УДК 517. 928. 5

В. П. Яковец, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Используя методы возмущений и диаграммы Ньютона, исследуется структура и строится асимптотика общего решения линейной сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в случае вырождения матрицы при старшей производной.

Використовуючи методи збурень і діаграми Ньютона, досліджується структура і будується асимптотика загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку у випадку виродження матриці при старшій похідній.

1. Введение. Рассмотрим систему уравнений вида

$$\varepsilon^{2h}A(t,\varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon^hB(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+C(t,\varepsilon)x = 0, \tag{1}$$

где $x(t,\varepsilon)\in C^n$, $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0\le 1$, $h\in N$; $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка n, допускающие на отрезке $[0;T]$ равномерные асимптотические разложения по степеням ε:

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{s\ge0}\varepsilon^sA_s(t),\quad B(t,\varepsilon) = \sum_{s\ge0}\varepsilon^sB_s(t),\quad C(t,\varepsilon) = \sum_{s\ge0}\varepsilon^sC_s(t). \tag{2}$$

Известно, что асимптотическое представление решений системы (1) определяется поведением спектра предельного пучка матриц $P_0(\lambda) = C_0(t)+\lambda B_0(t)+$ $+\lambda^2A_0(t)$. Если $\det A_0(t)\ne 0$ $\forall t\in[0;T]$, то этот пучок имеет $2n$ собственных значений (с учетом их кратности). Поэтому, построив для каждого собственного значения столько линейно независимых решений, какова его кратность, получим общее решение системы (1). Однако эта задача оказалась весьма сложной, особенно при наличии кратных собственных значений пучка $P_0(\lambda)$, и к настоящему времени решена только в отдельных частных случаях.

Так, в работе [1] рассмотрен случай, когда матрицы $A_0(t)$ и $C_0(t)$ симметричны, а $B_0(t)=0$. В работе [2] условие симметричности снимается, но предполагается, что все собственные значения пучка матриц $P_0(\lambda)$ простые. Случай, когда $A(t,\varepsilon)$ — единичная матрица, $B(t,\varepsilon)=0$ и пучок $P_0(\lambda)$ имеет кратный корень, которому отвечает один элементарный делитель, рассмотрен в [3]. В работе [4] случай кратного собственного значения исследуется более подробно при условии $B_0(t)=0$. Здесь частично рассмотрен также случай, когда $B_0(t)\ne 0$ и пучок матриц $P_0(\lambda)$ имеет кратный корень, которому отвечает один элементарный делитель. Наконец, в работе [5] частично исследуется случай вырождения матрицы $A_0(t)$.

В перечисленных работах разобраны отдельные частные случаи и указаны некоторые достаточные условия существования решений системы (1) в виде асимптотических разложений по конкретным дробным степеням параметра ε. При этом остаются открытыми вопросы построения асимптотических решений системы (1) в тех случаях, когда указанные достаточные условия не выполняются.

В настоящей работе система (1) исследуется в предположении, что главная матрица $A_0(t)$ при старшей производной вырождена:

$$\det A_0(t) = 0 \quad \forall t \in [0; T]. \tag{3}$$

Рассмотрен также случай вырождения матрицы $A(t, \varepsilon)$. При этом по аналогии с [6, 7] для изучения структуры общего решения системы (1) и построения его асимптотики используются методы возмущений и диаграммы Ньютона, что позволило решить проблему выбора асимптотических последовательностей степеней малого параметра, по которым необходимо вести разложения искомых решений. Полученные результаты легко переносятся и на тот случай, когда $\det A_0(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [0; T]$.

2. Постановка задачи. Будем исследовать систему (1), предполагая, что выполнены следующие условия.

1. Коэффициенты $A_s(t), B_s(t), C_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots$, матричных разложений (2) бесконечно дифференцируемы на отрезке $[0; T]$.

2. Пучок матриц $P_0(\lambda) = C_0(t) + \lambda B_0(t) + \lambda^2 A_0(t)$ регулярный [5] и имеет изолированное собственное значение $\lambda_0(t)$ постоянной кратности $1 \le p < n$, которому отвечает „конечный" элементарный делитель такой же кратности.

3. Кроме указанного „конечного" элементарного делителя, пучок $P_0(\lambda)$ имеет один „бесконечный" элементарный делитель постоянной кратности $q \ge 1$.

Как показано в [5], при данных предположениях собственному значению $\lambda_0(t)$ пучка матриц $P_0(\lambda)$ отвечает жорданова цепочка векторов длины p, состоящая из собственного вектора $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ и $p-1$ присоединенных векторов $\varphi_i(t)$, $i = \overline{2, p}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$P_0(\lambda_0)\varphi(t) = 0; \quad P_0(\lambda_0)\varphi_i(t) + P_0'(\lambda_0)\varphi_{i-1}(t) + A_0(t)\varphi_{i-2}(t) = 0, \quad i = \overline{2, p},$$

где $P_0'(\lambda_0) = B_0(t) + 2\lambda_0(t)A_0(t)$, $\varphi_j = 0$ при $j \le 0$.

Присоединенные векторы $\varphi_i(t)$, $i = \overline{2, p}$, из этих соотношений определяются неднозначно. Эту неоднозначность можно устранить, определив их с помощью рекуррентных формул

$$\varphi_i(t) = -H(t)P_0(\lambda_0)\varphi_{i-1}(t) - H(t)A_0(t)\varphi_{i-2}(t), \quad i = \overline{2, p},$$

где $H(t)$ — обобщенная обратная матрица [4] к матрице $P_0(\lambda_0)$. Отсюда присоединенные векторы выражаются через собственный вектор $\varphi(t)$:

$$\varphi_k(t) = \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^{k+i+1}\, \sigma\left[(HP_0')_{k-1-2i};\, (HA_0)_i\right]\varphi, \quad i = \overline{2, p}, \tag{4}$$

где символом $\sigma[(x)_i; (y)_j]$ обозначается сумма всех возможных произведений (с перестановками) i множителей x и j множителей y, а символ $[a]$ обозначает целую часть числа a. Эта формула легко доказывается методом математической индукции.

