УДК 519.21

И. Б. Киричинская, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

СКЛЕИВАНИЕ ДВУХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Получен обрывающийся стохастически непрерывный строго марковский процесс в результате склейки двух необрывающихся однородных стохастически непрерывных марковских процессов с независимыми приращениями, один из которых полунепрерывный. Показано, что существует продолжение до полного однородного стохастически непрерывного строго марковского феллеровского процесса. Раньше такая задача была решена автором при более жестком ограничении – оба склеиваемые процесса были полунепрерывными.

Одержано стохастично неперервний строго марківський процес, що обривається, в результаті склейки двох повних однорідних стохастично неперервних марківських процесів з незалежними приростами, один з яких напівнеперервний. Показано, що існує продовження до повного однорідного стохастично неперервного строго марківського феллерівського процесу. Раніше така задача була розв'язана автором при більш жорсткому обмеженні – обидва процеси, які склеювалися, були напівнеперервними.

В настоящей статье обобщаются результаты работ [1, 2], где рассматривались процессы без положительных скачков. В данном случае это ограничение снимается. Обозначения в статье те же, что и в [1, 2].

Итак, рассматриваем однородные стохастически непрерывные марковские процессы с независимыми приращениями X_t^1, X_t^2. Без ограничения общности их можно считать непрерывными справа ([3], гл. III, § 4, теорема 5). Кумулянты этих процессов имеют соответственно вид

$$k_1(s) = \frac{1}{t}\ln Me^{isX_t^1} = -\frac{b_1}{2}s^2 + ia_1 s +$$

$$+ \int\limits_{0<|x|\le 1}\left(e^{isx} - 1 - isx\right)\Pi_1(dx) + \int\limits_{|x|\ge 1}\left(e^{isx} - 1\right)\Pi_1(dx);$$

$$k_2(s) = \frac{1}{t}\ln Me^{isX_t^2} = \frac{b_2}{2}s^2 + a_2 s + \int\limits_{-\infty}^{0}\left(e^{sx} - 1 - \frac{sx}{1+x^2}\right)\Pi_2(dx).$$

Процессы X_t^1, X_t^2 заданы на всей действительной оси, $\Pi_j(dx)$ — меры, $b_j \ge 0$, a_j — постоянные, $j = 1, 2$. Если X_t^1 — процесс неограниченной вариации, то должно выполняться хотя бы одно из условий: а) $b_1 \ne 0$; б) $\int\limits_{-1}^{0} x\Pi_1(dx) = +\infty$; когда же вариация ограничена, то $a_1 - \int\limits_{0<|x|\le 1} x\,\Pi_1(dx) < 0$. Для процесса X_t^2 в случае неограниченной вариации необходимо, чтобы $b_2 \ne 0$, если же вариация ограничена, то

$$a_2 - \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\Pi_2(dx) > 0.$$

Из X_t^1 и X_t^2 образуем обрывающийся однородный стохастически непрерывный строго марковский процесс X_t^0 следующим образом: $X_t^0 = X_t^1$, если $X_t^0 > 0$; $X_t^0 = X_t^2$, если $X_t^0 < 0$.

Пусть $\zeta_1 = \inf\{t: X_t^1 \le 0\}$ при условии $X_0^0 > 0$, $\zeta_2 = \inf\{t: X_t^2 \ge 0\}$ при условии $X_0^0 < 0$, ζ — момент первого попадания в точку $x = 0$. Процесс X_t^0 задан в $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Далее обозначим

$$G_\lambda^1 f(x) = M_x \int_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\,dt, \quad x > 0,$$

$$G_\lambda^2 f(x) = M_x \int_0^{\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\,dt, \quad x < 0,$$

$$G_\lambda f(x) = M_x \int_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\,dt + M_x \int_{\zeta_1}^{\zeta_1+\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\,dt, \quad f \in \mathbb{C},$$

$$f(-\infty) = f(0) = f(+\infty) = 0,$$

$\mathbb{C}$ — множество непрерывных функций, причем, если $x < 0$, то $\zeta_1 = 0$.

Необходимо продолжить X_t^0 до необрывающегося процесса X_t в $(-\infty; +\infty)$. Пусть $R_\lambda f(x)$ — резольвента процесса X_t, $K_\lambda f(x) = G_\lambda f(x)/G_1 1(x)$, $q(x) = M_x(1 - e^{-\zeta})$.

