УДК 517. 9

Е. В. Пятецкая, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ, НЕ ОБЛАДАЮЩИЕ ФУНКЦИЯМИ ГРИНА

Рассматривается интегральное представление инвариантных торов линейных расширений, не обладающих функциями Грина.

Розглядається інтегральне представлення інваріантних торів лінійних розширень, які не мають функцій Гріна.

Пусть существует знакопеременная квадратичная форма $V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x\rangle$, $S(\varphi) = S^*(\varphi) \in \mathbb{C}^1(\mathcal{T}_m)$, $x \in R^n$, имеющая знакоопределенную производную в силу системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

где $a(\varphi) \in \mathbb{C}_{\mathrm{lip}}(\mathcal{T}_m)$, $A(\varphi) \in \mathbb{C}^0(\mathcal{T}_m)$, т. е. выполняется неравенство

$$\langle [\dot{S}(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^*(\varphi)S(\varphi)]x, x\rangle \geq \|x\|^2. \tag{2}$$

Тогда известно [1], что при дополнительном условии

$$\det S(\varphi) \neq 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{T}_m \tag{3}$$

система уравнений (1) имеет единственную функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$.

При этом инвариантный тор $x = u(\varphi)$ неоднородной системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi) \tag{4}$$

можно записать в виде $x = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau$. Если же условие (3) не выполняется, т. е. существует хотя бы одна точка $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$, для которой $\det S(\varphi_0) = 0$, то система уравнений (1) не имеет функции Грина, а сопряженная к (1) система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = -A^*(\varphi)y, \quad y \in R^n, \tag{5}$$

имеет множество различных функций Грина $G_0(\tau, \varphi)$. В работе [2] установлено, что в этих условиях все же при некоторых вектор-функциях $f(\varphi) \in \mathbb{C}^0(\mathcal{T}_m)$ система (4) имеет инвариантный тор $x = u(\varphi)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(\varphi)$ в некотором смысле была ортогональной к каждому нетривиальному тору $y = v(\varphi)$ системы (5), а именно: должно выполняться тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle f(\varphi_\tau(\varphi)), \quad v(\varphi_\tau(\varphi))\rangle d\tau \equiv 0. \tag{6}$$

Здесь возникают следующие вопросы : можно ли в этих условиях инвариантный тор системы (4) представить в интегральном виде

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{G}(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)\, d\tau.$$

Если да, то какая структура функции $\mathfrak{G}(\tau, \varphi)$, и какие свойства она имеет.

Решению возникших вопросов и посвящена настоящая статья.

Теорема 1. *Пусть существует симметричная матрица* $S(\varphi) \in \mathbb{C}^1(\mathcal{T}_m)$, *удовлетворяющая условию* (2), *и определитель этой матрицы в некоторой точке* $\varphi = \varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ *равен нулю*

$$\det S(\varphi_0) = 0. \tag{7}$$

Тогда существует множество матриц $P(\varphi) \in \mathbb{C}^1(\mathcal{T}_m)$ *таких, что для каждой из них функция*

$$\mathcal{G}(\tau, \varphi) = \begin{cases} P(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \le 0, \\ [P(\varphi) - I_n]\,\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau > 0, \end{cases} \tag{8}$$

удовлетворяет оценке

$$\| \mathcal{G}(\tau, \varphi) \| \le K e^{-\gamma|\tau|}, \quad \tau \in R, \quad K, \gamma \text{— const.} \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + y, \quad \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = -A^*(\varphi)y. \tag{10}$$

Поскольку в силу системы производная невырожденной квадратичной формы $V = \langle S(\varphi)x, x\rangle + p\langle x, y\rangle$ при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ положительно определена, то система (10) имеет единственную функцию Грина

$$G_0(\tau; \varphi) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi; A) & 0 \\ -\int\limits_\tau^0 [\Omega_0^\sigma(\varphi; A)]^*\,\Omega_\tau^\sigma(\varphi; A)\,d\sigma & [\Omega_0^\tau(\varphi; A)]^* \end{bmatrix} \times \\ \qquad \times \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) \end{bmatrix}, \quad \tau \le 0, \\ \\ \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi; A) & 0 \\ -\int\limits_\tau^0 [\Omega_0^\sigma(\varphi; A)]^*\,\Omega_\tau^\sigma(\varphi; A)\,d\sigma & [\Omega_0^\tau(\varphi; A)]^* \end{bmatrix} \times \\ \qquad \times \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n \end{bmatrix}, \quad \tau > 0, \end{cases} \tag{11}$$