Обозначим через $\psi(t)$ элемент нуль-пространства матрицы $P_0^*(\lambda_0)$, сопряженной матрице $P_0(\lambda_0)$. По определению жордановой цепочки при всех $t \in [0; T]$ выполняются соотношения

$$((P_0'(\lambda_0)\varphi_i + A_0\varphi_{i-1}), \psi) = 0, \quad i = \overline{1, p-1}; \quad ((P_0'(\lambda_0)\varphi_p + A_0\varphi_{p-1}), \psi) \neq 0.$$

Тогда без ограничения общности можно считать, что векторы $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ выбраны таким образом, что

$$((P_0'(\lambda_0)\varphi_i + A_0\varphi_{i-1}), \psi) = \delta_{i,p}, \quad i = \overline{1, p},$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. С учетом (4) последнее соотношение записывается в виде

$$\sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^{k+i} \left(\tilde{\sigma}\left[(HP_0')_{k-2i}\,;\,(HA_0)_i\right]\varphi, \psi \right) = \delta_{k,p}, \quad k = \overline{1, p}, \tag{5}$$

где

$$H\,\tilde{\sigma}\left[(HP_0')_{k-2i}\,;\,(HA_0)_i\right] = \sigma\left[(HP_0')_{k-2i}\,;\,(HA_0)_i\right].$$

Согласно [5] „бесконечному" элементарному делителю пучка $P_0(\lambda)$ отвечает жорданова цепочка векторов пучка матриц $Q_0(\omega) = A_0(t) + \omega B_0(t) + \omega^2 C_0(t)$, симметричного пучку $P_0(\lambda)$. Эта цепочка имеет длину q и соответствует нулевому собственному значению пучка $Q_0(\omega)$. Она состоит из собственного вектора $\tilde{\varphi}_1(t) = \tilde{\varphi}(t)$ и $q-1$ присоединенных векторов $\tilde{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{2, q}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$A_0\tilde{\varphi}(t) = 0; \quad A_0\tilde{\varphi}_i(t) + B_0\tilde{\varphi}_{i-1}(t) + C_0\tilde{\varphi}_{i-2}(t) = 0, \quad i = \overline{2, q}.$$

Отсюда присоединенные векторы можно определить по формуле, аналогичной (4):

$$\tilde{\varphi}_k(t) = \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^{k+1+i}\,\sigma\left[(GB_0)_{k-1-2i}\,;\,(GC_0)_i\right]\tilde{\varphi}, \quad k = \overline{2, q},$$

где $G(t)$ — обобщенная обратная матрица к матрице $A_0(t)$.

Пусть $\tilde{\psi}(t)$ — элемент нуль-пространства $A_0^*(t)$. Аналогично (5) векторы $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ определим так, чтобы при всех $t \in [0; T]$ выполнялось соотношение

$$\sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^{k+i} \left(\tilde{\sigma}\left[(GB_0)_{k-2i}\,;\,(GC_0)_i\right]\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \right) = \delta_{k,q}, \quad k = \overline{1, q}. \tag{6}$$

Заметим, что из бесконечной дифференцируемости матриц $A_0(t), B_0(t)$, $C_0(t)$ следует бесконечная дифференцируемость на данном отрезке $[0; T]$ собственного значения $\lambda_0(t)$, векторов $\varphi(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$, $\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ и обобщенных обратных матриц $H(t)$, $G(t)$ [5].

3. Вывод уравнений разветвления. Как показано в работе [8], где рассматривается система уравнений первого порядка, в случае вырождения предельной матрицы при старшей производной решения системы делятся на две группы, одна из которых отвечает „конечным" элементарным делителям, а вторая — „бесконечным" элементарным делителям предельного пучка матриц. Аналогичная ситуация имеет место и для систем второго порядка.

Решения, соответствующие „конечному" элементарному делителю квадратичного пучка матриц $P_0(\lambda)$, будем строить в виде

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t (\lambda_0(t) + \lambda(t, \varepsilon))\,dt\right), \tag{7}$$

где $u(t, \varepsilon)$ — n-мерный вектор, а $\lambda(t, \varepsilon)$ — скалярная функция, подлежащие определению. Подставив вектор (7) в систему (1), получим

$$P_0(\lambda_0)u = -F(\lambda, \varepsilon)u, \tag{8}$$

где

$$F(\lambda, \varepsilon) = \lambda^2 A(t, \varepsilon) + \lambda K(t, \varepsilon) + \varepsilon^h \lambda' A(t, \varepsilon) + \Gamma(t, \varepsilon);$$

$$K(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 0} \varepsilon^s K_s(t), \quad \Gamma(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 1} \varepsilon^s \Gamma_s(t); \tag{9}$$

$$K_s(t) = P_s'(\lambda_0) + 2A_{s-h} \frac{d}{dt}, \quad s = 0, 1, \ldots ;$$

$$\Gamma_s(t) = P_s(\lambda_0) + \lambda_0' A_{s-h}(t) + P_{s-h}'(\lambda_0) \frac{d}{dt} + A_{s-2h}(t) \frac{d^2}{dt^2},$$

$$P_s(\lambda_0) = C_s(t) + \lambda_0 B_s(t) + \lambda_0^2 A_s(t), \quad P_s'(\lambda_0) = B_s(t) + 2\lambda_0 A_s(t), \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, задача поиска функции $\lambda(t, \varepsilon)$ и вектора $u(t, \varepsilon)$ сведена к задаче о возмущении собственного значения $\lambda_0(t)$ и соответствующего собственного вектора $\varphi(t)$ квадратичного пучка операторов $P_0(\lambda)$. Как известно [9], решение подобных задач сводится к поиску ветвления собственного значения невозмущенного пучка операторов под воздействием возмущающих операторов. Следуя [6, 9], выведем соответствующее уравнение разветвления.

Уравнение (8) будет разрешимо, если

$$(F(\lambda, \varepsilon) u, \psi) = 0. \tag{10}$$

При выполнении этого условия будем иметь $u = -HFu + c\varphi$, где c — произвольный скалярный множитель. Как будет видно далее, этот множитель не играет какой-либо существенной роли в решении поставленной задачи (он является тем множителем, с точностью до которого определяется решение системы (1)). Поэтому положим для определенности $c = 1$. Тогда $u = -HFu + \varphi$. Легко убедиться, что это уравнение формально удовлетворяется, если вектор u определить в виде разложения

$$u = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (HF)^k \right) \varphi, \tag{11}$$

где E — единичная $(n \times n)$-матрица. Подставив это выражение в (10), получим искомое уравнение разветвления

$$L(\lambda, \varepsilon) = \left(F \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (HF)^k \right) \varphi, \psi \right) = 0. \tag{12}$$

Теперь задача поиска функции $\lambda(t, \varepsilon)$ свелась к нахождению малых решений уравнения (12).

