УДК 517.5

**Ж. Е. Мырзанов,** канд. физ.-мат. наук (Нукус. ун-т )

# О КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ, СВЯЗАННЫХ СО СМЕШАННЫМИ ЭРМИТОВЫМИ СПЛАЙНАМИ

На одном классе функций двух переменных рассматривается кубатурная формула, содержащая частичные интегралы. Доказано, что интеграл от смешанного эрмитового сплайна представляет наилучшую кубатурную формулу для данного класса. Установлено совпадение кубатурных формул, точных для четных и нечетных смешанных эрмитовых сплайнов.

На одному класі функцій двох змінних розглядається кубатурна формула, що містить часткові інтеграли. Доведено, що інтеграл від змішаного ермітового сплайну являє собою найкращу кубатурну формулу для даного класу. Встановлено співпадання кубатурних формул, точних для парних і непарних змішаних ермітових сплайнів.

Пусть $C^{r,s}$ — пространство функций $f(x, y)$, имеющих непрерывные частные производные $f^{(k,l)}(x, y)$, $k = \overline{0, r}$, $l = \overline{0, s}$, на квадрате $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

Зафиксируем два разбиения

$$\Delta_M^x:\ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = 1, \tag{1}$$

$$\Delta_N^y:\ 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_N = 1, \tag{2}$$

которыми задается разбиение $\Delta_{M,N}$ квадрата $\Omega$ на ячейки $\Omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times \times [y_{i-1}, y_i]$, $i = \overline{1, M}; j = \overline{1, N}$, и введем обозначения $h_{x,i} = x_i - x_{i-1}$, $h_{y,j} = y_j - y_{j-1}$. Для $f \in C^{m,n}$, $0 \le m \le r$, $0 \le n \le s$, следуя [1, 2], рассмотрим кубатурную формулу с узлами (1), (2), содержащую частичные интегралы по одной из переменных

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=0}^{m} p_{ik} \int_0^1 f^{(k,0)}(x_i, y)\, dy + \sum_{j=0}^{N} \sum_{l=0}^{n} q_{jl} \int_0^1 f^{(0,l)}(x, y_j)\, dx -$$
$$- \sum_{i,j=0}^{M,N} \sum_{k,l=0}^{m,n} p_{ik}\, q_{jl}\, f^{(k,l)}(x_i, y_j) + R(f; P, Q), \tag{3}$$

где $(P, Q)$ — вектор коэффициентов $p_{ik}$, $q_{jl}$.

Для $f(x, y) \in C^{m,n}$ определим функции $S_{2m+\nu,\, x}(f; x, y)$ и $S_{2n+\nu,\, y}(f; x, y)$, $\nu = 0, 1$, такие, что $S_{2m+\nu,\, x}$ при каждом фиксированном $y$ есть эрмитов сплайн степени $2m + \nu$ по $x$ относительно разбиения $\Delta_M^x$, а $S_{2n+\nu,\, y}$ при каждом фиксированном $x$ есть эрмитов сплайн степени $2n + \nu$ по $y$ относительно разбиения $\Delta_N^y$. При этом $S_{2m+\nu,\, x}^{(k,0)}(f; x_i, y) = f^{(k,0)}(x_i, y)$, $k = \overline{0, m}$, $i = \overline{0, M}$, $S_{2n+\nu,\, y}^{(0,l)}(f; x, y_j) = f^{(0,l)}(x, y_j)$, $l = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, N}$.

Поставим в соответствие каждой функции $f \in C^{m,n}$ эрмитовы смешанные сплайны [3, с. 332] $\sigma_{2m+\nu,\, 2n+\nu}(f; x, y) = S_{2m+\nu,\, x}(f; x, y) + S_{2n+\nu,\, y}(f; x, y) - S_{2m+\nu,\, x}[S_{2n+\nu,\, y}(f; \cdot, \cdot); x, y]$, $\nu = 0, 1$. Функции $\sigma_{2m+1,\, 2n+1}(f; x, y)$ и $\sigma_{2m,\, 2n}(f; x, y)$ называются соответственно нечетными и четными эрмитовыми смешанными сплайнами для функции $f$ по разбиению $\Delta_{M,N}$. Ясно, что для эрмитова смешанного сплайна выполняются равенства $\sigma_{2m+\nu,\, 2n+\nu}^{k,l}(f; x_i, y) = f^{(k,l)}(x_i, y)$, $\sigma_{2m+\nu,\, 2n+\nu}^{k,l}(f; x, y_i) = f^{(k,l)}(x, y_i)$, $k = \overline{0, m}$, $l = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, M}$, $j = \overline{0, N}$.

