УДК 517.9

М. Илолов, канд. физ-мат. наук (Тадж. ун-т , Душанбе)

О МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Для эволюционных уравнений с импульсными воздействиями предложена новая модификация приближенной схемы Галеркина и доказана ее сходимость. Полученный результат распространен на импульсные эволюционные уравнения с отклоняющимся аргументом.

Для еволюційних рівнянь з імпульсними впливами запропоновано нову модифікацію наближеної схеми Гальоркіна і доведено її збіжність. Одержаний результат розповсюджено на імпульсні рівняння з аргументом, що відхиляється.

Реальные конечномерные процессы с „мгновенными" возмущениями описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений с фиксированными и нефиксированными моментами импульсного воздействия. Одной из основных проблем, связянных с рассмотрением импульсных систем, является задача о динамической модели часов, изученная в работах [1, 2]. Эволюционные уравнения с импульсными воздействиями введены в [3]. Там же доказаны различные варианты теорем существования и единственности решений.

1. Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x(t) + A(t)\, x(t), \quad t \neq t_i, \tag{1}$$

с импульсными воздействиями

$$\Delta x\Big|_{t=t_i} \equiv x(t_i+0) - x(t_i) = B_0 x(t_i) + B_i x(t_i), \tag{2}$$

где $x(t)$ — искомая функция со значениями в H, A_0 — действующий в H отрицательно определенный самосопряженный оператор с плотной в H областью определения $D(A_0)$, $A(t)$ — положительно определенный самосопряженный ограниченный оператор при каждом $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_i\}$ ($\mathbb{R}$ — действительная ось), $\{t_i\} \subset [s, T]$ — фиксированные моменты времени, пронумерованные в порядке возрастания множеством $\overline{\mathbb{N}} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $t_0 = -\infty$, $t_{n+1} = +\infty$, B_0, B_i, $i \in \in \overline{\mathbb{N}}$, — линейные ограниченные операторы, действующие в H.

Под решением уравнения (1) с импульсными воздействиями (2) на интервале $[s, T)$ (T может быть равным ∞) понимается функция $x(t)$: $[s, T) \to H$ непрерывная на каждом из интервалов $[s, t_{k+1})$, $[t_{k+2}, t_{k+2}), \ldots, [t_{k+l}, T)$ с разрывами первого рода при $t = t_i$, $i \in \overline{\mathbb{N}}$, непрерывно дифференцируемая, удовлетворяющая уравнению (1) на каждом из открытых интервалов (s, t_{k+1}), $(t_{k+1}, t_{k+2}), \ldots, (t_{k+l}, T)$ и удовлетворяющая при $t = t_i$, $i \in \overline{\mathbb{N}}$, соотношению (2).

Решением задачи Коши для уравнения (1) с импульсными воздействиями (2) называется функция $x(t, s)$, удовлетворяющая (1), (2) и начальному условию

$$x(s) = x_s \in H \tag{3}$$

при каждом фиксированном s.

Предположим, что $x_s \in D(A_0)$ и оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна на открытых интервалах (s, t_{k+1}), $(t_{k+1}, t_{k+2}), \ldots, (t_{k+l}, T)$. Тогда из [3] следует, что задача (1) – (3) сводится к решению интегрально-сумматорного уравнения

$$x(t) = T(t, s)x_s + \int_s^t T(t, \sigma) A(\sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma + \sum_{s<t_i<t} T(t, t_i) B_i x(t_i). \tag{4}$$

Здесь оператор-функция $T(t, s)$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(H)$, ($\mathfrak{L}(H)$ — пространство линейных ограниченных операторов из H в H), $t \in [t_i, t_{i+1})$, $s \in [t_k, t_{k+1})$, $i > k$, определяется следующим образом:

$$T(t, s) = \exp(A_0(t - t_i) \prod_{s < t_\nu < t} (I + B_0) \exp(A_0(t_\nu - t_{\nu-1})), \quad s = t_0,$$

где I — тождественный оператор, $\exp(A_0 t)$ — сильнонепрерывная полугруппа линейных ограниченных операторов, порожденная оператором A_0.