Представим выражение $L(\lambda, \varepsilon)$ в виде формального разложения

$$L(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k, s \geq 0} L_{ks} [\lambda^k] \varepsilon^s, \tag{13}$$

где k — суммарная степень функции λ, содержащейся в записи операторной функции $L_{ks}[\lambda^k]$. Обозначим

$$\tilde{L}(\lambda, \varepsilon) = F \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (HF)^k \right).$$

Тогда

$$H\tilde{L} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(HF)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(\lambda^2 HA + \lambda HK + \varepsilon^h \lambda' HA + H\Gamma)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{s=0}^{k-i-j} (-1)^{k+1}\varepsilon^{hs}\sigma[\,(\lambda^2 HA)_i,\ (\lambda HK)_j,\ (\lambda' HA)_s,\ (H\Gamma)_{k-i-j-s}\,].$$

Выделяя в этом выражении коэффициенты при одинаковых степенях ε (учитывая разложения (2), (9)), получаем

$$H\tilde{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{s=0}^{k-i-j} \sum_{r=k-i-j-s}^{\infty} (-1)^{k+1}\varepsilon^{hs+r} \times$$

$$\times P^r_{i,j,s,k-i-j-s}(\lambda^2 HA,\ \lambda HK,\ \lambda' HA,\ H\Gamma), \tag{14}$$

где символом $P^r_{i,j,s,k-i-j-s}(\lambda^2 HA,\ \lambda HK,\ \lambda' HA,\ H\Gamma)$ обозначается сумма всевозможных произведений i множителей вида $\lambda^2 HA_{m_1}, \ldots, \lambda^2 HA_{m_i}$; j множителей вида $\lambda^2 HK_{n_1}, \ldots, \lambda HK_{n_j}$; s множителей вида $\lambda' HA_{j_1}, \ldots, \lambda' HA_{j_s}$ с целыми неотрицательными индексами и $k-i-j-s$ множителей вида $H\Gamma_{i_1}, \ldots$ $\ldots, H\Gamma_{i_k}$ с натуральными индексами таких, что сумма всех индексов равна r.

Заметим, что выражение $P^r_{i,j,s,k-i-j-s}(\lambda^2 HA,\ \lambda HK,\ \lambda' HA,\ H\Gamma)$ зависит от λ в некотором смысле степенным образом:

$$P^r_{i,j,s,k-i-j-s}(\lambda^2 HA,\ \lambda HK,\ \lambda' HA,\ H\Gamma) =$$

$$= P^r_{i,j,s,k-i-j-s}(HA,\ HK,\ HA,\ H\Gamma)[\lambda^{2i+j+s}],$$

где $2i+j+s$ — суммарная степень λ в записи оператора $P^r_{i,j,s,k-i-j-s}(\lambda^2 HA,$ $\lambda HK,\ \lambda' HA,\ H\Gamma)$. Выражение $[\lambda^{2i+j+s}]$ содержит λ и производные различного порядка от λ, что обусловлено не только наличием множителей $\lambda' HA_i$, но и действием операторов K_i, Γ_i, содержащих дифференцирование.

Положив в (14) $hs + r = s_1$ вместо r, $2i+j+s = k_1$ вместо s, $P^i_{0,0,0,0}(\lambda^2 HA,$ $\lambda HK,\ \lambda' HA,\ H\Gamma) = 0$, $i = 0, 1, \ldots$, и изменив порядок суммирования, получим

$$H\tilde{L} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{[k_1/2]} \sum_{j=k_1-2i-[s/h]}^{k_1-2i} \sum_{k=k_1-i}^{k_1-i+s_1-h(k_1-2i-j)} (-1)^{k+1}\varepsilon^{s_1} \times$$

$$\times P^{s_1-h(k_1-2i-j)}_{i,j,s,k_1-2i-j,k+i-k_1}(HA,\ HK,\ HA,\ H\Gamma)[\lambda^{k_1}]. \tag{15}$$

Тогда

$$L(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{[k/2]} \sum_{j=k-2i-[s/h]}^{k-2i} \sum_{r=0}^{s-h(k-2i-j)} (-1)^{k+i+r+1}\varepsilon^s \times$$

$$\times \left(\tilde{P}^{s-h(k-2i-j)}_{i,j,k-2i-j,r}(HA,\ HK,\ HA,\ H\Gamma)\varphi,\ \psi\right)[\lambda^k],$$

где выражение $\tilde{P}^r_{i,j,s,k}(HA,\ HK,\ HA,\ H\Gamma)$ отличается от $P^r_{i,j,s,k}(HA,\ HK,\ HA,$ $H\Gamma)$ только тем, что в нем первые множители во всех слагаемых не содержат H:

$$H\tilde{P}^r_{i,j,s,k}(HA,\ HK,\ HA,\ H\Gamma) = P^r_{i,j,s,k}(HA,\ HK,\ HA,\ H\Gamma).$$

Отсюда, учитывая (5), получаем следующие формулы для коэффициентов уравнения разветвления (12):

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1}\left(\tilde{P}_j^s(H\Gamma)\varphi, \psi \right), \quad s = 1, 2, \dots ; \tag{16}$$

$$L_{k0} = \delta_{k,p}, \quad k = \overline{0, p}; \tag{17}$$

$$L_{k0} = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^{k+i+1}\left(\tilde{\sigma}\left[(HP_0')_{k-2i}; (HA_0)_i \right]\varphi, \psi \right), \quad k > p ; \tag{18}$$

$$L_{ks}[\lambda^k] = \sum_{i=0}^{[k/2]} \sum_{j=k-2i-[s/h]}^{k-2i} \sum_{r=0}^{s-h(k-2i-j)} (-1)^{k+i+r+1} \times$$

$$\times \left(\tilde{P}_{i,j,k-2i-j,r}^{s-h(k-2i-j)}(\lambda^2 HA, \lambda HK, \lambda' HA, H\Gamma)\varphi, \psi \right), \quad k, s = 1, 2, \dots . \tag{19}$$

Подставив (15) в (11), найдем

$$u(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (HF)^k \varphi = \varphi - H\tilde{L}\varphi =$$

$$= \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{L}_{0s}\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \tilde{L}_{k0}\varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{L}_{ks}[\lambda^k]\varphi, \tag{20}$$

где

$$\tilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j P_j^s(H\Gamma), \quad s = 1, 2, \dots ; \tag{21}$$

$$\tilde{L}_{k0} = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^{k+i} \sigma\left[(HP_0')_{k-2i}; (HA_0)_i \right], \quad k = 1, 2, \dots ; \tag{22}$$

$$\tilde{L}_{ks}[\lambda^k] = \sum_{i=0}^{[k/2]} \sum_{j=k-2i-[s/h]}^{k-2i} \sum_{r=0}^{s-h(k-2i-j)} (-1)^{k+i+r} \times$$

$$\times\ P_{i,j,k-2i-j,r}^{s-h(k-2i-j)}(\lambda^2 HA, \lambda HK, \lambda' HA, H\Gamma), \quad k, s = 1, 2, \dots . \tag{23}$$

В результате получим следующую теорему.

