УДК 517. 9 : 519. 46

В. І. Фущич, чл.-кор. АН України,
В. І. Чопик, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

СИММЕТРІЯ ТА НЕЛІЇВСЬКА РЕДУКЦІЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

Описані нелінійні рівняння типу Шредінгера, інваріантні відносно розширених груп Галілея. Вивчена умовна симетрія таких рівнянь і проведена їх редукція, побудовані класи точних розв'язків.

1. Вступ. Розглянемо нелінійне рівняння Шредінгера

$$L_1(u) \equiv Su - uF(u, u^*) = 0, \tag{1}$$

де $S = i\partial/\partial x_0 + \lambda\Delta$, $x_0 \equiv t$, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$, $i^2 = -1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, n — число просторових змінних.

Як відомо, рівняння (1) інваріантне віднісно алгебри Галілея $AG(1, n)$ тоді і тільки тоді, коли $F = F(uu^*)$. Базисні оператори алгебри $AG(1, n)$ мають вигляд

$$P_0 = \partial/\partial x_0, \ P_a = \partial/\partial x_a, \ J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \ (a, b) = \overline{1, n},$$
$$Q = i(u\partial/\partial u - u^*\partial/\partial u^*), \ G_a = x_0 P_a + (1/2\lambda)x_a Q. \tag{2}$$

Інших представлень алгебри Галілея рівняння (1) не допускає. В [1] описані всі нелінійні рівняння типу (1), інваріантні відносно таких розширень алгебри Галілея $AG(1, n)$:

1) $AG_1(1, n) = \langle AG(1, n), D\rangle,$ (3)

де оператор масштабних перетворень D має вигляд $D = 2x_0 P_0 + x_a P_a + kI$, $I = (u\partial/\partial u + u^*\partial/\partial u^*)$, $k \in \mathbb{R}$;

2) $AG_2(1, n) = \langle AG_1(1, n), A\rangle,$ (4)

де оператор проективних перетворень A має вигляд $A = x_0^2 P_0 + x_0 x_a P_a + \mathbf{x}^2 (4\lambda)^{-1} Q + \frac{n}{2} x_0 I$, $\mathbf{x}^2 = x_a x_a$, $a = \overline{1, n}$.

Узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1, n)$, доповнена оператором I, являється максимальною алгеброю інваріантності вільного рівняння Шредінгера (1) ($F = 0$).

Однак, в [1] не досліджене таке важливе питання: чи існують рівняння типу (1), які були б інваріантні відносно алгебри (2) та інших її розширень ?

У даній роботі дано ствердну відповідь на це питання. Зокрема, доведено, що рівняння Шредінгера з логарифмічною нелінійністю $u\ln(uu^*)$ допускає два різних розширення алгебри $AG(1, n)$. Вивчена умовна симетрія рівнянь типу (1). Показано, що рівняння (1) з нелінійністю $u\ln(uu^{*-1}) + uF(uu^*)$ умовно інваріантне відносно алгебри Галілея у нестандартному представленні. Здійснена неліївська редукція та побудовані класи точних розв'язків розглядуваних рівнянь.

2. Симетрія Лі рівняння (1). Інформація про ліївську симетрію рівняння (1) міститься в наступних твердженнях.

Теорема 1 [1]. *Рівняння* (1) ($F \neq 0$) *інваріантне відносно алгебр* $AG_1(1, n)$ (3) *та* $AG_2(1, n)$ (4) *тоді і тільки тоді, коли*

$$F = \lambda_1 |u|^{-2/k}, \ \ \lambda_1 \in \mathbb{C}, \ \ |u| = (uu^*)^{1/2};$$

$$F = \lambda_2 |u|^{4/n}, \ \ \lambda_2 \in \mathbb{C},$$

відповідно.

Теорема 2. *Серед рівнянь класу* (1) *тільки рівняння з нелінійністю*

$$F = \lambda_3 \ln(uu^*), \ \lambda_3 \in \mathbb{C}, \ \lambda_3 = b + ib_1 \tag{5}$$

інваріантне відносно алгебр [2]:

1) $AG_3(1,n) = \langle AG(1,n), B\rangle$ *при* $b_1 = 0$, *де*

$$B = I - 2bx_0Q; \tag{6}$$

2) $AG_4(1,n) = \langle AG(1,n), C\rangle$ *при* $b_1 \neq 0$, *де*

$$C = \exp\{2b_1x_0\}(I + i\,(b/b_1)Q). \tag{7}$$

***Зауваження* 1.** При $b = 0$ рівняння (1), (5) інваріантне відносно алгебри $AG_4(1,n) = \langle AG(1,n), C^{(1)}\rangle$, де

$$C^{(1)} = \exp\{2b_1x_0\}I. \tag{8}$$

Оператор $C^{(1)}$ одержується з (7) при $b = 0$.

Теорема 3. *Рівняння* (1) *інваріантне відносно таких алгебр*:

1) $A_1 = \langle P_0, P_a, J_{ab}, I\rangle$, *коли* $F = F(uu^{*-1})$;

2) $A_2 = \langle P_0, P_a, J_{ab}, C^{(1)}\rangle$,

коли $F = ib_1\ln(uu^{*-1}) + F_1(uu^{*-1})$, *а оператор* $C^{(1)}$ *має вигляд* (8);

3) $A_3 = \langle P_0, P_a, J_{ab}, Q^{(1)}, G_a^{(1)}\rangle$, *де*

$$Q^{(1)} = \exp\{2\beta x_0\}Q, \ \ G_a^{(1)} = \exp\{2\beta x_0\}(P_a + (\beta/\lambda)x_a)Q, \tag{9}$$

коли $F = -i\beta\ln(uu^{*-1}) + F_2(uu^*)$, $\beta \in \mathbb{R}$;

4) $A_4 = \langle P_0, P_a, J_{ab}, Q^{(1)}, G_a^{(1)}, I\rangle$, (10)

коли $F = -i\beta\ln(uu^{*-1})$, $\beta \in \mathbb{R}$; $\beta \neq 0$;

5) $A_5 = \langle P_0, P_a, J_{ab}, Q^{(1)}, G_a^{(1)}, \beta I + \beta_1 Q\rangle$, $\{\beta, \beta_1\} \subset \mathbb{R}$,

коли $F = \beta_1\ln(uu) - i\beta(uu^{*-1})$;

6) $A_6 = \langle P_0, P_a, J_{ab}, Q^{(1)}, G_a^{(1)}, C^{(1)}\rangle$, $\{\beta, b_1\} \subset \mathbb{R}$,

коли $F = ib_1\ln(uu^*) - i\beta\ln(uu^{*-1})$,

7) $A_7 = \langle P_0, P_a, J_{ab}, I, D^{(1)}\rangle$, $D^{(1)} = 2x_0P_0 + x_aP_a + dQ$, $d \in \mathbb{R}$; $d \neq 0$,