В свою очередь, уравнение (4) можно записать по-другому, если ввести оператор L, отображающий пространство $L_2[(s, T), H]$ в $L_2[(s, T), H]$ согласно соотношениям

$$Lf = g(t, s),$$

$$g(t, s) = \int_s^t T(t, \sigma) A(\sigma) f(\sigma)\, d\sigma + \sum_{s < t_i < t} T(t, t_i) B_i f(t_i).$$

Тогда равенство (4) определяет решение уравнения

$$x - Lx = g, \tag{5}$$

где элемент g определяется равенством $g(t, s) = T(t, s) x_s$, при этом L является квазинильпотентным оператором. Следовательно [3], решение уравнения (4) представляется сходящимся рядом

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} L^k g. \tag{6}$$

При своей внешней простоте формула (6) может оказаться очень сложной при численных расчетах, поскольку требует вычисления оператор-функции $\exp(A_0 t)$, интегрирования и суммирования. Поэтому ниже обсуждается приближенный метод решения задачи (1) – (3), а именно: метод Галеркина.

2. Метод Галеркина для приближенного решения эволюционного уравнения с импульсными воздействиями в гильбертовом пространстве состоит в том, что уравнения (1), (2) заменяются приближенными уравнениями

$$dy_n = P_n A_0 y_n(t) + P_n A(t) y_n(t), \quad t \neq t_i, \tag{7}$$

$$\Delta y_n \Big|_{t = t_i} = P_n B_0 y_n(t_i) + P_n B_i y_n(t_i), \tag{8}$$

и начальное условие (3) — условием

$$y_n(s) = P_n x_s, \tag{9}$$

где P_n — оператор ортогонального проектирования пространства H на его n-мерное подпространство H_n. Оператор $P_n A_0$ будет самосопряженным в пространстве H_n, поэтому переход от уравнений (1), (2) к уравнению (7), (8) связан с переходом к другому пространству.

Сформулируем и докажем утверждение о сходимости метода Галеркина.

Теорема 1. *Пусть A_0 — отрицательно определенный самосопряженный оператор, $A(t)$ — при каждом t положительно определенный самосопряженный ограниченный оператор, гладко зависящий от t при $t \neq t_i$. Пусть, далее, H_n является инвариантным подмножеством отрицательно определенного самосопряженного оператора C, имеющего ту же область определения, что и оператор A_0. Пусть, наконец, операторы P_n сильно сходятся при $n \to \infty$ к единичному оператору $P_n y \to y$, $y \in H$.*

Тогда, начиная с некоторого номера n, существует единственное галеркинское приближение y_n, а галеркинская схема (7) – (9) *сходится.*

Доказательство. Применим к обеим частям уравнений (1), (2) оператор P_n:

$$\frac{dP_n x}{dt} = P_n(A_0 + A(t))x, \quad t \neq t_i, \tag{10}$$

$$\Delta P_n x\Big|_{t=t_i} = P_n(B_0 + B_i)\, x(t_i). \tag{11}$$

Из уравнений (7), (8) и (10), (11) для разности $y_n - P_n x$ получим следующие уравнения:

$$\frac{d(y_n - P_n x)}{dt} = P_n(A_0 + A(t))(y_n - P_n x) + P_n(A_0 + A(t))(P_n x - x), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta(y_n - P_n x)\Big|_{t=t_i} = P_n(B_0 + B_i)(y_n(t_i) - P_n x(t_i)) + P_n(B_0 + B_i)(P_n x(t_i) - x(t_i))$$