Обозначим через $H_{k,m}(h, z)$, $A_{k,m}(h, z)$ функции, определенные на всей числовой прямой, которые вне промежутка $[0, h]$ равны нулю; на $[0, h]$ $H_{k,m}(h, z)$ есть алгебраический многочлен $(2m+1)$-й степени, а $A_{k,m}(h, z) \in C^{2m-1}[0, h]$ и на каждом из промежутков $[0, \frac{h}{2}]$ и $[\frac{h}{2}, h]$ является алгебраическим многочленом степени $2m$. Кроме того, $A^{(j)}_{k,m}(h, 0) = H^{(j)}_{k,m}(h, 0) = \delta_{kj}$, $A^{(j)}_{k,m}(h, h) = H^{(j)}_{k,m}(h, h) = 0$, где $\delta_{kj}$ — символ Кронекера.

Используя интерполяционную формулу Эрмита [4] функции $H_{k,m}(h, z)$ и $A_{k,m}(h, z)$ можно представить в виде

$$H_{k,m}(h, z) = \frac{(h-z)^{m+1}}{k!\,m!} \sum_{\nu=0}^{m-k} \frac{(m+\nu)!}{\nu!\,h^{m+\nu+1}}\, z^{k+\nu}, \quad z \in [0, h],$$

$$A_{k,m}(h, z) = H_{k,m}(h, z) + (-1)^{m+1}\, 2^{2m}\, (2m-k)!\, h^{-2m+k}\, C_m^k\, Q_{2m+1,\,m}\left(\frac{h}{2}, z\right),$$

где $Q_{2m+1,\,m}(\frac{h}{2}, z)$ определена в работе [5] и представима в виде

$$Q_{2m+1,\,m}\left(\frac{h}{2}, z\right) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+1} [(2m-k)!]^{-1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2m-k} H_{k,m}(h, h-z), & 0 \le z \le h/2, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} [(2m-k)!]^{-1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2m-k} H_{k,m}(h/2, z), & h/2 \le z \le h. \end{cases}$$

В [5], в частности, установлено, что для любого $h$

$$\int_0^h Q_{2m+1,\,m}\left(\frac{h}{2}, z\right) dz = 0. \tag{4}$$

Для $f(x, y) \in C^{m,n}$ сплайны $\sigma^{k,l}_{2m+\nu,\,2n+\nu}(f; x, y)$ на каждой ячейке $\Omega_{ij}$ можно представить в виде

$$\sigma_{2m+\nu,\,2n+\nu}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{m} [\, f^{(k,0)}(x_{i-1}, y)\, B_{k,m,\nu}(h_{x,i}, x - x_{i-1}) +$$

$$+ (-1)^k f^{(k,0)}(x_i, y) B_{k,m,\nu}(h_{x,i}, x_i - x)] + \sum_{l=0}^{n} [\, f^{(0,l)}(x, y_{j-1}) B_{l,n,\nu}(h_{y,j}, y - y_{j-1}) +$$

$$+ (-1)^l f^{(0,l)}(x, y_j) B_{l,n,\nu}(h_{y,j}, y_j - y)] - \sum_{k,l=0}^{m,n} [\, f^{(k,l)}(x_{i-1}, y_{j-1}) B_{k,m,\nu}(h_{x,i}, x - x_{i-1}) \times$$

$$\times B_{l,n,\nu}(h_{y,j}, y - y_{j-1})] + (-1)^k f^{(k,l)}(x_i, y_{j-1}) B_{k,m,\nu}(h_{x,i}, x_i - x) B_{l,n,\nu}(h_{y,j}, y - y_{j-1}) +$$

$$+ (-1)^l f^{(k,l)}(x_{i-1}, y_j) B_{k,m,\nu}(h_{x,i}, x - x_{i-1}) B_{l,n,\nu}(h_{y,j}, y_j - y) +$$

$$+ (-1)^{k+l} f^{(k,l)}(x_i, y_j) B_{k,m,\nu}(h_{x,i}, x_i - x)\, B_{l,n,\nu}(h_{y,j}, y_j - y)], \tag{5}$$

где $\nu = 0, 1$; $B_{\alpha,\beta,0}(h, z) = A_{\alpha,\beta}(h, z)$, $B_{\alpha,\beta,1}(h, z) = H_{\alpha,\beta}(h, z)$.