коли $F = \lambda_4(uu^{*-1})^{i/d}$, $\lambda_4 \in \mathbb{C}$;

8) $A_8 = \langle P_0, P_a, J_{ab}, kI + dQ\rangle$, $\{k, d\} \subset \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $d \neq 0$,

коли $F = F(u^\alpha u^{*\alpha^*})$, $\alpha = \alpha_1 - i\alpha_2$, $k\alpha_1 + d\alpha_2 = 0$;

9) $A_9 = \langle P_0, P_a, J_{ab}, I, D^{(2)}\rangle$, $D^{(2)} = 2x_0P_0 + x_aP_a + kI + dQ$, $\{k, d\} \neq 0$,

коли $F = F(u^\alpha u^{*\alpha^*})(uu^*)^{-1}$, $\alpha = \alpha_1 - i\alpha_2$, $k\alpha_1 + d\alpha_2 = 0$;

де k, d, α_1, α_2 — *довільні дійсні параметри.*

***Наслідок* 1.** *З теореми 2 випливає, що рівняння*

$$iu_0 + \lambda\Delta u = \lambda_3\ln(uu^*)u, \ \ \lambda_3 = b + ib_1 \tag{11}$$

іваріантне відносно таких скінченних перетворень: $x_0 \to x_0' = x_0$, $x_a \to x_a' = x_a$,

$a = \overline{1, n}$, *а також*:

1) $$u \to u' = \exp\{\theta_1(1 - 2ibx_0)\}u \tag{12}$$

при $b_1 = 0$;

2) $u \to u' = \exp\{\theta_2 \exp\{2b_1 x_0(1 - i(b/b_1))\}\}u$ *при* $b_1 \neq 0$;

3) $u \to u' = \exp\{\theta_3 \exp\{2b_1 x_0\}\}u$ *при* $b \neq 0$; $b_1 \neq 0$;

де θ_1, θ_2, θ_3 — *групові параметри.*

***Наслідок* 2.** *З комутаційних співвідношень для оператора* B: $[B, P_0] = c_1 Q$, $[B, P_a] = [B, J_{ab}] = [B, Q] = [B, G_a] = 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$; *та оператора* C: $[C, P_0] = c_2 C$, $[C, P_a] = [C, J_{ab}] = [C, Q] = [C, G_a] = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$, *випливає, що алгебри* $AG_3(1, n)$ *та* $AG_4(1, n)$ *різні. Тобто рівняння Шредінгера з логарифмічною нелінійністю* (5) *допускає два різних розширення алгебри Галілея* $AG(1, n)$.

***Зауваження*. 2.** Рівняння (5) при $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ $(b_1 = 0)$ співпадає з рівнянням, запропонованим у роботі [3]. В цій роботі вказані перетворення (12) (за винятком оператора B, що їх породжує). Це рівняння використовується в ядерній фізиці для опису нуклонів та альфа-частинок. Дослідженню цього рівняння присвячені також роботи [2, 4].

3. Рівняння

$$iu_0 + \lambda\Delta u = -i\beta\ln(uu^{*-1}) + F_2(uu^*),\ \beta \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

широко використовується в математичній фізиці і його називають фазовим рівнянням Шредінгера [4, 5].

***Наслідок* 3.** *З комутаційних співвідношень для алгебри* A_3 (9):

$$[P_0, P_a] = [P_0, J_{ab}] = [P_a, Q^{(1)}] = [J_{ab}, Q^{(1)}] = [G_a^{(1)}, G_b^{(1)}] = [P_a, P_b] = 0,$$

$$[P_0, Q^{(1)}] = c_1 Q^{(1)},\ [P_0, G_a^{(1)}] = c_2 G^{(1)},\ [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b,$$

$$[G_a^{(1)}, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c^{(1)} - \delta_{ac}G_b^{(1)},\ \{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}$$

випливає, що базисні оператори цієї алгебри не утворюють алгебри Галілея. Оператори $G_a^{(1)}$ *породжують такі скінченні перетворення*:

$$x_0 \to x_0' = x_0,\ x_a \to x_a' = \exp\{2\beta x_0\}\theta_\alpha + x_\alpha,$$

$$u \to u' = u\exp\{i[(\beta/2\lambda)\exp\{4\beta x_0\}\theta^2 + \exp\{2\beta x_0\}x_\alpha\theta_\alpha]\},$$

де θ_α — *групові параметри,* $\theta^2 = \theta_\alpha\theta_\alpha$.

3. Умовна симетрія. Розглянемо рівняння класу (1)

$$L_1(u) \equiv Su - uF(uu^*) = 0, \tag{14}$$

інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1, n)$ (2). Відповідь на питання про існування операторів умовної симетрії рівняння (14) випливає з наступних теорем.

Теорема 4. *Рівняння* (14) *умовно інваріантне відносно таких алгебр*:

1) $A_{10} = \langle AG(1, n), Q^{(2)}\rangle$; $Q^{(2)} = x_a P_a - i\ln(uu^{*-1})Q$, *якщо* $F = -F^*$, *і виконується додаткова умова*

$$L_2(u) \equiv \Delta|u| = 0,\quad |u| = (uu^*)^{1/2}; \tag{15}$$

2) $A_{11} = \langle A_{10}, C^{(1)}\rangle$, *якщо* $F = ib_1\ln(uu^*)$, $b_1 \in \mathbb{R}$, $C^{(1)}$ *має вигляд* (8) *і виконується* (15);

3) $A_{12} = \langle AG(1,n), Q^{(3)}\rangle$, $Q^{(3)} = x_0P_0 + x_aP_a - (i/2)\ln(uu^{*-1})Q$, *якщо функція F приймає дійсні значення (тобто $F = F^*$) і виконується додаткова умова* (15);

4) $A_{13} = \langle A_{12}, B\rangle$, *якщо* $F = b\ln(uu^*)$, $b \in \mathbb{R}$, *оператор B має вигляд* (6) *і виконується додаткова умова* (15);

5) $A_{14} \equiv \langle AG(1,n), Q^{(4)}\rangle$, $Q^{(4)} = x_0P_0 + (i/2)\ln(uu^{*-1})Q$ *і виконуються умови* $F^* = F$, $L_2(u) \equiv V_0 + \lambda V_aV_a = 0$, $2V = -i\ln(uu^{*-1})$.

Теорема 5 [6]. *Рівняння* (14) *при*

$$F = \alpha_1|u|^{2r^{-1}} + \alpha_2|u|^{-2r^{-1}}, \quad \{r, \alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{R}, \quad r \neq 0, \tag{16}$$

умовно інваріантне відносно оператора

$$Q^{(5)} = x_aP_a + rI - i\ln(uu^{*-1})Q, \tag{17}$$

якщо $L_2(u) \equiv \Delta|u| - \alpha_3|u|^{(r-2)/r} = 0$, $\alpha_3 = \alpha_2\lambda^{-1}$.

