УДК 519.21

В. В. Булдыгин, д-р физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т),
Ю. В. Козаченко, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ОЦЕНКИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУПРЕМУМА ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Exponential estimates of "tails" of supremum distributions are found for a certain class of pre-Gaussian random processes. The results obtained are applied to quadratic forms and to the processes that can be represented as stochastic integrals of processes with independent increments.

Для деякого класу передгауссових випадкових процесів знайдені експоненціальні оцінки „хвостів" розподілу їх супремума. Одержані результати застосовуються до квадратичних форм гауссових процесів та процесів, що задаються у вигляді стохастичних інтегралів за процесами з незалежними приростами.

Введение. Изучению распределения супремума случайных процессов посвящено значительное число работ. Наиболее существенные результаты получены для гауссовских случайных процессов, некоторых классов марковских процессов и т. д. В последние годы энтропийные методы, эффективные в гауссовском случае, применяются при нахождении экспоненциальных оценок для некоторых классов случайных процессов, в определенном смысле сходных по своим свойствам с гауссовскими процессами. Настоящая работа близка по содержанию к работе [1], в которой получены экспоненциальные оценки для распределения супремума общих предгауссовских процессов. Ниже выделяется некоторый подкласс в классе предгауссовских процессов, для которого удается уточнить имеющиеся экспоненциальные оценки. Важным является то обстоятельство, что в выделенный подкласс входят процессы, представимые в виде квадратичных форм от гауссовских процессов или в виде стохастических интегралов от процессов с независимыми приращениями. Заметим, что в п. 2 изучаются энтропийные характеристики, связанные не с полуметриками, индуцированными случайными процессами, а с более общими функционалами.

1. Предгауссовские случайные величины.

***Определение* 1.** *Случайную величину* ξ *назовем предгауссовской, если найдутся такие числа* $b \in [0, \infty)$, $\Lambda \in (0, \infty]$, *что для всех* $\lambda \in (-\Lambda, \Lambda)$ *выполняется неравенство*

$$E \exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{b^2\lambda^2/2\}. \tag{1}$$

Класс всех предгауссовских случайных величин, заданных на $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, *обозначим через* $\mathrm{Prg}(\Omega)$.

Пусть для фиксированного $\Lambda \in (0, \infty]$ найдется такое число $b \ge 0$, что выполнено (1). Рассмотрим числовую характеристику

$$\tau_\Lambda(\xi) = \inf\{b \ge 0 : E\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{b^2\lambda^2/2\}, \lambda \in (-\Lambda, \Lambda)\}.$$

Величину $\tau_\Lambda(\xi)$ можно задать другим способом:

$$\tau_\Lambda(\xi) = \sup_{0<|\lambda|<\Lambda} (2\ln E\exp\{\lambda\xi\}/\lambda^2).$$

Кроме того, при $|\lambda| < \Lambda$

$$E\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\lambda^2\tau_\Lambda^2(\xi)/2\}.$$

Легко показать, что если ξ — предгауссовская случайная величина, то $E\xi = 0$, $E\xi^2 \le \tau_\Lambda^2(\xi)$.

Таким образом, всякая предгауссовская случайная величина имеет пару числовых характеристик $\Lambda = \Lambda(\xi)$ и $\tau_\Lambda = \tau_\Lambda(\xi)$. По существу, характеристики Λ,

© В. В. БУЛДЫГИН, Ю. В. КОЗАЧЕНКО, 1993

τ_Λ для предгауссовских случайных величин были введены в работе [2]. Кроме того, эти характеристики вводились в работе [3] при изучении свойств случайных процессов. В этой же работе введены понятия предгауссовской случайной величины и предгауссовского процесса. Отметим, что в некоторых работах термин „предгауссовской случайный элемент" имеет смысл, отличный от используемого нами.

Если $\Lambda(\xi) = \infty$ и $\tau_\infty < \infty$, то, следуя [4], случайную величину ξ называют субгауссовской. Субгауссовские случайные величины и процессы детально изучались в ряде работ (см., например, [5–10]). Отметим, что субгауссовские случайные величины, а вместе с ними центрированные гауссовские и центрированные ограниченные случайные величины являются предгауссовскими.