для которой справедлива оценка

$$\| G_0(\tau, \varphi) \| \le K e^{-\gamma|\tau|}, \quad \tau \in R. \tag{12}$$

Очевидно, в силу оценки (12) матрицы $C_{11}(\varphi)$, $C_{21}(\varphi)$ имеют следующие свойства:

$$\begin{gathered} \| C_{11}(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi) \| \le K e^{\gamma\tau}, \quad \tau < 0, \\ \| (C_{11}(\varphi) - I_n)\,\Omega_\tau^0(\varphi) \| \le K e^{-\gamma\tau}, \quad \tau > 0, \\ \| C_{21}(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi) \| \le K e^{-\gamma|\tau|}, \quad \tau \in R. \end{gathered} \tag{13}$$

Покажем, что $C_{21}(\varphi) \not\equiv 0$. Предположим, это не выполняется, т. е. $C_{21}(\varphi) \equiv 0$. Тогда из структуры функции Грина (11) видно, что функция

$$G^*(\tau, \varphi) = \begin{cases} C_{22}(\varphi_\tau(\varphi))\,[\Omega_0^\tau(\varphi; A)]^*, & \tau < 0, \\ (C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n)\,[\Omega_0^\tau(\varphi; A)]^*, & \tau > 0, \end{cases}$$

удовлетворяет оценке $\| G^*(\tau, \varphi) \| \le Ke^{-\gamma|\tau|}$. Поэтому интегралы

$$S_1(\varphi) = \int_0^{\infty} \Omega_{t_1}^0(\varphi) C_{22}^*(\varphi_{t_1}(\varphi)) [\Omega_{t_1}^0(\varphi) C_{22}(\varphi_{t_1}(\varphi))] dt_1,$$

$$S_2(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_{t_1}^0(\varphi) [C_{22}(\varphi_{t_1}(\varphi)) - I_n]^* \Omega_{t_1}^0(\varphi) [C_{22}(\varphi_{t_1}(\varphi)) - I_n] dt_1 \tag{14}$$

являются сходящимися равномерно по $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Рассмотрим

$$S(\varphi) = S_2(\varphi) - S_1(\varphi),$$

$$\dot S_1(\varphi) = C_{22}^*(\varphi) C_{22}(\varphi) + A(\varphi) S_1(\varphi) + S_1(\varphi) A^*(\varphi),$$

$$\dot S_2(\varphi) = -[C_{22}(\varphi) - I_n]^* [C_{22}(\varphi) - I_n] + A(\varphi) S_2(\varphi) + S_2(\varphi) A^*(\varphi),$$

$$\langle [\dot S(\varphi) - S(\varphi) A^*(\varphi) - A(\varphi) S(\varphi)] x, x \rangle =$$

$$= -2\{\| [C_{22}(\varphi) - I_n] x \|^2 + \| C_{22}(\varphi) x \|^2\} \le -\| x \|^2. \tag{15}$$

Из условий (2), (15) и теоремы 8.3 [1] следует $\det S(\varphi) \ne 0$. По условию теоремы при $\varphi = \varphi_0$: $\det S(\varphi_0) = 0$. Пришли к противоречию, которое доказывает, что $C_{21} \not\equiv 0$. В качестве матрицы $P(\varphi)$ возьмем $P(\varphi) = C_{11}(\varphi) + \lambda C_{21}(\varphi)$, где λ — произвольный фиксированный параметр из R. Таких матриц существует множество. Функция

$$\mathfrak{G}_\lambda(\tau, \varphi) = \begin{cases} [C_{11}(\varphi) + \lambda C_{21}(\varphi)]\, \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \le 0, \\ [(C_{11}(\varphi) + \lambda C_{21}(\varphi)) - I_n]\, \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau > 0, \end{cases}$$