Наслідок 4. *Рівняння Шредінгера* (14) *з нелінійністю* (16) *умовно інваріантне відносно алгебри* $AG_5(1,n) \equiv \langle AG_1(1,n), Q^{(5)}\rangle$, *якщо виконується одна з умов*:

$$\alpha_1 = 0, \quad r = k \tag{18}$$

або

$$\alpha_2 = 0, \quad r = -k. \tag{19}$$

Наслідок 5. *Рівняння* (14), (16) *умовно інваріантне відносно алгебри* $AG_6(1,n) \equiv \langle AG_2(1,n), Q^{(5)}\rangle$ *при виконанні однієї з умов* (18), (19) *та умови, що* $k = -n/2$.

Структура алгебри $AG_6(1,n)$ вивчена в роботах [7, 8].

Наслідок 6. *Оператор* $Q^{(5)}$ *породжує такі скінченні перетворення*:

$$x_0 \to x_0' = x_0, \; x_a \to x_a' = \exp(\theta)x_\alpha,$$

$$u \to u' = \exp(r\theta)\exp\{\exp(2\theta)\}\,(uu^{*-1})^{1/2}|u|,$$

θ — *груповий параметр*.

Теорема 6. *Рівняння* (14) *з нелінійністю*

$$F = i\alpha_1|u|^{-r^{-1}} + \alpha_2|u|^{-(1+\beta)r^{-1}} + \alpha_3|u|^{-(1-\beta)r^{-1}}, \quad \{\alpha_j, \beta, r\} \subset \mathbb{R}, \quad j = \overline{1,3}, \tag{20}$$

умовно інваріантне відносно оператора

$$Q^{(6)} = 2x_0P_0 + (1+\beta)x_aP_a + i\beta\ln(uu^{*-1})Q + rI, \; r \neq 0,$$

якщо $\Delta|u| = \alpha_4|u|^{1-(1+\beta)r^{-1}}$, $\alpha_4 = \alpha_2\lambda^{-1}$.

Наслідок 7. *Оператор* $Q^{(6)}$ *породжує такі скінченні перетворення*:

$$x_0 \to x_0' = \exp(2\theta)x_0, \; x_a \to x_a' = \exp((1+\beta)\theta)x_\alpha,$$

$$u \to u' = \exp(r\theta)\exp\{\exp(-2\beta\theta)\}\,(uu^{*-1})^{1/2}|u|,$$

θ — *груповий параметр*.

4. Умовна Галілей-інваріантність фазового рівняння Шредінгера. З комутаційних співвідношень для алгебри A_3 (9) (див. наслідок 3) випливає, що всі оператори цієї алгебри, за винятком оператора P_0, задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Галілея [1].

Твердження. *Якщо оператор* $P_0^{(1)}$ *має вигляд*

$$P_0^{(1)} = \exp\{-2\beta x_0\}(P_0 - i\beta \ln(uu^{*-1})Q), \tag{21}$$

то оператори $P_0^{(1)}$, P_a, J_{ab}, $Q^{(1)}$, $G_a^{(1)}$ *утворюють базис алгебри Галілея, яку позначатимемо* $AG^{(1)}(1, n)$.

Справедливість цього твердження випливає з комутаційних співвідношень для оператора $P_0^{(1)}$:

$$[P_0^{(1)}, P_a] = [P_0^{(1)}, J_{ab}] = [P_0^{(1)}, Q^{(1)}] = 0, \quad [P_0^{(1)}, G_a^{(1)}] = cP_a, \; c \in \mathbb{R}.$$

Вимагатимемо інваріантність фазового рівняння Шредінгера

$$Su + i\beta u \ln(uu^{*-1}) = 0 \tag{22}$$

відносно оператора $P_0^{(1)}$. Результат сформулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема 7. *Фазове рівняння Шредінгера* (22) *умовно інваріантне відносно алгебри* $A_{15} = \langle AG^{(1)}(1, n), P_0, Q^{(2)}, A^{(1)}, I \rangle$, *де*

$$Q^{(2)} = x_a P_a - i\ln(uu^{*-1})Q,$$

$$A^{(1)} = \exp\{2\beta x_0\}(P_0/\beta + 2x_a P_a - i\ln(uu^{*-1})Q + (\beta/\lambda)x^2 Q - nI),$$

якщо виконується додаткова умова

$$L_2 = V_0 + \lambda V_a V_a - 2\beta V = 0, \; 2V = -i\ln(uu^{*-1}), \; \beta \neq 0. \tag{23}$$

Оператори $P_0^{(1)}$, $Q^{(2)}$ *породжують такі скінченні перетворення*:

$$x_0 \to x_0' = (2\beta)^{-1} \ln(2\beta\theta_1 + \exp\{2\beta x_0\}); \;\; x_a \to x_a' = \exp\{\theta_2\} x_\alpha;$$

$$u \to u' = \exp\left\{ 2i\beta \exp\left\{ \frac{\theta_1 + \exp(2\beta x_0)\left(2\theta_2 + \ln\left((4i\beta)^{-1}\ln(uu^{*-1})\right)\right)}{2\beta\theta_1 + \exp(2\beta x_0)} \right\} \right\} |u|,$$

де θ_1, θ_2 — *групові параметри*.

Наслідок 8. *Алгебра* A_{15} *ізоморфна алгебрі умовної інваріантності вільного рівняння Шредінгера* [6]. *Тобто оператори* $P_0^{(1)}$, P_a, J_{ab}, P_0, $Q^{(2)}$, $Q^{(1)}$, $G_a^{(1)}$, $A^{(1)}$, I *реалізують нове представлення алгебри* $AG_6(1, n)$, *доповненої оператором* I.

Дослідимо симетрійні властивості рівняння (13) при додатковій умові (23).

Теорема 8. *Рівняння* (13) *умовно інваріантне відносно таких алгебр Галілея*:

1) $A_{16} = \langle AG^{(1)}(1, n), P_0 \rangle$, *якщо функція* $F(uu^*)$ *дійсна*;

2) $A_{17} = \langle A_{16}, D^{(1)} \rangle$, *якщо* $F = \lambda_1 |u|^{-2/k}$, $\{\lambda_1, k\} \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$;

де $D^{(1)} = Q^{(2)} + 2P_0 + kI$;

3) $A_{18} = \langle A_{17}, A^{(1)} \rangle$, *якщо* $F = \lambda_2 |u|^{4/n}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $k = -n/2$.

Додаткова умова має вигляд (23).

Алгебра A_{18} ізоморфна алгебрі $AG_6(1, n)$. Це випливає з комутаційних співвідношень для цих алгебр [6 – 8].

Таким чином, доведено, що фазове рівняння Шредінгера умовно інваріантне відносно алгебри Галілея у нестандартному представленні.