Теорема 1. *Скалярная функция* $\lambda(t, \varepsilon)$ *является решением уравнения*

$$\lambda^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda^k L_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{k=1}^{\infty} L_{ks}[\lambda^k] = 0, \tag{24}$$

где операторные функции $L_{ks}[\lambda^k]$ *определяются по формулам* (16), (18), (19), *а соответствующая вектор-функция* $u(t, \varepsilon)$ *представляется в виде разложения* (20), *коэффициенты которого определяются по формулам* (21) – (23).

Решения, соответствующие „бесконечному" элементарному делителю, построим в виде

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \frac{dt}{\xi(t, \varepsilon)} \right). \tag{25}$$

Подставив (25) в систему (1), получим

$$A_0(t)v = -\Phi(\xi, \varepsilon)v,$$

где

$$\Phi(\xi, \varepsilon) = \xi^2 R(t, \varepsilon) + \xi S(t, \varepsilon) - \varepsilon^h \xi' A(t, \varepsilon) + \tilde{A}(t, \varepsilon);$$

$$R(t, \varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k R_k(t), \quad S(t, \varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k S_k(t), \quad \tilde{A}(t, \varepsilon) = \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \tilde{A}_k(t);$$

$$R_k(t) = C_k(t) + B_{k-h}(t)\frac{d}{dt} + A_{k-2h}(t)\frac{d^2}{dt^2}, \quad k = 0, 1, \dots;$$

$$S_k(t) = B_k(t) + 2A_{k-h}(t)\frac{d}{dt}, \quad k = 0, 1, \dots;$$

$$\tilde{A}_k(t) = A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Рассуждая таким же образом, как и выше, получаем следующее уравнение разветвления для определения функции $\xi(t, \varepsilon)$:

$$M(\xi, \varepsilon) = \left(\Phi\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (G\Phi)^k \tilde{\varphi}\right), \tilde{\psi}\right) = 0,$$

а для вектора $v(t, \varepsilon)$ будем иметь

$$v(t, \varepsilon) = \tilde{\varphi} - G\tilde{M}\tilde{\varphi}, \tag{26}$$

где $\tilde{M} = \Phi\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (G\Phi)^k \tilde{\varphi}\right)$.

Представим $M(\xi, \varepsilon)$ в виде разложения

$$M(\xi, \varepsilon) = \sum_{k, s\geq 0} M_{ks}[\xi^k]\varepsilon^s,$$

где k — суммарная степень функции ξ, содержащейся в записи операторной функции $M_{ks}[\xi^k]$. Повторив такие же выкладки, как и при выводе коэффициентов разложения (13), и приняв во внимание (6), получим следующие формулы для коэффициентов M_{ks}:

$$M_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1}\left(\tilde{P}_j^s(G\tilde{A})\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right), \quad s = 1, 2, \dots; \tag{27}$$

$$M_{k0} = \delta_{k, q}, \quad k = \overline{0, q}; \tag{28}$$

$$M_{k0} = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^{k+i+1}\left(\tilde{\sigma}\left[(GB_0)_{k-2i}; (GC_0)_i\right]\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right), \quad k > q; \tag{29}$$

$$M_{ks}[\xi^k] = \sum_{i=0}^{[k/2]} \sum_{j=k-2i-[s/h]}^{k-2i} \sum_{r=0}^{s-h(k-2i-j)} (-1)^{r+k+j} \times$$

$$\times \left(\tilde{P}^{s-h(k-2i-j)}_{i, j, k-2i-j, r}(GR, GS, GA, G\tilde{A})\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right)[\xi^k], \quad k, s = 1, 2, \dots, \tag{30}$$

где

$$\tilde{P}^{s-h(k-2i-j)}_{i, j, k-2i-j, r}(GR, GS, GA, G\tilde{A})[\xi^k] = \tilde{P}^{s-h(k-2i-j)}_{i, j, k-2i-j, r}(\xi^2 GR, \xi GS, \xi' GA, G\tilde{A}).$$

Выражение (26) для вектора $v(t, \varepsilon)$ преобразуется к виду

$$v(t,\varepsilon) = \tilde{\varphi} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{M}_{0s}\tilde{\varphi} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k \tilde{M}_{k0}\tilde{\varphi} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{M}_{ks}[\xi^k]\tilde{\varphi}, \tag{31}$$

где

$$\tilde{M}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j P_j^s(G\tilde{A}), \quad s = 1, 2, \dots; \tag{32}$$

$$M_{k0} = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^{k+i} \sigma\left[(GB_0)_{k-2i}; (GC_0)_i \right], \quad k = 1, 2, \dots; \tag{33}$$

$$M_{ks}[\xi^k] = \sum_{i=0}^{[k/2]} \sum_{j=k-2i-[s/h]}^{k-2i} \sum_{r=0}^{s-h(k-2i-j)} (-1)^{r+k+j+1} \times$$

$$\times P_{i,j,k-2i-j,r}^{s-h(k-2i-j)}(\xi^2 GR, \xi GS, \xi' GA, G\tilde{A}), \quad k, s = 1, 2, \dots . \tag{34}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Скалярная функция* $\xi(t,\varepsilon)$ *является решением уравнения*

$$\xi^q + \sum_{k=q+1}^{\infty} \xi^k M_{k0} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{k=1}^{\infty} M_{ks}[\xi^k] = 0, \tag{35}$$

а соответствующая ей вектор-функция $v(t,\varepsilon)$ *имеет вид* (31), *где операторные функции* $M_{ks}[\xi^k]$, $\tilde{M}_{ks}[\xi^k]$ *находятся по формулам* (27), (29), (30), (32) – – (34).