удовлетворяет оценке $\| \mathfrak{G}_\lambda(\tau, \varphi) \| \le K_\lambda e^{-\gamma|\tau|}$, $\tau \in R$, так как

$$\| [C_{11}(\varphi) + \lambda C_{21}(\varphi)]\, \Omega_\tau^0(\varphi) \| \le \| C_{11}(\varphi)\, \Omega_\tau^0(\varphi) \| +$$

$$+ \lambda \| C_{21}(\varphi)\, \Omega_\tau^0(\varphi) \| \le Ke^{\gamma\tau} + \lambda K e^{-\gamma|\tau|},$$

$$\| [(C_{11}(\varphi) + \lambda C_{21}(\varphi)) - I_n]\, \Omega_\tau^0(\varphi) \| \le \| (C_{11}(\varphi) - I_n)\, \Omega_\tau^0(\varphi) \| +$$

$$+ \lambda \| C_{21}(\varphi)\, \Omega_\tau^0(\varphi) \| \le Ke^{-\gamma\tau} + \lambda K e^{-\gamma|\tau|}.$$

Теорема 2. *Если существуют хотя бы две различные матрицы $P(\varphi) \in \mathbb{C}^1(\mathcal{T}_m)$, для которых функции (8) удовлетворяют оценке (9), то существует множество симметричных матриц $S(\varphi) \in \mathbb{C}^1(\mathcal{T}_m)$, удовлетворяющих условию (2), и каждая из этих матриц $S(\varphi)$ обязательно в некоторой точке $\varphi = \varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ вырождается.*

Доказательство. Пусть существуют две различные матрицы $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi) \in \mathbb{C}^1(\mathcal{T}_m)$, $P_1(\varphi) \not\equiv P_2(\varphi)$, такие, что функции:

$$\mathfrak{G}_1(\tau, \varphi) = \begin{cases} P_1(\varphi)\, \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \le 0, \\ [P_1(\varphi) - I_n]\, \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau > 0, \end{cases} \quad \mathfrak{G}_2(\tau, \varphi) = \begin{cases} P_2(\varphi)\, \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \le 0, \\ [P_2(\varphi) - I_n]\, \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau > 0, \end{cases}$$

удовлетворяют оценкам $\| \mathfrak{G}_i(\tau, \varphi) \| \le Ke^{-\gamma|\tau|}$, $\tau \in R$, $i = 1, 2$. Следовательно, $\| P_i(\varphi)\, \Omega_\tau^0(\varphi) \| \le Ke^{-\gamma|\tau|}$. Отсюда вытекает $\| [P_1(\varphi) - P_2(\varphi)]\, \Omega_\tau^0(\varphi) \| \le Ke^{-\gamma|\tau|}$,

$\tau \in R$. Для каждого числового вектора $\eta \in R$ имеем $\| (\Omega_\tau^0(\varphi))^*(P_1(\varphi) - P_2(\varphi))^*\eta \| \le K\|\eta\| e^{-\gamma|\tau|}$, $t \in R$. Пусть $\varphi = \varphi_0$ — некоторая фиксированная точка. Тогда равенством

$$y(t) = (\Omega_\tau^0(\varphi_0))^*(P_1(\varphi_0) - P_2(\varphi_0))^*\eta \tag{16}$$

определяется нетривиальное ограниченное на R решение системы

$$\dot{y} = -A^*(\varphi_t(\varphi_0))y. \tag{17}$$

Это означает, что существует симметричная матрица $S(\varphi)$, удовлетворяющая условию (2) и вырождающаяся в точке φ_0.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того, система уравнений*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi) \tag{18}$$

имеет инвариантный тор $x = u(\varphi)$. Тогда этот тор единственный и всегда представим в виде

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau, \tag{19}$$

где $\mathcal{B}(\tau, \varphi)$ — произвольная функция вида (8) *с оценкой* (9).

Доказательство. Пусть система (18) имеет два инвариантных тора $x = u_1(\varphi)$, $x = u_2(\varphi)$, $u_1 \not\equiv u_2$. Тогда $x = u_2(\varphi_t(\varphi_0)) - u_1(\varphi_t(\varphi_0)) \neq 0$ — ограниченное на R решение системы

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi_0))x. \tag{20}$$

В силу того, что существует матрица $S(\varphi)$, удовлетворяющая условию (2), заключаем, что система (20) не имеет нетривиальных ограниченных на R решений. Следовательно, $u_1(\varphi_t(\varphi_0)) \equiv u_2(\varphi_t(\varphi_0))$.