Сформулюємо ще одну теорему про умовну інваріантність рівняння (13).

Теорема 9. *Рівняння* (13) *умовно інваріантне відносно таких алгебр*:

1) $A_{19} = \langle A_3, Q^{(2)} \rangle$, *якщо функція* $iF(uu^*)$ *дійсна*;

2) $A_{20} = \langle A_6, Q^{(2)} \rangle$, *якщо* $F = ib_2 \ln(uu^*)$, $b_2 \in \mathbb{R}$,

при додатковій умові на модуль функції u (15).

5. Доведення теорем. Повне доведення наведених теорем досить громіздке, тому ми вкажемо тільки основні етапи його, опускаючи деталі.

Позначимо через X довільний оператор з алгебри інваріантності рівняння (1). Для доведення теорем 1 – 3 необхідно скористатися алгоритмом Лі.

1. Побудувати за формулами Лі друге продовження $\overset{(2)}{X}$ операторів (див., наприклад, [1]).

2. Подіяти операторами другого продовження $\overset{(2)}{X}$ на многовид (1) і знайти диференціальне рівняння для функції $F(u, u^*)$. Розв'язавши це рівняння, одержимо явний вигляд функцій $F(u, u^*)$, при яких рівняння (1) має ту чи іншу симетрію.

Для доведення теорем 4 – 9 потрібно використати критерій умовної інваріантності. В розглядуваному випадку цей критерій має вигляд [1, 6]

$$\overset{(2)}{X} L_1 = g_{11}L_1 + g_{12}L_2 = \overset{(2)}{X} L_1 \Big|_{\substack{L_1=0\\ L_2=0}} = 0, \tag{24}$$

$$\overset{(2)}{X} L_1 = g_{21}L_1 + g_{22}L_2 = \overset{(2)}{X} L_2 \Big|_{\substack{L_1=0\\ L_2=0}} = 0, \tag{25}$$

де g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22} — взагалі кажучи, деякі оператори. Розв'язавши систему (24), (25), одержимо умови на u і u^*, при яких рівняння (1) інваріантне відносно оператора X.

Наведемо доведення теореми 5 про умовну інваріантність рівняння (14) відносно оператора $Q^{(5)} = X$.

Діючи оператором $\overset{(2)}{X}$ на многовид $L_1(u)$, одержимо

$$\overset{(2)}{X} L_1(u) = 2L_1 - 4\lambda\Delta|u||u|^{-1} + 2F - r(uF_u + u^* F_{u^*}), \tag{26}$$

де $F_u = \partial F/\partial u$, $F_{u^*} = \partial F/\partial u^*$. Отже,

$$L_2(u) = -4\lambda\Delta|u||u|^{-1} + 2F - r(uF_u + u^* F_{u^*}). \tag{27}$$

Діючи оператором $\overset{(2)}{X}$ на многовид, одержимо

$$\overset{(2)}{X} L_2 = -2L_2 + 4F - r^2(uF_u + u^* F_{u^*} + u^2F_{uu} + u^{*2}F_{u^*u^*} + 2uu^* F_{uu^*}). \tag{28}$$

З (26), (29) випливає, що рівняння (14) інваріантне відносно $Q^{5)}$ при додатковій умові $L_2(u) = 0$, при чому нелінійність $F(|u|)$ повинна задовольняти умову

$$4F - r^2(uF_u + u^* F_{u^*} + u^2F_{uu} + u^{*2}F_{u^*u^*} + 2uu^* F_{uu^*}) = 0,$$

де $F_{uu} = \partial^2F/\partial u^2$, $F_{u^*u^*} = \partial^2F/\partial u^{*2}$, $F_{uu^*} = \partial^2F/\partial u\partial u^*$. Всі інші теореми про умовну симетрію доводяться по наведеній схемі.

6. Неліївська редукція рівняння (14). Будемо шукати розв'язки чотиривимірного рівняння (14) з нелінійністю (16) у вигляді [6]

$$u(x) = u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f_1(x)\varphi_1(\omega)\exp\{if_2(x)\varphi_2(\omega)\}. \tag{29}$$

Підставивши (29) у рівняння (14), (16), одержимо

$$f_{1_0}\varphi_1 + f_1\varphi_{1_\omega}\omega_0 + 2\lambda f_{1_a} f_{2_a}\varphi_1\varphi_2 + \lambda f_1 f_2\,\omega_a\omega_a(2\varphi_{1_\omega}\varphi_{2_\omega} + \varphi_1\varphi_{2_{\omega\omega}}) + 2\lambda f_{1_a} f_2\varphi_1\varphi_{2_\omega}\omega_a +$$
$$+\ 2\lambda f_1 f_{2_a}\varphi_{1_\omega}\varphi_2\omega_a + \lambda f_1\Delta f_2\varphi_1\varphi_2 + \lambda f_1 f_2\varphi_1\varphi_{2_\omega}\omega_{aa} + 2\lambda f_1 f_{2_a}\varphi_1\varphi_{2_\omega}\omega_a = \mathrm{Im}F;$$
$$\lambda\Delta f_1\varphi_1 + \lambda f_1\varphi_{1_\omega}\omega_{aa} + \lambda f_1\,\varphi_{1_{\omega\omega}}\omega_a\omega_a + 2\lambda f_{1_\omega}\omega_a - f_1 f_{2_0}\varphi_1\varphi_2 - f_1 f_2\varphi_1\varphi_{2_\omega}\omega_0 -$$
$$-\ \lambda f_1 f_{2_a} f_{2_a}\varphi_1\varphi_2^2 - \lambda f_1\, f_2^2\varphi_{2_\omega}^2\,\omega_a\omega_a - 2\lambda f_1 f_2 f_{2_a}\varphi_1\varphi_2\varphi_{2_\omega}\omega_a = \mathrm{Re}F(f_1\varphi_1), \tag{30}$$

де

$$f_{j_\mu} = \partial f_j/\partial x_\mu,\ \ \varphi_{j_\omega} = \partial\varphi_j/\partial\omega,\ \ \omega_\mu = \partial\omega/\partial x_\mu,\ \ \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3),\ \ \mu = \overline{0, 3},\ \ j = 1, 2.$$