или

$$\frac{d(y_n - P_n x)}{dt} = P_n A_0(y_n - P_n x) + P_n A(t)(y_n - P_n x) +$$
$$+ P_n(A_0 + A(t))(P_n x - x), \quad t \neq t_i, \tag{12}$$

$$\Delta(y_n - P_n x)\Big|_{t=t_i} = P_n B_0(y_n(t_i) - P_n x(t_i)) + P_n B_i(y_n(t_i) - P_n x(t_i)) +$$
$$+ P_n(B_0 + B_i)(P_n x(t_i) - x(t_i)). \tag{13}$$

Уравнения (12), (13) с условиями (3) и (9) сводятся к интегрально-сумматорному уравнению в пространстве H_n

$$y_n(t) - P_n x(t) = \exp(-P_n A_0(t - s))[P_n x_s - P_n x_s] +$$
$$\int_s^t T_n(t, \sigma)[P_n A(\sigma)(y_n(\sigma) - P_n x(\sigma)) + P_n(A_0 + A(\sigma))(P_n x(\sigma) - x(\sigma))]\, d\sigma +$$
$$\sum_{s<t_i<t} T_n(t, t_i)[P_n B_i(y_n(t_i) - P_n x(t_i)) + P_n(B_0 + B_i)(P_n x(t_i) - x(t_i)), \tag{14}$$

где

$$T_n(t, s) = \exp(P_n A_0(t - t_i)) \prod_{s<t_\nu<t} (I + B_0)\exp(P_n A_0(t_\nu - t_{\nu-1})), \quad t_0 = s.$$

Из того, что оператор A_0 отрицательно самосопряженный, а B_0 ограниченный, следует, что существует постоянная $K > 0$, для которой

$$\| T_n(t, s) \| \leq K. \tag{15}$$

Далее, из (14) и (15) для оценки интеграла и суммы в правой части (14) имеем

$$\| y_n - P_n x \| \leq K\int_s^t \| P_n A(\sigma)(y_n(\sigma) - P_n x(\sigma)) + P_n(A_0 + A(\sigma))(P_n x(\sigma) - x(\sigma))\|\, d\sigma +$$
$$+ K \sum_{s<t_i<t} \| P_n B_i(y_n(t_i) - P_n x(t_i)) + P_n(B_0 + B_i)(P_n x(t_i) - x(t_i)\|. \tag{16}$$

Используя аналог леммы Гронуолла — Беллмана для кусочно-непрерывных функций (см., например, [4]), из неравенства (16) получаем

$$\| y_n(t) - P_n x(t) \| \leq \prod_{s<t_i<t} (1 + K\|P_n\| \|B_i\|)\exp(K\|P_n\| \int_s^t \|A(\sigma)\|\, d\sigma) \times$$
$$\times \left[\int_s^t \|P_n(A_0 + A(\sigma))(P_n x(\sigma) - x(\sigma))\|\, d\sigma + \right.$$

$$+ \sum_{s<t_i<t} \| P_n(B_0 + B_i)(P_n x(t_i) - x(t_i)) \| \Big]. \tag{17}$$

Итак, задача сводится к оценке интеграла

$$\mathcal{I} = \int_s^t \| P_n(A_0 + A(\sigma))(P_n x(\sigma) - x(\sigma)) \| \, d\sigma \tag{18}$$

и суммы

$$S_n = \sum_{s<t_i<t} \| P_n(B_0 + B_i)(P_n x(t_i) - x(t_i)) \|. \tag{19}$$

Интеграл $\mathcal{I}_n$ из (18) представим в виде суммы двух интегралов

$$\mathcal{I}_{n1} = \int_s^t \| P_n A_0 (P_n x(\sigma) - x(\sigma)) \| \, d\sigma \tag{20}$$

и

$$\mathcal{I}_{n2} = \int_s^t \| P_n A(\sigma)(P_n x(\sigma) - x(\sigma)) \| \, d\sigma. \tag{21}$$

В силу предположения теоремы $P_n C = C P_n$, поэтому в (20) подынтегральное выражение можно преобразовать к следующему виду:

$$\| P_n A_0 (P_n x(\sigma) - x(\sigma)) \| = \| P_n A_0 C^{-1} (P_n - I) C x(\sigma) \|.$$