4. Исследование уравнений разветвления. Следуя [6, 7, 9], для нахождения решений уравнений разветвления (24), (35) используем метод диаграмм Ньютона. Каждому отличному от нуля коэффициенту $L_{ks}[\lambda^k]$ и $M_{ks}[\xi^k]$ соответствующих уравнений разветвления будем ставить в соответствие точку $(k; s)$ на координатной плоскости. При этом будем использовать убывающие участки диаграмм, поскольку нас интересуют только „малые" решения уравнений разветвления.

Анализируя коэффициенты уравнения (24), получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Независимо от вида матриц* $A_s(t)$, $B_s(t)$, $C_s(t)$, $s = 0, 1, \dots$, *уравнение* (24) *имеет* p *„малых" решений* $\lambda(t,\varepsilon)$ *с учетом их кратности. При этом оно имеет не более одного нулевого решения.*

Доказательство. Из соотношения (17) следует, что длина убывающего участка диаграммы Ньютона для уравнения (24) равна p, что и доказывает первое утверждение теоремы.

Второе утверждение следует из того, что независимо от вида матриц $A_s(t)$, $B_s(t)$, $C_s(t)$ на диаграмме всегда присутствует точка $(1, h(p-1))$, поскольку $L_{1,h(p-1)}[\lambda] \neq 0$.

Действительно, согласно (23)

$$L_{1,kh}[\lambda] = \sum_{r=0}^{(k-1)h} (-1)^r \left(\tilde{P}_{1,r}^{(k-1)h}(\lambda' HA; H\Gamma)\varphi, \psi \right) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{kh} (-1)^r \left(\tilde{P}_{1,r}^{kh}(\lambda HK; H\Gamma)\varphi, \psi \right).$$

Выделяя здесь слагаемые, содержащие производную k-го порядка от функции λ (наивысший порядок производной от λ, содержащейся в этом выражении) и принимая во внимание, что

$$\Gamma_s \lambda = \lambda\Gamma_s + \lambda' P'_{s-h}(\lambda_0) + 2\lambda' A_{s-2h}\frac{d}{dt} + \lambda'' A_{s-2h},$$

получаем

$$L_{1,kh}[\lambda] = \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^{k+1+i}\left(\tilde{\sigma}\left[(H\Gamma_{2h})_i;\ (H\Gamma_h)_{k-1-2i}\right]\lambda' HA_0\,\varphi,\ \psi\right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^{k+i}\left(\tilde{\sigma}\left[(H\Gamma_{2h})_i;\ (H\Gamma_h)_{k-2i}\right]\lambda HP_0'(\lambda_0)\varphi,\ \psi\right) + \ldots =$$

$$= \lambda^{(k)} \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^{k+1+i}\left(\tilde{\sigma}\left[(HA_0)_i;\ (HP_0')_{k-1-2i}\right] HA_0\,\varphi,\ \psi\right) +$$

$$+ \lambda^{(k)} \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^{k+i}\left(\tilde{\sigma}\left[(HA_0)_i;\ (HP_0')_{k-2i}\right] HP_0'\varphi,\ \psi\right) + \ldots =$$

$$= \lambda^{(k)} \sum_{i=0}^{[(k+1)/2]} (-1)^{k+i}\left(\tilde{\sigma}\left[(HA_0)_i;\ (HP_0')_{k+1-2i}\right]\varphi,\ \psi\right) + \ldots,$$

где троеточием обозначены те слагаемые, которые не содержат $\lambda^{(k)}$.

Отсюда, учитывая (5), получаем $L_{k,(p-k)h}[\lambda] = \lambda^{(k)} + \ldots$. Следовательно, $L_{1,(p-1)h}[\lambda]$ не может равняться нулю при любых λ. Поэтому уравнение (24) может иметь только одно нулевое решение, и то лишь в том случае, когда $L_{0s} = 0$ при всех $s \geq 1$. Теорема доказана.

Замечание. Аналогично можно показать, что $L_{k,h(p-k)}[\lambda^k] \neq 0$ при $k = \overline{2, p-1}$, откуда следует, что на координатной плоскости всегда присутствуют точки $(k, h(p-k))$, $k = \overline{1, p-1}$. Легко убедиться также, что при $s < h$ коэффициенты $L_{ks}[\lambda^k]$ не содержат производных от λ.

Построение в каждом конкретном случае по коэффициентам $L_{ks}[\lambda^k]$ убывающего участка диаграммы Ньютона позволяет решить задачу выбора степеней малого параметра ε, по которым необходимо вести разложения функции $\lambda(t,\varepsilon)$ в ряд Пюизо

$$\lambda(t,\varepsilon) = \varepsilon^{k_1}\lambda_1(t) + O(\varepsilon^{k_1}). \tag{36}$$

Показатель k_1 будет равен тангенсу угла наклона данного звена ломаной Ньютона к отрицательному направлению оси абсцисс, а возможные значения коэффициента $\lambda_1(t)$ находятся из соответствующего определяющего уравнения [9]. Если $k_1 = m/l$, а функция $\lambda_1(t)$ при всех $t \in [0; T]$ является простым корнем соответствующего определяющего уравнения, то разложение для $\lambda(t,\varepsilon)$ будет иметь вид

$$\lambda(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{(m+k-1)/l}\lambda_k(t),$$

и его коэффициенты можно определять непосредственно из уравнения разветвления (24) методом неопределенных коэффициентов. Согласно (20) аналогичным будет разложение и для вектор-функции $u(t, \varepsilon)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть $p = 1$. Если $L_{0s} = 0$ при всех $s \geq 1$, то уравнение разветвления (24) имеет лишь нулевое решение, которому по формуле (20) соответствует вектор $u(t, \varepsilon) = \varphi(t)$. В этом случае система (1) имеет решение

$$x(t, \varepsilon) = \varphi(t) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_0(t)\, dt \right).$$

Если же $L_{0s} \equiv 0$ при $s \leq m$, а $L_{0m}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0; T]$, то диаграмма Ньютона состоит из отрезка, соединяющего точки $(0; m)$ и $(1; 0)$, тангенс угла наклона которого к отрицательному направлению оси абсцисс равен m. При этом определяющее уравнение $\lambda_1 + L_{0s} = 0$ имеет простой корень. Следовательно, в этом случае система (1) имеет решение вида (7), где функция $\lambda(t, \varepsilon)$ и вектор $u(t, \varepsilon)$ представляются в виде разложений

$$\lambda(t, \varepsilon) = \varepsilon^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k(t), \quad u(t, \varepsilon) = \varphi(t) + \varepsilon^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t).$$

Коэффициенты этих разложений можно определить методом неопределенных коэффициентов, на чем остановимся ниже в более сложном случае.