Дійсні функції $f_1(\boldsymbol{x})$, $f_2(\boldsymbol{x})$ повинні бути так визначені, щоб з (30) випливала система рівнянь для функцій $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, в яку входять тільки змінні $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тому функції $f_1, f_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ повинні задовольняти деяку систему рівнянь, яку будемо називати *умовами редукції*. Більш детально про метод редукції див. [9]. Отже, проблема редукції чотиривимірного рівняння (14), (16) зводиться до розв'язання складної системи нелінійних рівнянь (умов редукції). Так, рівняння (14), (16) редукується до системи ЗДР

$$\theta_1\varphi_1 + \theta_2\dot\varphi_1 + \lambda\theta_3\varphi_1\varphi_2 + \lambda\theta_4(2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + \varphi_1\ddot\varphi_2) +$$
$$+\ \lambda\theta_5\varphi_1\dot\varphi_2 + 2\lambda\theta_6(\dot\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\dot\varphi_2) = 0;$$
$$\theta_7\varphi_1 + \theta_8\dot\varphi_1 + \theta_9\ddot\varphi_1 = \alpha_2\varphi_1^{(r-2)/r};$$
$$\theta_{10}\varphi_2 + \theta_{11}\dot\varphi_2 + \lambda\theta_{12}\varphi_2^2 + \lambda\theta_{13}\dot\varphi_2^2 + 2\lambda\theta_{14}\varphi_2\dot\varphi_2 = \alpha_1\varphi_1^{2/r},$$
$$\dot\varphi_j = \partial\varphi_j/\partial\omega,\quad \ddot\varphi_j = \partial^2\varphi_j/\partial\omega^2,\quad j = 1, 2,$$

якщо фукнції $\theta_1, \ldots, \theta_{14}$ задовольняють такі умови редукції:

$$f_{1_0} = h(\boldsymbol{x})\theta_1(\omega);$$
$$\Delta\omega + 2f_1^{-1}f_{1_a}\omega_a = \theta_9(\omega)f_1^{-2/r};$$
$$f_{1_\omega} = h(\boldsymbol{x})\theta_2(\omega);$$
$$f_2 = \theta_{10}(\omega)f_1^{2/r};$$
$$2f_{1_a}f_{2_a} + f_1\Delta f_2 = h(\boldsymbol{x})\theta_3(\omega);$$
$$f_2\omega_0 = \theta_{11}(\omega)f_1^{2/r};$$
$$f_1 f_2\,\omega_a\omega_a = h(\boldsymbol{x})\theta_4(\omega);$$
$$f_{2_a}f_{2_a} = \theta_{12}(\omega)f_1^{2/r}; \tag{31}$$
$$f_{1_a}f_2\,\omega_a = h(\boldsymbol{x})\theta_5(\omega);$$
$$f_{2_a}\,\omega_a\omega_a = \theta_{13}(\omega)f_1^{2/r};$$
$$f_1 f_{2_a}\omega_a = h(\boldsymbol{x})\theta_6(\omega);$$
$$f_2 f_{2_a}\omega_a = \theta_{14}(\omega)f_1^{2/r};$$
$$\Delta f_1 = \theta_7(\omega)f_1^{(r-2)/r};$$
$$\omega_a\omega_a = \theta_8(\omega)f_1^{(r-2)/r};$$

де $h(\boldsymbol{x})$ — довільна функція від $\boldsymbol{x}$, функції $\theta_1, \ldots, \theta_{14}$ залежать від $\omega = \omega(\boldsymbol{x})$.

Побудувати загальний розв'язок умов редукції (31), напевно, неможливо, але знайти частинні розв'язки не так важко. Далі наведемо деякі частинні розв'язки умов редукції (31) і відповідні редуковані системи ЗДР для функцій $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$.

1. Функції $\quad = x_1^{-1/2}$, $f_2 = x_1^2$, $\omega = x_0$ задовольняють систему (31). Редукована система ЗДР має вигляд

$$\dot{\varphi}_2 + 4\lambda\varphi_2^2 + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{3\lambda} = 0;$$
$$\varphi_1 = \left(\frac{3\lambda}{4\alpha_2}\right)^{1/4}, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \lambda\alpha_2 > 0. \tag{32}$$

Загальний розв'язок рівняння (32) задається виразом

$$\varphi_2 = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\sqrt{3}\lambda} \operatorname{tg}\left(c - \dfrac{4\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\sqrt{3}}\,\omega\right) & \text{при} \quad \alpha_1\alpha_2 > 0; \\ \dfrac{2}{\lambda}\, \dfrac{\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}}{\sqrt{3}\left(1 - c\exp\left\{-4\sqrt{3}^{\,-1}\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}\,\omega\right\}\right)} - \sqrt{-\alpha_1\alpha_2} & \text{при} \quad \alpha_1\alpha_2 < 0; \\ \dfrac{1}{4\lambda\omega + c} \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Таким чином, формули (29), (32), (33) визначають однопараметричну сім'ю розв'язків нелінійного рівняння Шредінгера (14), (16). Використовуючи симетрію $AG(1, n)$ рівняння (14), за цим розв'язком можна побудувати [1] багатопараметричну сім'ю розв'язків рівняння (14), (16).

2. Функції $f_1 = x_1$, $f_2 = x_1^2$, $\omega = x_0$, $r = 1$, $\alpha_2 = 0$ задовольняють систему (31). Редукована система ЗДР для φ_1 і φ_2 має вигляд

$$\dot{\varphi}_1 + 6\lambda\varphi_1\varphi_2 = 0;$$
$$\dot{\varphi}_2 + 4\lambda\varphi_2^2 + \alpha_1\varphi_1^2 = 0. \tag{34}$$

Останні еквівалентні системі

$$\varphi_2 = -\frac{1}{6\lambda}\dot{t}, \quad t = \ln\varphi_1(\omega);$$
$$\ddot{t} - \frac{2}{3}\dot{t}^2 - 6\lambda\alpha_1\exp(2t) = 0. \tag{35}$$

В (35) зробимо заміну

$$\dot{t}^2 = y(t). \tag{36}$$

При цьому система редукованих рівнянь (34) набуває вигляду

$$\varphi_2 = -\frac{1}{6\lambda}\sqrt{y};$$
$$\dot{y} - \frac{4}{3}y - 12\lambda\alpha_1\exp(2t) = 0,$$

звідки маємо

$$\varphi_2 = -\frac{1}{6\lambda}\sqrt{y}; \tag{37a}$$

$$y = 18\lambda\alpha_1\exp(2t) + c\exp\left(\frac{4}{3}t\right), \quad c = \text{const}. \tag{37b}$$

З системи (37) випливає

$$\varphi_2 = -\frac{\exp\left(\frac{2}{3}t\right)}{6\lambda}\sqrt{c + 18\lambda\alpha_1\exp\left(\frac{2}{3}t\right)};$$

$$t = \frac{3}{2}\ln\left(\left(\sqrt{2\lambda\alpha_1}\,\omega + c_1\right)^2 - \frac{c}{18\lambda\alpha_1}\right), \quad \alpha_1 \neq 0, \quad c_1 = \text{const}.$$

Остаточно маємо такі рівняння:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{1}{6\lambda}\varphi_1^{2/3}\sqrt{c + 18\lambda\alpha_1\varphi_1^{2/3}}; \\ \varphi_1 &= \left(\left(\sqrt{2\lambda\alpha_1}\,\omega + c_1\right)^2 - \frac{c}{18\lambda\alpha_1}\right)^{3/2}, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \end{aligned} \tag{38}$$

Таким чином, при підстановці φ_1, φ_2 з (38) в (29) одержуємо точний розв'язок нелінійного рівняння (14), (16).