Операторы A_0 и C имеют общую область определения, поэтому $A_0 C^{-1}$ и $C A_0^{-1}$ ограничены. Пусть $\| A_0 C^{-1} \| = a$, тогда

$$\mathcal{I}_{n1} \le a \int_s^t \| (P_n - I) C x(\sigma) \| \, d\sigma.$$

Так как функция $x(t)$ является решением уравнения (1), то функция $A_0 x(t)$ непрерывна на $[s, T] \setminus \{t_i\}$, поэтому функция $C x(t) = C A_0^{-1} A_0 x(t)$ будет также непрерывной на $[s, T] \setminus \{t_i\}$. В точках же $\{t_i\}$ эти функции имеют разрывы 1-го рода. Разобьем множество $[s, T] \setminus \{t_i\}$ на l отрезков так, чтобы на каждом отрезке колебание функции $C x(t)$ на превышало достаточно малого числа η.

Теперь рассмотрим функцию $(P_n - I) C x(t)$. Операторы $P_n C$ сильно сходятся на $D(C)$ к оператору C:

$$P_n C x \to C x, \quad x \in D(C).$$

Если обозначить $P_n C = E_n$, то $E_n C^{-1} = P_n$, следовательно, для достаточно больших n по условию теоремы $\| E_n C - I \| = \| P_n - I \| < \varepsilon$. Выберем $\eta = 1/2$. Пусть теперь t — любая точка из $[s, T] \setminus \{t_i\}$, а t' — ближайшая к ней точка разбиения множества $[s, T] \setminus \{t_i\}$ на l частей. Тогда

$$\| (E_n - C) x(t) \| \le \| (E_n - C) x(t') \| + \| (E_n C^{-1} - I)(C x(t) - C x(t')) \| \le$$

$$\le \| (E_n - C x(t') \| + \varepsilon / 2.$$

По условию при достаточно большом l первое слагаемое справа также будет меньше $\varepsilon/2$. Следовательно, функции $(P_n / I) C x(t)$ равномерно на $[s, T] \setminus \{t_i\}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, $\mathcal{I}_{n1}$ стремится равномерно на $[s, T] \setminus \{t_i\}$ к нулю при $n \to \infty$.

Далее оценим интеграл $\mathcal{I}_{n2}$ из (21). Приведенные выше рассуждения указывают, что функция $A(x) x(t)$ также является кусочно-непрерывной. Тогда функция

$$P_n A(t)(P_n x(t) - x(t))$$

равномерно на $[s, T] \setminus \{t_i\}$ стремится к нулю.

Для оценки суммы (19) достаточно заметить, что оператор $B_0 + B_i$ ограничен и $P_n \to I$ при $n \to \infty$. С учетом этих замечаний и неравенства

$$S_n \le \sum_{s<t_i<t} \| P_n \| \, \| B_0 + B_i \| \, \| P_n x(t_i) - x(t_i) \|$$

имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. Теорема доказана.

***Пример* 1.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = L_1 U(t, x) + L_2(t) U(t, x), \quad t \ne t_i, \tag{22}$$

с импульсными воздействиями

$$\Delta U \Big|_{t=t_i} = b_0 u(t_i), \tag{23}$$

где $L_1 u$ — определенное в области $G \subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство) эллиптическое дифференциальное выражение порядка $2m$ по $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с коэффициентами, зависящими лишь от этих переменных, а $L_2(t)\, u$ — интегро-дифференциальное выражение, определенное на G и явно зависящее от времени при $t \ne t_i$, $b_0 \in \mathbb{R}$.

Постановка задачи. Требуется найти решение уравнений (22) и (23), удовлетворяющее начальному условию $n(0, x) = u_0(x)$ и системе из m однородных краевых условий $\Gamma_0 u = 0$, $\Gamma_1 u = 0, \ldots, \Gamma_{m-1} u = 0$, при которых оператор L_1 является самосопряженным в пространстве суммируемых с квадратом функций n переменных $L_2(G)$.