Пусть $p > 1$ и выполняется условие

$$L_{01}(t) = (P_1(\lambda_0)\varphi, \psi) + \delta_{1,h}[(P_1'(\lambda_0)\varphi, \psi) + \lambda_0'(A_0\varphi, \psi)] \neq 0 \quad \forall t \in [0; T]. \tag{37}$$

Тогда диаграмма Ньютона представляет собой отрезок, соединяющий точки $(0; 1)$ и $(p; 0)$, тангенс угла наклона которого к отрицательному направлению оси абсцисс равен $1/p$. Следовательно, в этом случае функция $\lambda(t, \varepsilon)$ будет представляться в виде разложения

$$\lambda(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k(t), \quad \mu = \varepsilon^{1/p}. \tag{38}$$

Для определения коэффициентов этого разложения подставим ряд (38) в уравнение (24). Собрав члены при одинаковых степенях μ и перегруппировав слагаемые, будем иметь

$$\sum_{j=p}^{\infty} \mu^j \alpha(p, j) + \sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_{k=p+1}^{j} \mu^j \alpha(k, j) L_{k0} + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^{jp} L_{0j} +$$
$$+ \sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{[(j-1)/p]} \sum_{k=1}^{j-sp} \mu^j L_{ks}[\alpha(k, j-ps)] = 0$$

где символом $\alpha(i; j)$ обозначена сумма всех возможных произведений i множителей $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \ldots, \lambda_{k_i}$, сумма индексов которых равна j, а оператор L_{ks} действует на каждое слагаемое выражения $\alpha(k, j-ps)$ по такому же правилу, как и на λ^k.

Приравняв здесь коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$\lambda_1^p + L_{01} = 0;$$

$$\alpha(p,j)+\sum_{j=p+1}^{j}\alpha(k,j)L_{k0}+\sum_{s=1}^{[(j-1)/p]}\sum_{k=1}^{j-sp}L_{ks}[\alpha(k,j-ps)]+L_{0,j/p}=0$$

($L_{0,j/p}=0$, если число j не делится на p), отсюда находим следующие рекуррентные формулы для определения функций $\lambda_i(t)$:

$$\lambda_1(t)=\sqrt[p]{|L_{01}|}\exp\left(i\frac{\arg(-L_{01})+2\pi(j-1)}{p}\right),\quad j=\overline{1,p}; \tag{39}$$

$$\lambda_k(t)=-\frac{g_k(t)}{p\lambda_1^{p-1}},\quad k=1,2,\ldots; \tag{40}$$

$$g_k(t)=\tilde{\alpha}(p,p+k-1)+\sum_{i=p+1}^{p+k-1}\alpha(i,p+k-1)L_{i0}+L_{0,(p+k-1)/p}+$$
$$+\sum_{s=1}^{[(p+k-2)/p]}\sum_{r=1}^{p+k-sp-1}L_{rs}[\alpha(r,p+k-1-sp)],\quad k=1,2,\ldots, \tag{41}$$

где $\tilde{\alpha}(p,p+k-1)$ — та часть выражения $\alpha(p,p+k-1)$, которая не содержит λ_k.

Подставив (38) в (20) и сгруппировав слагаемые при одинаковых степенях μ, получим соответствующее разложение для вектора $u(t,\varepsilon)$:

$$u(t,\varepsilon)=\varphi(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k u_k(t), \tag{42}$$

где

$$u_k(t)=\sum_{j=1}^{k}\alpha(j,k)\tilde{L}_{j0}\varphi+\sum_{s=1}^{[(k-1)/p]}\sum_{j=1}^{k-sp}\tilde{L}_{js}[\alpha(j,k-sp)]\varphi+L_{0,k/p}\varphi, \tag{43}$$
$$k=1,2,\ldots.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $p>1$ *и выполняется условие* (37), *то система уравнений* (1) *имеет* p *частных формальных решений вида* (7), *где функция* $\lambda(t,\varepsilon)$ *и вектор-функция* $u(t,\varepsilon)$ *представляются в виде разложений* (38), (42), *коэффициенты которых находятся с помощью рекуррентных формул* (39) – (41), (43).

Рассмотрим теперь уравнение разветвления (35). Согласно (28) это уравнение имеет q „малых" решений, включая нулевые. Однако нулевые решения уравнения (35) не могут быть использованы, поскольку им не соответствуют решения (25) системы (1). Поэтому количество решений системы (1), соответствующих „бесконечному" элементарному делителю пучка матриц $P_0(\lambda)$, равняется $q-r$, где r — кратность нулевого решения уравнения разветвления (35). В отличие от уравнения (24) анализ коэффициентов уравнения (35) показывает, что на соответствующей ему диаграмме Ньютона не существует других постоянных точек, кроме $(q;0)$, которые присутствовали бы независимо от вида матриц $A_s(t)$, $B_s(t)$, $C_s(t)$, $s=0,1,\ldots$. Следовательно, кратность нулевого корня уравнения (35), в зависимости от свойств коэффициентов системы (1), может изменяться от 0 до q. А значит, соответственным образом изменяется и количество решений второй группы. В следующей теореме содержится более эффективный критерий для определения количества этих решений.

Теорема 5. *Число решений системы* (1), *соответствующих "бесконечному" элементарному делителю кратности q пучка матриц $P_0(\lambda)$, равно $q-r$, где r — длина жордановой цепочки векторов оператора $A(t,\varepsilon)$ относительно операторов $\xi S(t,\varepsilon)-\varepsilon^h\xi' A(t,\varepsilon)$, $\xi^2 R(t,\varepsilon)$, в которых ξ — произвольный скалярный множитель.*

Доказательство. Пусть векторы y_k, $k=\overline{1,r}$, образуют жорданову цепочку, о которой идет речь в теореме. Тогда справедливы соотношения

$$(A_0(t)+\tilde{A}(t,\varepsilon))y_1 = 0;$$

$$(A_0(t)+\tilde{A}(t,\varepsilon))y_k+(\xi S(t,\varepsilon)-\varepsilon^h\xi' A(t,\varepsilon))y_{k-1}+\xi^2 R(t,\varepsilon)y_{k-2} = 0, \quad k=\overline{2,r},$$