В работе [6] показано, что среди всех формул (3) с фиксированными узлами (1), (2) точной для многочленов степени $m$ по $x$ и $n$ по $y$, наилучшей для класса $W_2^{m+1,\,n+1} = \{ f : f^{(m,\,n+1)}, f^{(m+1,\,n)}$ абсолютно непрерывны, $\partial f^{(m,\,n+1)}/\partial x =$

$= \partial f^{(m+1,\,n)}/\partial y,\ \|f^{(m+1,\,n+1)}\|_2 \le 1\}$ является единственная формула, определяемая коэффициентами:

$$\overline{p}_{0k} = \int_0^{x_1} H_{k,m}(h_{x,1}, x)\,dx, \qquad \overline{q}_{0,l} = \int_0^{y_1} H_{l,n}(h_{y,1}, y)\,dy,$$

$$\overline{p}_{ik} = (-1)^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_{k,m}(h_{x,i}, x_i - x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_{k,m}(h_{x,i+1}, x - x_i)\,dx,$$

$$\overline{q}_{j,l} = (-1)^l \int_{y_{j-1}}^{y_j} H_{l,n}(h_{y,j}, y_j - y)\,dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} H_{l,n}(h_{y,j+1}, y - y_j)\,dy, \qquad (6)$$

$$\overline{p}_{Mk} = (-1)^k \int_{x_{M-1}}^{1} H_{k,m}(h_{x,M}, x_M - x)\,dx, \qquad \overline{q}_{N,l} = (-1)^l \int_{y_{N-1}}^{1} H_{l,n}(h_{y,N}, y_N - y)\,dy,$$

$$k = \overline{0, m};\ l = \overline{0, n};\ i = \overline{1, M-1};\ j = \overline{1, N-1}.$$

Приняв во внимание (5), (6), получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Если кубатурная формула* (3) *точна для всех многочленов степени $m$ по $x$ и $n$ по $y$, то интеграл* $I = \int_0^1\int_0^1 \sigma_{2m+1,\,2n+1}(f; x, y)\,dx\,dy$ *представляет собой кубатурную формулу наилучшей для класса* $W_2^{m+1,\,n+1}$ *формулы вида* (3) *с фиксированными узлами* (1), (2), *т. е.*

$$|R(\sigma_{2m+1,\,2n+1}; \overline{P}, \overline{Q})| = \inf_{(P,Q)} \sup_{f \in W_2^{m+1,\,n+1}} |R(f; P, Q)|,$$

*где* $\overline{P} = \{\overline{p}_{ik}\}$, $\overline{Q} = \{\overline{q}_{jl}\}$.

Обозначим через $p_{ik}^{2m+1}$, $q_{jl}^{2n+1}$ и $p_{ik}^{2m}$, $q_{jl}^{2n}$ коэффициенты кубатурной формулы (3), точной для всех нечетных и четных смешанных сплайнов соответственно. Из (4) – (6) следует $p_{ik}^{2m+1} = p_{ik}^{2m}$, $q_{jl}^{2n+1} = q_{jl}^{2n}$ и, таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Кубатурные формулы вида* (3), *точные при любом фиксированном разбиении* $\Delta_{M,N}$, *для четных и нечетных эрмитовых смешанных сплайнов совпадают.*

Заметим, что теорема 2 представляет собой обобщение результатов из [7] для случая формул с частичными интегралами (3).

1. *Лушпай Н. Е.* Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 12. – С. 53–59.
2. *Levin M.* On the evaluation of double integrals // Конструктивная теория функций. 81. – София, 1983. – С. 414–418.
3. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
5. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Математика. –1973. – **37**, № 1. – С. 165–185.
6. *Мырзанов Ж. Е.* О приближенном интегрировании функций двух переменных // Укр. мат. журн. –1986. – **38**, № 4. – С. 509–514.
7. *Переверзев С. В.*, *Шабозов М.* К вопросу о квадратурных и кубатурных формулах, связанных с эрмитовыми сплайнами // Сплайны в задачах аппроксимации и сглаживания. – Киев, 1978. – С. 41–47.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.26).

Получено 02.10.91