3. При $f_1 = (x^2)^{r/2}$, $f_2 = x^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\omega = x_0$ система редукованих рівнянь набуває вигляду

$$\dot\varphi_1 + 10\lambda\varphi_1\varphi_2 = 0;$$

$$\dot\varphi_2 + 4\lambda\varphi_2^2 + \alpha_1\varphi_1^2 = 0,$$

якщо $\alpha_2 = 0$, $r = 1$.

Якщо $\alpha_2 \neq 0$, $r = -3/2$, то анзац (29) редукує (14), (16) до ЗДР

$$\dot\varphi_2 + 4\lambda\varphi_2^2 + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{15\lambda} = 0, \quad \varphi_1 = \left(\frac{15\lambda}{4\alpha_2}\right)^{3/4}.$$

4. Функції $f_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{r/2}$, $f_2 = x_1^2 + x_2^2$, $\omega = \sqrt{2}\,\text{arctg}\,(x_2/x_1) - x_0$ задовольняють систему (31). Система редукованих рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} 2\lambda\varphi_1\ddot\varphi_2 + 4\lambda\dot\varphi_1\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1 + 4\lambda(r+1)\varphi_1\varphi_2 &= 0; \\ 2\lambda\dot\varphi_2^2 - \dot\varphi_2 + 4\lambda\varphi_2^2 + \alpha_1\varphi_1^{2/r} &= 0; \\ 2\lambda\ddot\varphi_1 - r^2\lambda\varphi_1 - \alpha_2\varphi_1^{-2/r} &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

5. Функції $f_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{r/2}$, $f_2 = x_1^2 + x_2^2$, $\omega = (x_1^2 + x_2^2)\exp\{2\alpha\,\text{arctg}\,(x_2/x_1) - \sqrt{2}\,x_0\}$, $\alpha \geq 0$, задовольняють систему (31). Редуковані рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} &2(1+\alpha^2)\omega^2\varphi_1\ddot\varphi_2 + 4(1+\alpha^2)\omega^2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + 4\omega\dot\varphi_1\varphi_2 + \\ &+ \left(5 - 2\alpha^2 + 2r - \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}\right)\omega\dot\varphi_2\varphi_1 + (1+2r)\varphi_1\varphi_2 = 0; \\ &4(1+\alpha)\omega^2\dot\varphi_2^2 + 8\omega\dot\varphi_2\varphi_2 - \sqrt{2}\,\omega\dot\varphi_2 + 4\lambda\varphi_2^2 + \alpha_2\varphi_1^{2/r} = 0; \\ &4\alpha^2\omega\ddot\varphi_1\varphi_1 - 4\alpha^2\omega\dot\varphi_1^2 + 4(1+\alpha^2)\omega^2\dot\varphi_1^2 + 4(1+r+\alpha^2)\omega\dot\varphi_1\varphi_1 - \alpha_2\varphi_1^{(r-2)/r} = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Зауважимо, що системи редукованих рівнянь (39), (40) перевизначені. Тому, природньо, виникає питання сумісності систем ЗДР (39), (40). Для системи (39) при $r = -1$ можна вказати такі константи c_1 і c_2, що $\varphi_1 = c_1$, $\varphi_2 = c_2$. Тоді анзац (29) задаватиме точний розв'язок системи нелінійних рівнянь (14), (16).

Для знаходження розв'язків нелінійного рівняння

$$Su = i\alpha_1|u|^{-r^{-1}} + \alpha_2|u|^{-2r^{-1}} \tag{41}$$

(частковий випадок рівняння (14), (20)) скористаємось анзацом [10]

$$u = f_1(x)\varphi_1(\omega)\exp\{i(f_2(x)\varphi_2(\omega) + g(x))\}. \tag{42}$$

Вкажемо деякі набори функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x)$, $\omega(x)$, які задовольнятимуть умови редукції рівняння (41) та відповідні редуковані рівняння.

6. Набір функцій $f_1 = x_0^r$, $f_2 = x_0^{-1}$, $g = x_3^2/4\lambda x_0$, $\omega = x_2$ задовольняє умови редукції рівняння (41). Відповідна системя редукованих рівнянь матиме вигляд

$$\begin{aligned} \lambda\varphi_1\ddot{\varphi}_2 + (r + 1/2)\varphi_1 + 2\lambda\varphi_1\dot{\varphi}_2 &= \alpha_1\varphi_1^{(r-1)/r}; \\ \lambda\dot{\varphi}_2^2 - \varphi_2 + \alpha_2\varphi_1^{-2/r} &= 0; \\ \ddot{\varphi}_1 &= 0. \end{aligned} \tag{43}$$

При підстановці частинного розв'язку системи (43)

$$\varphi_1 = \left(\frac{r+1}{\alpha_1}\right)^{-r}, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \varphi_2 = \left(\frac{\omega + c}{4\lambda}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{r+1}{\alpha_1}\right)^2$$

в анзац (42) одержуємо однопараметричну сім'ю розв'язків рівняння (41).

7. При $f_1 = x_0^r$, $f_2 = x_0^{-1}$, $g = x_3^2/4\lambda x_0$, $\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ анзац (42) редукує рівняння (41) до системи ЗДР

$$\begin{aligned} \lambda\varphi_1\ddot{\varphi}_2 + \lambda\omega^{-1}\varphi_1\dot{\varphi}_2 + 2\lambda\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - \lambda\varphi_1\dot{\varphi}_2 + r &= \alpha_1\varphi_1^{(r-1)/r}; \\ \lambda\dot{\varphi}_2 - \varphi_2 + \alpha_2\varphi_1^{-2/r} &= 0; \\ \ddot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1 + \omega^{-1}\dot{\varphi}_1 &= 0. \end{aligned}$$

8. При $f_1 = x_0^r$, $f_2 = x_0^{-1}$, $g = (x_1^2 + x_2^2)/4\lambda x_0$, $\omega = x_3$ система редукованих рівнянь буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \lambda\varphi_1\ddot{\varphi}_2 + 2\lambda\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + (r+1)\varphi_1 &= \alpha_1\varphi_1^{(r-1)/r}; \\ \lambda\dot{\varphi}_2^2 - \varphi_2 + \alpha_2\varphi_1^{-2/r} &= 0; \\ \ddot{\varphi}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Для редукції рівняння (14) з нелінійністю, що задовольняє умову $F = -F^*$, скористаємось анзацом

$$u = \varphi_1(\omega)\exp\{i(f(x)\varphi_2(\omega) + g(x))\}. \tag{44}$$

Якщо виписати відповідні умови редукції, то функції

$$f = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0^2}, \quad g = 0, \quad \omega = \ln\ln(uu^{*-1})^{1/2i} - \ln(x_0(x_1^2 + x_2^2))$$