Теорема. *Существует продолжение X_t^0 до строго марковского феллеровского однородного стохастически непрерывного процесса X_t, заданного в пространстве $E = (-\infty; +\infty)$, которое характеризуется мерой $N(dy)$, постоянными l, c_1, c_2, а резольвента продолженного процесса имеет вид*

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1 - \lambda G_\lambda 1(x)) \times$$

$$\times \frac{\int_0^\infty G_\lambda f(y) N(dy) + c_1 \frac{\partial G_\lambda f}{\partial q}(0+) - c_2 \frac{\partial G_\lambda f}{\partial q}(0-)}{\lambda\left(l + \int_0^\infty G_\lambda 1(y) N(dy) + c_1 \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(0+) - c_2 \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(0-)\right)},$$

где c_1, c_2 — постоянные, $N(dy)$ — мера.

Доказательство. Доказательство теоремы совпадает с доказательством теоремы из [2], за исключением вычисления предела $\lim\limits_{x\to 0}\left(G_\lambda f(x)/G_1 1(x)\right)$. Для этого используем формулу (6. 3), гл. III, из [4]

$$G_\lambda^1 f(x) = \int_{-0}^{x} \int_{-\infty}^{0} f(x - y - z)\, d_y q_+^1(\lambda, -y)\, d_z q_-^1(\lambda, -z),$$

где

$$q_+^1(\lambda, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_0\left\{\sup \xi^1(s) \le y\right\} dt, \quad y \ge 0,$$

$$q_-^1(\lambda, y) = 1 - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_0\left\{\inf \xi^1(s) \ge y\right\} dt, \quad y \le 0,$$

$$\xi^1(t) = X_t^1 - x.$$

Известно, если $f(x, y)$ непрерывна по x, y, $g(x)$ непрерывна и $g(x) \to 0$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x, y)\, dg(y)}{g(x)}$$

существует и равен $f(0, 0)$. Поскольку $\int_{-\infty}^0 f(x - z - y)\, d_y q_+^1(\lambda, -y)$ непрерывна по z и x, а $q_-^1(\lambda, z)$ непрерывна по z, то $\lim\limits_{x \to 0} \left(G_\lambda^1 f(x) / G_1^1 1(x)\right)$ существует.

Если $x < 0$, то существование предела устанавливается так же, как и для $G_\lambda^1 f(x)$, так как в этом случае $G_\lambda f(x) = G_\lambda^2 f(x)$, или следует из [2].

Рассмотрим случай, когда $x > 0$:

$$G_\lambda f(x) = M_x \int_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\, dt + M_x \int_{\zeta_1}^{\zeta_1 + \zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt =$$

$$= M_x \int_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\, dt + M_x e^{-\lambda \zeta_1} M_{X_{\zeta_1}^1} \int_0^{\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt =$$

$$= G_\lambda^1 f(x) + M_x e^{-\lambda \zeta_1} G_\lambda^2 f\left(X_{\zeta_1}^1\right).$$

Из формулы (51), гл. IV, § 2, [5], следует, что для непрерывной функции $f(x)$

$$M e^{-\lambda \zeta_1} G_\lambda^2 f\left(X_{\zeta_1}^1\right) = M_x e^{-\lambda \zeta_1} G_\lambda^2 f(0) -$$

$$- \int_{-0}^{x} \int_{-\infty}^{0} \int_0^{\infty} M^1(x - s + y - u)\, d_y G_\lambda^2 f(-y)\, d_s q_+^1(\lambda, -s)\, d_u q_-^1(\lambda, -u).$$

Так как $G_\lambda^2 f(0) = 0$, то

$$M_x e^{-\lambda \zeta_1} G_\lambda^2 f(X_{\zeta_1}^1) =$$

$$= \int_{-0}^{x} \int_{-\infty}^{0} \int_0^{\infty} M^1(x - s + y - u)\, d_y G_\lambda^2 f(-y)\, d_s q_+^1(\lambda, -s)\, d_u q_-^1(\lambda, -u),$$

где $M^i(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \Pi_i(dy)$, $i = 1, 2$.

Процесс X_t^1 можно представить в виде суммы двух независимых между собой процессов X_t^3 и X_t^4, кумулянты которых соответственно равны

$$k_3(z) = \frac{1}{t} M e^{izX_t^3} = -\frac{b_1}{2} z^2 + i a_1 z +$$

$$+ \int_{-1}^{0} \left(e^{izx} - 1 - izx\right) \Pi_1(dx) + \int_{-\infty}^{-1} \left(e^{izx} - 1\right) \Pi_1(dx);$$

$$k_4(z) = \frac{1}{t} M e^{izX_t^4} = \int_0^1 \left(e^{izx} - 1 - izx\right) \Pi_1(dx) + \int_1^{\infty} \left(e^{izx} - 1\right) \Pi_1(dx).$$

