{|\mathcal{T}_N|} \sum_{k \in \mathcal{T}_N} x_k \right)^2.$$

Справедливо равенство [9]

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_N} x_k^2 = \tilde{x}_0^2 + \sum_{p \in \mathcal{T}^*, p \neq 0} \tilde{x}_p \tilde{x}_{-p},$$

из которого вытекает

$$\left\langle \sum_{k \in \mathcal{T}_N} x_k^2 \right\rangle_{\beta, N} = \langle \tilde{x}_0^2 \rangle_{\beta, N} + \left\langle \sum_{p \in \mathcal{T}^*, p \neq 0} \tilde{x}_p\, \tilde{x}_{-p} \right\rangle_{\beta, N}$$

или

$$\left\langle \left(\frac{1}{|\mathcal{T}_N|} \sum_{k \in \mathcal{T}_N} x_k \right)^2 \right\rangle_{\beta, N} = \langle x_0^2 \rangle_{\beta, N} - \frac{1}{|\mathcal{T}_N|} \sum_{p \in \mathcal{T}^*, p \neq 0} \langle \tilde{x}_p\, \tilde{x}_{-p} \rangle_{\beta, N}. \qquad (9)$$

Метод инфракрасных оценок, основным моментом которого является гауссово мажорирование, позволяет получить для двухточечной функции Дюамеля

$$(A, B) = \frac{1}{\mathrm{Tr}(\exp(-\beta H))} \int_0^1 \mathrm{Tr}\left(e^{-x\beta H} A\, e^{-(1-x)\beta H}\, B \right) dx$$

следующую оценку [8, 9]:

$$(\tilde{x}_p, \tilde{x}_{-p}) \leq \frac{1}{2\beta \mathcal{J} E(p)}, \qquad (10)$$

где $E(p) = d - \sum_{i=1}^{d} \cos p_i$.

Кроме того, непосредственно вычисляя двойной коммутатор [9], получаем

$$\langle [\tilde{x}_p, [H, \tilde{x}_{-p}]] \rangle_\beta = \frac{1}{m}. \qquad (11)$$

В [8] приведена оценка корреляционных функций, использующая (10) и (11):

$$\langle \tilde{x}_p\, \tilde{x}_{-p} \rangle_{\beta, N} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\beta \mathcal{J} E(p)} \right)^{1/2} \mathrm{cth} \left(\beta^2 \frac{\mathcal{J} E(p)}{2m} \right)^{1/2}.$$

Отсюда и из (9) вытекает оценка параметра порядка

$$P(\beta) = \left\langle x_0^2 \right\rangle_\beta - \frac{1}{2(2\pi)^d} \int\limits_{(0,2\pi]^d} \left(\frac{1}{2\beta \mathcal{J} E(p)} \right)^{1/2} \operatorname{cth} \left(\beta^2 \frac{\mathcal{J} E(p)}{2m} \right)^{1/2} dp. \quad (12)$$

Для оценки второго корреляционного момента $\left\langle x_0^2 \right\rangle_\beta$ наряду с гамильтонианом (6) рассмотрим гамильтониан

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} W(x_k) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} H_k,$$

описывающий систему невзаимодействующих частиц. Среднее по мере, отвечающей этому гамильтониану, обозначим через $\langle \ldots \rangle_{\beta, \hat{H}}$. Корреляционные неравенства типа ФКЖ [11] позволяют записать оценку

$$\left\langle x_0^2 \right\rangle_\beta \geq \left\langle x_0^2 \right\rangle_{\beta, \hat{H}}.$$

Поскольку гамильтониан $\hat{H}$ описывает систему невзаимодействующих частиц, то

$$\left\langle x_0^2 \right\rangle_{\beta, \hat{H}} = \left\langle x_0^2 \right\rangle_{\beta, H_0},$$

где $\langle \ldots \rangle_{\beta, H_0}$ — среднее по одночастичной мере, отвечающей оператору Шредингера

$$H_0 = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W(x).$$

Из спектральной теоремы следует соотношение

$$\lim_{\beta \to +\infty} \left\langle x_0^2 \right\rangle_{\beta, H_0} = \int\limits_{\mathbb{R}} x^2 \varphi_0^2(x)\, dx,$$

где $\varphi_0(x)$ — основное состояние оператора Шредингера H_0. Его асимптотика при $m \to \infty$ (квазиклассический предел) [12] такова, что $\forall\, \varepsilon > 0$ и $y = \pm q_0$

$$\int\limits_{|x-y| \leq \varepsilon} |\varphi_0(x)|^2\, dx \to \frac{1}{2}, \quad m \to \infty. \quad (13)$$