Предгауссовские случайные величины допускают несколько характеризаций (см., например, [11, с. 83]). В частности, *центрированная случайная величина* ξ *является предгауссовской тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Крамера: существует такая постоянная* $L \in (0, \infty]$, *что при* $|\lambda| < L$ $E \exp\{\lambda\xi\} < \infty$. Известно, что условие Крамера означает, что функция $f(z) = E\exp\{z\xi\}$ является аналитической в некоторой окрестности нуля комплексной плоскости.

Рассмотрим структуру пространства $\mathrm{Prg}(\Omega)$.

Лемма 1. *Пространство* $\mathrm{Prg}(\Omega)$ *является линейным пространством. При этом если* $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Prg}(\Omega)$, $c \in (-\infty, \infty)$, $\Lambda(\xi_1) = \Lambda_1$, $\Lambda(\xi_2) = \Lambda_2$, $\Lambda(c\xi) = \Lambda_3$, $\Lambda(\xi_1 + \xi_2) = \Lambda_4$, *то*

$$\tau_{\Lambda_3}(c\xi) = |c|\, \tau_{\Lambda_3/|c|}(\xi),$$

$$\tau_{\Lambda_4}(\xi_1 + \xi_2) \le \tau_{\Lambda_1}(\xi_1) + \tau_{\Lambda_2}(\xi_2),$$

$$\Lambda(\xi_1 + \xi_2) \ge \frac{\min\left(\Lambda_1 \tau_{\Lambda_1}(\xi_1),\ \Lambda_2 \tau_{\Lambda_2}(\xi_2)\right)}{\tau_{\Lambda_1}(\xi_1) + \tau_{\Lambda_2}(\xi_2)}.$$

Доказательство леммы 1 повторяет доказательство соответствующего утверждения для субгауссовских случайных величин [7].

В действительности пространство $\mathrm{Prg}(\Omega)$ имеет структуру банахового пространства. Чтобы показать это, рассмотрим пространство Орлича, соответствующее классу предгауссовских случайных величин. Пусть

$$U(x) = \exp\{|x|\} - 1,\ x \in (-\infty, \infty).$$

Обозначим через $L_U(\Omega)$ пространство таких случайных величин ξ, что для любого ξ найдется такое число $\Delta(\xi)$, что $EU(\xi/\Delta(\xi)) < \infty$. Пространство $L_U(\Omega)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|\xi\|_U = \inf\{c > 0: E\exp\{|\xi|/c\} \le 2\}$$

и называется пространством Орлича, порожденным функцией U [12]. Далее, пусть $L_U^0(\Omega)$ — банахово подпространство центрированных случайных величин из $L_U(\Omega)$.

Лемма 2. *Пространства* $\mathrm{Prg}(\Omega)$ *и* $L_U^0(\Omega)$ *совпадают.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству соответствующего утверждения работы [9].

2. Предгауссовские случайные процессы и их энтропийные характеристики.

Определение 2. *Случайный процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$ будем называть предгауссовским, если для всех $t \in T$ случайная величина $X(t)$ является предгауссовской.*

Так как пространство предгауссовских случайных величин линейное, то для всех $t, s \in T$ приращения $X(t) - X(s)$ также являются предгауссовскими случайными величинами.

На пространстве предгауссовских случайных величин будут рассматриваться функционалы $\Phi(\xi)$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $\Phi(\xi) \geq 0$, $\xi \in \mathrm{Prg}\,(\Omega)$; 2) $\Phi(0) = 0$; 3) $\Phi(-\xi) = \Phi(\xi)$, $\xi \in \mathrm{Prg}\,(\Omega)$; 4) существуют такие константа $c > 0$, норма $\rho(\xi)$, $\xi \in \mathrm{Prg}\,(\Omega)$, и множество $\Xi \subseteq \mathrm{Prg}\,(\Omega)$, что $\rho(\xi) \leq c\Phi(\xi)$, $\xi \in \Xi$; при этом норма ρ такова, что как только $\rho(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ по вероятности. *Функционалы Φ, удовлетворяющие указанным условиям, будем называть преднормами.*

В качестве функционалов Φ могут выступать нормы $\mathrm{Prg}\,(\Omega)$. Однако, как будет показано в дальнейшем, возможны случаи, когда функционал Φ не является нормой. Заметим, что в качестве нормы $\rho(\xi)$ во многих случаях можно брать отклонение $\sqrt{E\xi^2}$.