Если ζ_3 — момент первого попадания X_t^3 в $(-\infty; 0]$, то в силу отсутствия положительных скачков $\zeta_3 \le \zeta_1$, поэтому

$$M_x \int_0^{\zeta_3} e^{-\lambda t} f(X_t^3) dt \le M_x \int_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1) dt, \quad \forall f \ge 0.$$

В [6] показано, что резольвента обрывающегося процесса в момент выхода из полуоси имеет вид

$$G_\lambda^3 f(x) = R_\lambda^3(x) \int_0^\infty e^{-\rho_3(\lambda) y} f(y) dy - \int_0^x R_\lambda^3(x-y) f(y) dy.$$

Здесь $\rho(\lambda)$ — положительный корень уравнения $k_3(s) = \lambda$,

$$R_\lambda^3(x) = \rho_3(\lambda) \int_0^x e^{\rho_3(\lambda)(x-y)} dF_\lambda(y),$$

$$F_\lambda(y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_0 \left\{ \inf_{\tau \le t} X_\tau^3 > -y \right\} dt,$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} R_\lambda(x) dx = \frac{1}{k_3(s) - \lambda}, \quad s > \rho(\lambda).$$

Покажем, что $x = O(1 - q_-^1(\lambda, x))$ при малых x или, что эквивалентно, $dx = O(dq_-^1(\lambda, x))$:

$$\frac{x}{1 - q_-^1(\lambda, x)} = \frac{x}{G_\lambda^1 1(x)} \le \frac{x}{M_x \int_0^{\zeta_3} e^{-\lambda t} dt} =$$

$$= \frac{x}{\frac{R_\lambda^3(x)}{\rho_3^1(\lambda)} - \int_0^x R_\lambda^3(y) dy} = \frac{x / R_\lambda^3(x)}{\frac{1}{\rho_3(\lambda)} - \frac{\int_0^x R_\lambda(y) dy}{R_\lambda^3(x)}}.$$

Ввиду того, что $R_\lambda^3(x) \to 0$ при $x \to 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x R_\lambda^3(y) \partial y}{R_\lambda^3(x)} = 0.$$

Остается показать справедливость соотношений

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{R_\lambda^3(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} x}{\lim\limits_{x \to 0} R_\lambda^3(x)} = \frac{\lim\limits_{s \to \infty} \frac{1}{s}}{\lim\limits_{s \to \infty} \frac{s}{k_3(s) - \lambda}}.$$

Из теоремы 5. 1, гл. I, [4], следует, что предел $\lim\limits_{s \to \infty} \left(k_3(s) / s^2 \right)$ существует. Таким образом, из того, что ограничена величина

$$\int_{-x}^0 \int_{-0}^\infty M^1(x - s + y - u) d_u q_+^1(\lambda, u) d_s q_-^1(\lambda, s)$$

(см. [5], гл. IV, § 2, (51)), следует ограниченность величины

$$\int_{-x}^{0} \int_{-0}^{\infty} M^1(x - s + y - u)\, d_u q_+^1(\lambda, u)\, ds,$$

а также

$$\int_{-0}^{\infty} \int_{-x}^{0} M^1(x - s + y - u)\, dy d_u q_+^1(\lambda, u).$$

В [2] показано, что для случая $b_2 \neq 0$ или

$$a_2 - \int_{-\infty}^{0} \left(e^{sx} - 1\right) \Pi_2(dx) > 0$$

при условии $\operatorname{Var} X_t^2 < +\infty$ предел $\lim\limits_{x \to 0} \left(G_\lambda^2 f(x) / G_1^2 1(x)\right)$ существует, но $G_\lambda^2 1(x) = 1 - e^{B(\lambda)x}$ ([5], гл. IV, § 2, (68)); таким образом, существует предел $\lim\limits_{x \to 0} \left(G_\lambda^2 f(x) / x\right)$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{M_x e^{-\lambda \zeta_1} G_\lambda^2 f\left(X_{\zeta_1}^1\right)}{1 - q_-^1(\lambda, x)}$$

существует.

А значит, существует и $\lim\limits_{x \to 0} \left(G_\lambda f(x) / G_1 1(x)\right)$, что и требовалось установить.

1. *Киричинская И. Б.* Продолжение полунепрерывных процессов с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1991. – *43*, № 9. – С. 1269 – 1272.
2. *Киричинская И. Б.* Склеивание двух полунепрерывных процессов с независимыми приращениями // Там же. – № 5. – С. 596 – 600.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.
4. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – К.: Наук. думка, 1990. – 264 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 640 с.
6. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 170 – 174.

Получено 16. 12. 91