К сформулированной задаче применимы результаты теоремы 1.

Впервые, по-видимому, метод Галеркина для эволюционных уравнений рассматривался в работе [5].

3. Рассмотрим теперь эволюционное уравнение в H с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x(t) + A x(t-h), \quad t \ne t_i, \tag{24}$$

и импульсными воздействиями

$$\Delta x \Big|_{t=t_i} = B_0 x(t_i), \tag{25}$$

где $h > 0$ — величина запаздывания. Начальное условие задается в виде

$$x(t) = \varphi(t), \quad -h \le t \le s, \tag{26}$$

где $\varphi(t)$ — заданная функция со значениями в H.

Будем считать, что операторные коэффициенты уравнений (24), (25) удовлетворяют всем предположениям пп. 1, 2.

Приближенные уравнения схемы Галеркина имеют вид

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = P_n A_0 y_n(t) + P_n A_0 y_n(t-h), \quad t \ne t_i, \tag{28}$$

$$\Delta y_n \Big|_{t=t_i} = P_n B_0 y(t_i).$$

Условие (26) заменяется условием

$$y_n(t) = P_n\varphi(t), \quad -h \le t \le s. \tag{29}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если оператор проектирования P_n пространства H на его n-мерное подпространство H_n удовлетворяет всем условиям теоремы* 1, *то схема Галеркина* (27) – (29), *начиная с некоторого n, сходится к решению задачи* (24) – (29).

Основным моментом в доказательстве этого утверждения является следующая лемма.

Лемма. *Пусть неотрицательная кусочно-непрерывная функция $u(t)$ удовлетворяет при $t \ge s$ неравенству*

$$u(t) \le \varphi(t) + \sum_{s<t_i<t} a_1 u(t_i) + b_1 \int_s^t [u(\sigma - h) + w(\sigma)]\, d\sigma,$$

в котором $w(\sigma)$ — неотрицательная суммируемая функция на $[s, T]$, функция $\varphi(t) \ge 0$ ограничена на $[s, T]$, $a_1 \ge 0$, $b_1 \ge 0$, $h > 0$, t_i — точки разрыва 1-го рода функции $u(t)$.

Тогда справедлива оценка

$$u(t) \le (1 + a_1)^{i(s,t)} \exp\,(b_1(t-s) + h)(b_1 \int_s^t w(\sigma)\, d\sigma + \sup_{s \le t \le T} |\varphi(t)|),$$

где $i(s, t)$ — количество точек τ на промежутке $[s, t)$, т. е. $i(s, t) = i$, если $t_i \le \le t \le t_{i+1}$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение теплопроводности с отклоняющимся по времени аргументом

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + du(t-h, x), \quad t \ne t_i, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{30}$$

и импульсными воздействиями

$$\Delta u \Big|_{t=t_i} = a_2 u(t_i, x), \tag{31}$$

где d, a_2, $h > 0$ —действительные числа.

Постановка задачи. Найти решение уравнения (30), (31), удовлетворяющее начальному условию

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad -h \le t \le s, \tag{32}$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0. \tag{33}$$

Легко установить, что к задачи (31) – (33) применимы теоремы 2.

Отметим, что эволюционные уравнения с отклоняющимся аргументом изучаются в работе [6].

1. *Крылов М. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1963. – 410 с.
3. *Самойленко А. М., Илолов М.* К теории эволюционных уравнений с импульсным воздействием // Докл. АН СССР. – 1991. – **316**, № 3. – С. 821–825.
4. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 282 с.
6. *Крейн С. Г., Прозоровская О. И.* О приближенных методах решения некорректных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1963. – **3**, № 1. – С. 120–130.
7. *Илолов М.* К теории абстрактных эволюционных уравнений Хейла // Докл. Тадж.ССР. – 1990. – **33**, № 7. – С. 430–434.

Получено 18.07.91