задовольнятимуть ці умови. Система ЗДР матиме вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_2(1 - 4\lambda\varphi_2) &= \dot{\varphi}_2(1 - 4\lambda\varphi_2); \\ 2\varphi_2(2\varphi_1 - \dot{\varphi}_1) &= F(\varphi_1)\varphi_1. \end{aligned} \tag{45}$$

Для рівняння Шредінгера з логарифмічною нелінійністю

$$F(uu^*) = ib_1\ln(uu^*), \quad b_1 \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

частинний розв'язок системи рівнянь (45)

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{4\lambda}, \quad \varphi_1 = \exp\left\{\frac{1 - c\exp(-2\lambda b\omega)}{\lambda b}\right\}, \quad b_1 \neq 0, \quad c = \text{const},$$

при підстановці в анзац (44) задаватиме точний розв'язок (14), (46).

9. Анзац (44), де $f_2 = x_0^{-1}$, $g = 0$, $\omega = x_3$, редукує рівняння (14) з дійсною нелінійністю $(F = F^*)$ до ЗДР

$$\begin{aligned} \varphi_1\ddot{\varphi}_2 + 2\varphi_1\varphi_2 &= 0; \\ \lambda\dot{\varphi}_2^2 - \varphi_2 &= 0; \\ \lambda\ddot{\varphi}_1 &= F(\varphi_1)\varphi_1. \end{aligned} \tag{47}$$

З (47) випливає, що $\varphi_1 = c_1(\omega + c_2)^{-1/2}$, $\varphi_2 = ((\omega + c_2)/4\lambda)^2$ при $F = (3/4)\lambda|u|^8$.

10. Анзац (44), де $f_2 = x_0^{-1}$, $g = 0$, $\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, редукує рівняння (14) з дійсною нелінійністю до ЗДР

$$\begin{aligned} \omega\varphi_1\ddot{\varphi}_2 + 2\omega^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_1\dot{\varphi}_2 &= 0; \\ \lambda\dot{\varphi}_2^2 - \varphi_2 &= 0; \\ \lambda\ddot{\varphi}_1 - \omega^{-1}\dot{\varphi}_1 &= F(\varphi_1)\varphi_1. \end{aligned}$$

7. Анзац для фазового рівняння Шредінгера. Розв'язки рівняння (22) будемо шукати у вигляді (29). Для знаходження явного вигляду функцій $f_1(\boldsymbol{x})$, $f_2(\boldsymbol{x})$, $\omega(\boldsymbol{x})$ скористаємось тим, що фазове рівняння Шредінгера умовно інваріантне відносно алгебри A_{15} (див. теорему 7). Наведемо деякі приклади неліївської редукції рівняння (22) до системи ЗДР.

1) По підалгебрі корозмірності 1 $\langle Q^{(2)} + kI, J_{ab}\rangle$ можна побудувати анзац (29), де

$$f_1 = (\boldsymbol{x}^2)^{k/2}, \; f_2 = \exp\{2\beta x_0\}\boldsymbol{x}^2, \; \omega = \exp\{2\beta x_0\}, \tag{48}$$

який редукує фазове рівняння Шредінгера (22) до системи ЗДР

$$\begin{aligned} \beta\varphi_1' + \lambda(2k+n)\varphi_1\varphi_2 &= 0; \\ \beta\varphi_2' + 2\lambda\varphi_2^2 = 0, \; (k^2 + kn - 2k)(\boldsymbol{x}^2)^{-1} &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Очевидно, ця система сумісна тільки тоді, коли $k = 0$, та $k + n - 2 = 0$. Загальний розв'язок системи редукованих рівнянь (49) має вигляд $\varphi_1 = c_2(2\lambda\omega + c_1)^{-(2k+n)\beta/2}$, $\varphi_2 = \frac{\beta}{2\lambda\omega + c_1}$, $\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}$. Підстановка φ_1, φ_2 в анзац (29), (48) дає такий розв'язок нелінійного рівняння (22):

$$u = (\boldsymbol{x}^2)^{k/2} c_2(c_1 + 2\lambda\exp\{2\beta x_0\})^{-(2k+n)\beta/2}\exp\left\{i\,\boldsymbol{x}^2\frac{\beta\exp\{2\beta x_0\}}{2\lambda\exp\{2\beta x_0\} + c_1}\right\},$$

де k задовольняє $k(k + n - 2) = 0$, n — число просторових змінних.

2) Анзац (29), де

$$f_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{k/2}, \; f_2 = (x_1^2 + x_2^2)\exp\{2\beta x_0\}, \; \omega = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} - \exp\{2\beta x_0\}, \tag{50}$$

редукує рівняння (22) до системи ЗДР

$$\lambda\varphi_2''\varphi_1 + 2\lambda\varphi_1'\varphi_2' - \beta\varphi_1' + 2\lambda\varphi_1\varphi_2(1 + k) = 0; \tag{51а}$$

$$\lambda\varphi_2' + 2\lambda\varphi_2^2 - \beta\varphi_2' = 0; \tag{51в}$$

$$2\varphi_1'' + k^2\varphi_1 = 0. \tag{51c}$$

З рівняння (51с) при $k=0$ одержуємо $\varphi_1 = c_1\omega + c_2$, $\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}$. Загальний розв'язок рівняння (51в) має вигляд $\varphi_2 = \frac{\lambda-\beta}{2\lambda\omega + c_3}$, $c_3 \in \mathbb{R}$. Підстановка цих значень функцій φ_1 і φ_2 в рівняння (51а) приводить до таких умов: 1) $c_2 = c_3 = 0$, $\lambda = 2\beta$; 2) $c_3 = 2c_2/c_1$, $\lambda = 2\beta = 1$.

Таким чином, загальний розв'язок перевизначеної системи рівнянь (51а) — (51с) при $k=0$ приймає такі значення:

1. $\varphi_1 = c_1\omega$, $\varphi_2 = (4\omega)^{-1}$ при $\lambda = 2\beta$;

2. $\varphi_1 = c_1\omega + c_2$, $\varphi_2 = \dfrac{1}{4\omega + 4c_2/c_1}$ при $\lambda = 2\beta = 1$, $c_1 \neq 0$.

Підстановка цих значень $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$ в анзац (29), (50) задаватиме точний розв'язок (22).

Отже, виходячи з умовної інваріантності фазового рівняння Шредінгера відносно алгебри A_{15}, можна проводити неліївську редукцію і знаходити точні нетривіальні розв'язки цього нелінійного рівняння.