Покажем, что тор $x = u(\varphi)$ представим в виде (19), где $\mathcal{B}(\tau, \varphi)$ — любая функция вида (8). Расширенная система

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + y + f(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = -A^*(\varphi)\, y \tag{21}$$

имеет единственный инвариантный тор

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\varphi) \\ v(\varphi) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) \begin{pmatrix} f(\varphi_\tau(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau, \tag{22}$$

где $G_0(\tau, \varphi)$ — это функция Грина вида (11).

Расписывая (22), имеем

$$y = v(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{21}(\varphi)\, \Omega_\tau^0(\varphi)\, f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau,$$

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} C_{11}(\varphi)\, \Omega_\tau^0(\varphi)\, f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau + \int_{0}^{\infty} [C_{11}(\varphi) - I_n]\, \Omega_\tau^0(\varphi)\, f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} C_{21}(\varphi)\, \Omega_\tau^0(\varphi)\, f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau. \tag{23}$$

Поскольку в теореме предполагается, что система (18) имеет инвариантный тор $x = u(\varphi)$, а система (21) обязательно должна иметь единственный инвариантный тор $x = \tilde{u}(\varphi)$, $y = \tilde{v}(\varphi)$, то $\tilde{u}(\varphi) \equiv u(\varphi)$, $\tilde{v}(\varphi) \equiv 0$. Следовательно, из (23) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_{21}(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi)\,f(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv 0, \tag{24}$$

а значит,

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} C_{11}(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi)\,f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} [C_{11}(\varphi) - I_n]\,\Omega_\tau^0(\varphi)\,f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_0(\tau, \varphi)\,f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau, \tag{25}$$

где

$$\mathcal{B}_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} C_{11}(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \le 0, \\ [C_{11}(\varphi) - I_n]\,\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau > 0. \end{cases}$$

Используя функцию (8), равенство (25) продолжаем

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_0(\tau, \varphi)\,f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}(\tau, \varphi)\,f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{B}_0(\tau, \varphi) - \mathcal{B}(\tau, \varphi)]\,f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau = \mathcal{J}_1(\varphi) + \mathcal{J}_2(\varphi). \tag{26}$$

Покажем, что в равенстве (26) второе слагаемое $\mathcal{J}_2(\varphi)$ тождественно равно нулю. Это слагаемое можно записать в виде

$$\mathcal{J}_2(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} [C_{11}(\varphi) - P(\varphi)]\,\Omega_\tau^0(\varphi)\,f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau.$$

Зафиксируем произвольное значение $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ и покажем, что $\mathcal{J}_2(\varphi_0) = 0$. Очевидно, $y(t) = (\Omega_\tau^0(\varphi_0))^*(C_{11}(\varphi_0) - P(\varphi_0))\eta(0)$ — ограниченное на R решение системы $\dot{y} = -A^*(\varphi_t(\varphi_0))\,y$ при любом векторе $\eta \in R^n$. Для того чтобы система $\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi_0))\,x + f(\varphi_t(\varphi_0))$ имела ограниченное на R решение, необходимо и достаточно [1], чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle y(\tau), f(\varphi_t(\varphi_0))\rangle\,d\tau = 0.$$

Поэтому $\forall \eta \in R^n$ имеем $\eta^*\mathcal{J}_2(\varphi_0) = 0$. Отсюда $\mathcal{J}_2(\varphi_0) = 0$. Поскольку φ_0 произвольно выбрана из $\mathcal{T}_m$, то $\mathcal{J}_2(\varphi) \equiv 0$. Таким образом, инвариантный тор (25) $x = u(\varphi)$ представим в виде (19), где $\mathcal{B}(\tau, \varphi)$ — произвольная функция вида (8), что и требовалось доказать.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев : Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.– 1985. – **21**, №5. – С. 776 – 787.

Получено 20. 11. 91