откуда находим

$$y_1 = Q\tilde{\varphi}, \quad y_k = -QG(\xi S-\varepsilon^h\xi' A)y_{k-1}-QG\xi^2 R\, y_{k-2}+Q\tilde{\varphi}, \quad k=\overline{2,r},$$

где

$$Q = (E+G\tilde{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(G\tilde{A})^k. \tag{44}$$

Используя рекуррентный характер этих соотношений, получаем

$$y_k = \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]}\sum_{j=0}^{k-1-2i}(-1)^{i+j}Q\sigma\left[(\xi^2 GRQ)_i;(G(\xi S-\varepsilon^h\xi' A)Q)_j\right]\tilde{\varphi}, \quad k=\overline{1,r}.$$

Тогда

$$G\tilde{A}y_k+G(\xi S-\varepsilon^h\xi' A)y_{k-1}+\xi^2 GR\, y_{k-2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]}\sum_{j=0}^{k-1-2i}(-1)^{i+j}G\tilde{A}Q\sigma\left[(\xi^2 GRQ)_i;(G(\xi S-\varepsilon^h\xi' A)Q)_j\right]\tilde{\varphi}+$$

$$+\sum_{i=0}^{[(k-1)/2]}\sum_{j=0}^{k-1-2i}(-1)^{i+j+1}\sigma\left[(\xi^2 GRQ)_i;(G(\xi S-\varepsilon^h\xi' A)Q)_j\right]\tilde{\varphi},$$

где по определению полагаем $\sigma(0;0)=0$. Подставив сюда (44), после несложных преобразований будем иметь

$$G\tilde{A}y_k+G(\xi S-\varepsilon^h\xi' A)y_{k-1}+\xi^2 GR\, y_{k-2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]}\sum_{j=0}^{k-1-2i}\sum_{s=0}^{j}(-1)^{i+s}G\tilde{A}Q\sigma\left[(\xi^2 GRQ)_i;(\xi GSQ)_s;(\varepsilon^h\xi' GAQ)_{j-s}\right]\tilde{\varphi}+$$

$$+\sum_{i=0}^{[(k-1)/2]}\sum_{j=0}^{k-1-2i}\sum_{s=0}^{j}(-1)^{i+s+1}\sigma\left[(\xi^2 GRQ)_i;(\xi GSQ)_s;(\varepsilon^h\xi' GAQ)_{j-s}\right]\tilde{\varphi} =$$

$$= \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]}\sum_{j=0}^{k-1-2i}\sum_{s=0}^{j}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+i+s+1}\sigma\left[(\xi^2 GR)_i;(\xi GS)_s;(\varepsilon^h\xi' GA)_{j-s};\right.$$

$$\left.(G\tilde{A})_r\right]\tilde{\varphi} = \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{[m/2]}\sum_{j=0}^{m-2i}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+i+j+1}\sigma\left[(\xi^2 GR)_i;(\xi GS)_j;(\varepsilon^h\xi' GA)_{m-2i-j};\right.$$

$$(G\tilde{A})_r]\tilde{\varphi} = \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{[m/2]}\sum_{j=m-2i-[s/h]}^{m-2i}\sum_{r=0}^{s-h(m-2i-j)}(-1)^{r+i+j+1}\varepsilon^s \times$$

$$\times P_{i,j,m-2i-j,r}^{s-h(m-2i-j)}(GR, GS, GA, G\tilde{A})[\xi^m]\tilde{\varphi}.$$

Следовательно,

$$((\tilde{A}y_k + (\xi S - \varepsilon^h\xi' A)y_{k-1} + \xi^2 R y_{k-2}), \tilde{\psi}) = \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s M_{ms}[\xi^m].$$

Таким образом, если длина жордановой цепочки оператора $A(t, \varepsilon)$ относительно операторов $\xi S - \varepsilon^h \xi' A$, $\xi^2 R$ равна r, то $M_{ms}[\xi^m] \equiv 0$ при $m < r$ и $M_{rs}[\xi^r] \neq 0$ при некотором s, т. е. уравнение (35) имеет нулевое решение кратности r. Справедливо и обратное утверждение. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Рассмотрим некоторые частные случаи построения решений системы (1), соответствующих „бесконечному" элементарному делителю пучка $P_0(\lambda)$.

Пусть $q = 1$ и $M_{0i}(t) \equiv 0$ при $i < s$, $M_{0s} \neq 0$ $\forall t \in [0; T]$. В этом случае ломаная Ньютона представляет собой отрезок, соединяющий точки $(0; s)$ и $(1; 0)$, тангенс угла наклона которого к отрицательному направлению оси абсцисс равен s. Следовательно, система (1) имеет решение вида (25), где функция $\xi(t, \varepsilon)$ и вектор $v(t, \varepsilon)$ представляются в виде разложений

$$\xi(t, \varepsilon) = \varepsilon^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\xi_k(t), \quad v(t, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(t) + \varepsilon^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k v_k(t).$$

Если же $M_{0i} \equiv 0$ при всех $i \geq 1$, то уравнение разветвления (35) имеет только нулевое решение и, значит, система (1) не имеет решения второй группы. Заметим, что в этом случае матрица $A(t, \varepsilon)$ вырождена при всех $t \in [0; T]$ и $\varepsilon > 0$, поскольку уравнение $A(t, \varepsilon)y_1 = 0$ имеет ненулевое решение.

Пусть $q \geq 1$ и

$$M_{01}(t) = (A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0 \;\; \forall t \in [0; T]. \tag{45}$$

В этом случае ломаная Ньютона состоит из отрезка, соединяющего точки $(0; 1)$ и $(q; 0)$, тангенс угла наклона которого к отрицательному направлению оси абсцисс равен $1/q$. Поэтому система (1) имеет q частных решений вида (25), где функция $\xi(t, \varepsilon)$ и вектор $v(t, \varepsilon)$ представляются разложениями

$$\xi(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu^k\xi_k(t), \quad v(t, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\nu^k v_k(t), \tag{46}$$

в которых $\nu = \varepsilon^{1/q}$.