Значит для некоторых m_1 и β_1 при всех $m > m_1$ и $\beta > \beta_1$ справедлива оценка

$$\left\langle x_0^2 \right\rangle_\beta \geq \frac{1}{2} q_0^2. \quad (14)$$

Из (12) и (14) следует

$$P(\beta) \geq \frac{1}{2} \left[q_0^2 - \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{(0,2\pi]^d} \left(\frac{1}{2m \mathcal{J} E(p)} \right)^{1/2} \operatorname{cth} \left(\beta^2 \frac{\mathcal{J} E(p)}{2m} \right)^{1/2} dp \right].$$

Неравенство

$$q_0^2 - \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{(0,2\pi]^d} \left(\frac{1}{2m \mathcal{J} E(p)} \right)^{1/2} \operatorname{cth} \left(\beta^2 \frac{\mathcal{J} E(p)}{2m} \right)^{1/2} dp > 0$$

в пределе при $\beta \to +\infty$ позволяет получить следующее достаточное условие существования критической температуры:

$$q_0^2 - \frac{I_d}{\sqrt{2 m \mathcal{J}}} > 0. \tag{15}$$

Здесь учтено, что $\operatorname{cth} x$ при $x \to +\infty$ монотонно убывает и $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{cth} x = 1$, а также обозначено

$$I_d = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{(0,2\pi]^d} \frac{1}{\sqrt{E(p)}}\, dp\,.$$

Этот интеграл сходится при $d \geq 3$.

Из условия (15) вытекает, что существует решение β_2 уравнения

$$q_0^2 - \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{(0,2\pi]^d} \left(\frac{1}{2m \mathcal{J} E(p)} \right)^{1/2} \operatorname{cth} \left(\beta_2^2 \, \frac{\mathcal{J} E(p)}{2m} \right)^{1/2} dp \qquad 0.$$

Критическая температура β_0 равна $\max(\beta_1, \beta_2)$.

Теперь очевидно, что существует масса m_2, при которой (15) выполнено. Положив $m_0 = \max(m_1, m_2)$, получим утверждение теоремы.

В [12] также показано, что соотношение (13) справедливо при увеличении глубины минимумов потенциала W. (Для данного потенциала увеличении глубины его минимумов осуществляется заменой W на λW и выбором достаточно большого $\lambda > 0$). Поэтому из (15) вытекает такое следствие теоремы 2.

Следствие. *Для потенциала* W, *удовлетворяющего условиям* (1), (8), *с фиксированными* m и $\mathcal{J}$ *существуют такие* $\lambda_0 > 0$ *и* $q_0 > 0$, *что при всех* $\lambda > \lambda_0$ и $q > q_0$ *в системе, описываемой гамильтонианом* (6), *существует критическая температура.*

Таким образом, наличия критической температуры для системы с гамильтонианом (6) можно достичь также за счет достаточной глубины минимумов одночастичного потенциала и их удаленности друг от друга.

1. *Albeverio S., Høegh-Krohn R.* Homogeneous random fields and statistical mechanics // J. Funct. Anal. – 1975. – **19**, № 2. – P. 242–272.
2. *Глоба С. А., Кондратьев Ю. Г.* Построение гиббсовских состояний квантовых решеточных систем // Применение методов функционального анализа в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1987. – С. 4 –16.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. – М.: Мир, 1978. – 400 с.
4. *Барбуляк В. С., Кондратьев Ю. Г.* Критерий существования периодических гиббсовских состояний квантовых решеточных систем // Методы функционального анализа в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1990. – С. 30 – 41.
5. *Phase* transition and reflection-positivity. I. / J. Fröhlich, R. Israel, E. Lieb, B. Simon // Comm. Math. Phys. – 1978. – **62**, № 1. – P. 1–34.
6. *Шлосман С. Б.* Метод отражательной положительности в математической теории фазовых переходов первого рода // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, вып. 3. – С. 69 – 111.
7. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 351 с.
8. *Dyson F. J., Lieb E. H., Simon B.* Phase transitions in quantum spin systems with isotropic and nonisotropic interactions // J. Stat. Phys. – 1978. – **18**, № 4. – P. 335–383.
9. *Пастур Л. А., Хоруженко Б. А.* Фазовые переходы в квантовых моделях ротаторов и сегнетоэлектриков // Теорет. и мат. физика. – 1987. – **73**, № 1. – С. 111–124.
10. *Driessler W., Landau L., Perez J. F.* Estimates of critical lengths and critical temperatures for classical and quantum lattice systems // J. Stat. Phys. – 1979. – **20**, № 2. – P. 123–162.
11. *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. – М.: Мир, 1976. –360 с.
12. *Simon B.* Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, II. Tunneling // Annal. Math. – 1984. –**120**, № 1. – P. 89 – 118.

Получено 08.08.91