***Зауваження* 4**. Симетрійним аналогом фазового рівняння Шредінгера (22) для випадку, коли функція u дійсна, є таке нелінійне рівняння теплопровідності:

$$u_0 + \lambda\Delta u = \beta u \ln u, \ \{\lambda, \beta\} \subset \mathbb{R}.$$

В роботі [11] вказано додаткову умову, при якій це рівняння умовно інваріантне відносно двох різних представлень розширеної алгебри Галілея $AG_1(1, n)$. Зауважимо, що вдається знайти загальний розв'язок одержаної перевизначеної системи рівнянь. Він має вигляд

$$u = \exp\{(\alpha_a x_a - \lambda\beta^{-1}\alpha^2 \exp\{\beta x_0\} + \alpha_0)\} \exp\{\beta x_0\}, \ \alpha^2 = \alpha_a\alpha_a, \ a = \overline{1, n}, \ \alpha_\mu \in \mathbb{R}.$$

(В цитованій роботі вказано лише частковий розв'язок даної системи.)

8. Розділення змінних для нелінійного рівняння (11). Розв'язки Галілей-інваріантних рівнянь типу (14) будемо шукати у вигляді

$$u = f(x_0, \boldsymbol{x})\varphi_1(\omega^1)\varphi_2(\omega^2), \ \ \omega^k = \omega^k(x_0, \boldsymbol{x}), \ \ k = 1, 2. \tag{52}$$

Опишемо всі функції $F(uu^*)$, f, ω^1, ω^2 такі, щоб анзац (52) зводив рівняння (14) до системи рівнянь

$$\Phi^k(\omega^k, \varphi_k, \varphi_k', \varphi_k'') = 0, \ \ k = 1, 2, \tag{53}$$

де φ_k — нові комплекснозначні функції, кожна з яких залежить від однієї змінної ω^k, $\varphi_k' = \partial\varphi_k/\partial\omega^k$, $\varphi_k'' = \partial^2\varphi_k/\partial(\omega^k)^2$.
Підставляючи (52) в (14), одержуємо

$$\left\{i\frac{f_0}{f} + \lambda\frac{\Delta f}{f}\right\} + \frac{\varphi_k'}{\varphi_k}\left\{i\omega_0^k + 2\lambda\frac{f_a}{f}\omega_a^k + \lambda\Delta\omega^k\right\} + 2\lambda\frac{\varphi_1'\varphi_2'}{\varphi_1\varphi_2}\omega_a^1\omega_a^2 +$$

$$+ \lambda\frac{\varphi_k''}{\varphi_k}\omega_a^k\omega_a^k = F(ff^*\varphi_1\varphi_1^*\varphi_2\varphi_2^*)$$

(тут по індексах k, що повторюються, проводиться сумування). З останнього рівняння випливає наступна теорема.

Теорема 10. *Для того щоб анзац* (52) *зводив рівняння* (14) *до системи рівнянь* (53), *необхідно, щоб функція* $F(uu^*)$ *задовольняла* (5), *а також виконувалися умови*:

$$if_0 + \lambda\Delta f - \lambda_3 f \ln(ff^*) = f(R^1(\omega^1) + R^2(\omega^2));$$

$$i\omega_0^k + 2\lambda \frac{f_a}{f}\omega_a^k + \lambda\Delta\omega^k = G^k(\omega^k); \tag{54}$$

$$\omega_a^1\omega_a^2 = 0; \;\; \lambda\omega_a^k\omega_a^k = H^k(\omega^k).$$

При виконанні умов теореми 10 рівняння (14) розщеплюється на таких два рівняння:

$$R^k(\omega^k)\varphi_k + G^k(\omega^k)\varphi_k' + H^k(\omega^k)\varphi_k'' = \lambda_3\varphi_k(\varphi_k\varphi_k^*),$$

де індекс k приймає значення $k = 1, 2$.

Розглянемо випадок, коли

$$n = 3, \;\; f = f(x_0, x_3), \;\; \omega^k = \omega^k(x_0, x_k) \tag{55}$$

і функція f задовольняє рівняння Шредінгера з логарифмічною нелінійністю (11).

***Наслідок 9**. Анзац* (52), (55) *розщеплює рівняння* (11) *до системи рівнянь*

$$G^k(\omega^k)\varphi_k' + H^k(\omega^k)\varphi_k'' = \lambda_3\varphi_k(\varphi_k\varphi_k^*), \tag{56}$$

де ω^k *задовольняють систему*

$$i\,\omega_0^k + \lambda\Delta\omega^k = G^k(\omega^k);$$

$$\lambda\omega_k^k\omega_k^k = H^k(\omega^k), \;\; k = 1, 2.$$

Для часткового випадку $\omega^k = x_k$ *система* (56) *зводиться до рівнянь* $\lambda\varphi_k'' = \lambda_3\varphi_k(\varphi_k\varphi_k^*)$, $\lambda_3 = b + i b_1$.

1. *Фущич В. І., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математичкой физики. – Киев : Наук. думка, 1989. – 336 с.
2. *Chopyk V. I.* Symmetry and Reduction of Multi-Dimensional Schrödinger Equation with the Logarithmic Nonlinearity // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. – Inst. Math. Ukr. Acad. Sci., 1992. – P. 54 – 62.
3. *Bialynicki-Birula I., Mycielski J.* Nonlinear Wave Mechanics // Ann. Phys. – 1976. – **100**, №1\2. – P. 62 – 93.
4. *Schuch D, Chung K.-M., Hartman H.* Nonlinear Schrödinger-Type Field Equation for the Description of Dissipative Systems. I. Derivation of the Nonlinear Field Equation and One-Dimensional Examples // J. Math. Phys. – 1983. – **24**, №6 – P. 1652 – 1660.
5. *Brül l L, Lange H.* The Schrödinger-Langevin Equation: Special Solutions and Nonexistence of Solitary Waves // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, №4 – P. 786 – 790.
6. *Фущич В. І., Чопик В. І.*. Умовна інваріантність нелінійного рівняння Шредінгера // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1990, – №4. – С. 30 - 33.
7. *Фущич В. ., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев : Наук. думка, 1991. – 299 с.
8. *The Optical* Group and its Subgroups / G. Burdet, J. Parera, M. Perrin, and P. Winternitz // J. Math. Phys. – 1978. – **19**, №8 – P. 1758 – 1786.
9. *Clarkson P.* Dimensional Reductions and Exact Solutions of a Generelized Nonlinear Schrödinger Equation // Nonlinearity (UK). – 1992. – **5**. – P. 453 – 472.
10. *Чопик В.* Неліївська редукція нелінійного рівняння Шредінгера // Укр. мат. журн. – 1991. – – **43**, №11. – С. 1504 – 1509.
11. *Myronyuk P., Chopyk V.* Conditional Galilei-Invariance of Multi-dimensional Nonlinear Heat Equation // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. – Inst. Math. Ukr. Acad. Sci., 1992. – P. 66 – 68.

Одержано 16. 01. 92