Для определения коэффициентов этих разложений используем метод неопределенных коэффициентов. Подставляя разложение (46) для функции $\xi(t, \varepsilon)$ в уравнение разветвления (35) и группируя члены с одинаковыми степенями ν, получаем

$$\sum_{j=q}^{\infty}\nu^j\beta(q, j) + \sum_{j=q+1}^{\infty}\sum_{k=q+1}^{j}\nu^j\beta(k, j)M_{k0} + \sum_{j=1}^{\infty}\nu^{jq}M_{0j} +$$

$$+\sum_{j=q+1}^{\infty}\sum_{s=1}^{[(j-1)/q]}\sum_{k=1}^{j-sq}\nu^{j}M_{ks}\left[\beta(k,\,j-sq)\right]=0,$$

где $\beta(k,i)$ — сумма всех возможных произведений k множителей вида ξ_{j_1}, $\xi_{j_2}, \ldots, \xi_{j_k}$, сумма индексов которых равна i, а оператор M_{ks} действует на каждое слагаемое выражения $\beta(k, j-sq)$ по такому же правилу, как и на ξ^k.

Приравняв здесь коэффициенты при одинаковых степенях ν и решив полученные уравнения, найдем следующие рекуррентные формулы для определения функций $\xi_k(t)$:

$$\xi_1(t)=\sqrt[q]{|M_{01}|}\exp\left(i\frac{\arg(-M_{01})+2\pi(j-1)}{q}\right),\quad j=\overline{1,q}; \tag{47}$$

$$\xi_k(t)=-\frac{f_k(t)}{q\xi_1^{q-1}},\quad k=1,2,\ldots; \tag{48}$$

$$f_k(t)=\tilde{\beta}(q,q+k+1)+\sum_{i=q+1}^{q+k-1}\beta(i,q+k-1)M_{i0}+M_{0,(q+k-1)/q}+$$

$$+\sum_{i=1}^{[(q+k-2)/q]}\sum_{j=1}^{q+k-1-iq}M_{ji}\left[\beta(j,q+k-1-iq)\right],\quad k=1,2,\ldots, \tag{49}$$

где $\tilde{\beta}(q,q+k-1)$ — сумма тех слагаемых в составе $\beta(q,\,q+k-1)$, которые не содержит ξ_k.

Подставив полученное разложение для функции $\xi(t,\nu)$ в (31) и сгруппировав слагаемые с одинаковыми степенями ν, будем иметь

$$v(t,\varepsilon)=\tilde{\varphi}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu^{qk}\tilde{M}_{0k}\tilde{\varphi}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\nu^{k}\beta(j,k)\tilde{M}_{j0}\tilde{\varphi}+$$

$$+\sum_{j=q+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{[(k-1)/q]}\sum_{j=1}^{k-iq}\nu^{k}\tilde{M}_{ji}\left[\beta(j,k-iq)\right]\tilde{\varphi},$$

откуда найдем коэффициенты разложения для вектора $v(t,\varepsilon)$:

$$v_k(t)=\tilde{M}_{0,k/q}\tilde{\varphi}+\sum_{j=1}^{k}\beta(j,k)\tilde{M}_{j0}\tilde{\varphi}+\sum_{i=1}^{[(k-1)/q]}\sum_{j=1}^{k-iq}\tilde{M}_{ji}\left[\beta(j,k-iq)\right]\tilde{\varphi}, \tag{50}$$

$$k=1,2,\ldots.$$

В результате получаем такую теорему.

Теорема 6. *Если выполняется условие* (45), *то система* (1) *имеет* q *частных формальных решений вида* (25), *соответствующих „бесконечному" элементарному делителю пучка* $P_0(\lambda)$, *где функция* $\xi(t,\varepsilon)$ *и вектор* $v(t,\varepsilon)$ *представляются разложениями* (46), *коэффициенты которых определяются по формулам* (47)–(49), (50).

5. Некоторые выводы.. Проведенный анализ уравнений разветвления (24), (35) и рассмотренные частные случаи приводят к следующим выводам о структуре общего решения системы (1).

Пусть пучок матриц $P_0(\lambda)$ имеет s собственных значений, каждому из которых соответствует один „конечный“ элементарный делитель кратности p_i ($i = \overline{1, s}$), и других собственных значений не имеет. Пусть, кроме того, этот пучок имеет один „бесконечный“ элементарный делитель кратности q. Тогда $p_1 + \ldots + p_s + q = 2n$. В силу теоремы 3 каждому из собственных значений пучка $P_0(\lambda)$ соответствует p_i частных формальных решений системы (1) вида (7). Следовательно, всего будет строиться $p_1 + \ldots + p_s$ решений первой группы. Согласно теореме 5 решений второй группы, соответствующих „бесконечному" элементарному делителю пучка $P_0(\lambda)$, будет строиться $q - r$, где r — длина жордановой цепочки векторов оператора $A(t, \varepsilon)$ относительно операторов $\xi S(t, \varepsilon) - \varepsilon^h \xi' A(t, \varepsilon)$, $\xi^2 R(t, \varepsilon)$.

Таким образом, при данных предположениях относительно структуры „конечных" и „бесконечных" элементарных делителей пучка $P_0(\lambda)$ будет строиться $2n - r$ частных формальных решений системы (1). Можно показать, что эти решения линейно независимы при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и, следовательно, образуют общее формальное решение системы (1).

Если $\det A_0(t) \neq 0$, пучок $P_0(\lambda)$ не имеет „бесконечных" элементарных делителей и, значит, общее решение будет представлять собой линейную комбинацию $2n$ решений первой группы.

Если же $\det A_0(t) = 0$, но $\det A(t, \varepsilon) \neq 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, то $r = 0$ и, значит, опять будет строиться $2n$ решений. Однако в данном случае среди этих решений будет q решений второй группы.

В заключение отметим, что при определенных условиях все формальные решения системы (1), строящиеся по указанному алгоритму, асимптотически сходятся к некоторым точным решениям данной системы, что доказывается методами работ [4, 8].

1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Нниколенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений – Киев : Наук. думка, 1966. – 252 с.
2. *Шкиль Н. И., Шаманов З.* Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Приближенные методы математического анализа.– Киев : Киев. политехн. ин-т, 1978. – С. 137 – 146.
3. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной дробного ранга // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – №4. – С. 264 – 267.
4. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев : Вища шк., 1989. – 287 с.
5. *Яковец В. П.* Построение асимптотических решений линейных сингулярно возмущенных систем второго порядка с вырождением // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №8. – С. 1102 – 1113.
6. *Жукова Г. С.* Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных линейных систем. – Киев, 1983. – 40 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83. 38).
7. *Жукова Г. С.* Асимптотика решений одного класса линейных систем с вырожденной матрицей при производной. – Киев, 1990. – 24 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90. 36).
8. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев : Вища шк., 1991. – 207 с.
9. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М. : Наука, 1969. – 527 с.

Получено 26. 12. 91