Пусть $X = \{X(t),\ t \in T\}$ — предгауссовский процесс и Φ — преднорма на $\mathrm{Prg}\,(\Omega)$. Будем предполагать, что процесс X и преднорма Φ согласованы таким образом, что

$$\{X(t), t \in T\} \cup \{X(t) - X(s), t, s \in T\} \subseteq \Xi \tag{2}$$

и

$$\sup_{t \in T} \Phi(X(t)) < \infty, \qquad \sup_{t,\, s \in T} \Phi(X(t) - X(s)) < \infty. \tag{3}$$

Далее, введем на параметрическом множестве T полуметрику $\rho(t, s)$, положив

$$\rho(t, s) = \rho(X(t) - X(s)). \tag{4}$$

Кроме того, пусть

$$\Phi(t) = \Phi(X(t)), \quad t \in T,$$

$$\Phi(t, s) = \Phi(X(t) - X(s)), \quad t, s \in T.$$

Функция $\Phi(t, s)$ наследует свойства функционала Φ: 1′) $\Phi(t, s) \geq 0$, $t, s \in T$; 2′) $\Phi(t, t) = 0$, $t \in T$; 3′) $\Phi(t, s) = \Phi(s, t)$, $s, t \in T$; и в силу (2): 4′) найдется такая константа $c > 0$, что для всех $t, s \in T$ $\rho(t, s) \leq c\Phi(t, s)$.

С учетом этих свойств функцию $\Phi(t, s)$ можно рассматривать как некоторый аналог структурного отклонения на T, мажорирующего полуметрику $\rho(t, s)$. Соответственно в терминах функции Φ можно говорить о Φ-плотном множестве в T.

Теперь рассмотрим шары в множестве T, построенные по полуметрике $\rho(t, s)$, и функции $\Phi(t, s)$. Под ρ-шаром радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $t \in T$, как обычно, понимаем множество

$$Q_\rho(t; \varepsilon) = \{s \in T: \rho(t, s) < \varepsilon\}.$$

По аналогии определим Φ-шар

$$Q_\Phi(t;\varepsilon) = \{s \in T: \Phi(t,s) < \varepsilon\}.$$

Из свойства 4′ следует, что для любых $t \in T$ и $\varepsilon > 0$ справедливо включение

$$Q_\Phi(t;\varepsilon) \subset Q_\rho(t; c\,\varepsilon). \tag{5}$$

Теперь рассмотрим энтропийные характеристики множества T относительно $\rho(t,s)$ и $\Phi(t,s)$. Через $N_\rho(T,\varepsilon)$, как обычно, обозначим наименьшее число ρ-шаров радиуса $\varepsilon > 0$, покрывающих множество T. Если множество этих шаров бесконечно, то полагаем $N_\rho(T,\varepsilon) = \infty$. Соответственно под энтропией множества T относительно полуметрики $\rho(t,s)$ понимаем величину $H_\rho(T,\varepsilon) = \ln N_\rho(T,\varepsilon)$, если $N_\rho(T,\varepsilon) < \infty$, и $H_\rho(T,\varepsilon) = \infty$, если $N_\rho(T,\varepsilon) = \infty$.

Аналогично определяем величину $N_\Phi(T,\varepsilon)$ и энтропию $H_\Phi(T,\varepsilon)$, заменяя в определении ρ-шары на Φ-шары.

Из включения (5), очевидно, вытекает неравенство

$$H_\rho(T, c\varepsilon) \le H_\Phi(T,\varepsilon), \tag{6}$$

справедливое для всех $\varepsilon > 0$.

3. Об одном подклассе класса предгауссовских случайных процессов. Пусть $X = \{X(t), t \in T\}$ — предгауссовский случайный процесс и Φ — преднорма на $\mathrm{Prg}(\Omega)$, для которых выполнено условие (3).

Определение 3. *Будем говорить, что характеристики предгауссовского процесса X подчинены преднорме Φ, если найдутся такие константы $\gamma > 0$, $\beta \ge 1$, что при $|\lambda| < \gamma\Phi^{-\beta}(t)$*

$$E\exp\{\lambda X(t)\} \le \exp\left\{\frac{\lambda^2\Phi^2(t)}{2}\right\} \tag{7}$$

и при $|\lambda| < \gamma\Phi^{-\beta}(t,s)$

$$E\exp\{\lambda(X(t)-X(s))\} \le \exp\left\{\frac{\lambda^2\Phi^2(t,s)}{2}\right\}. \tag{8}$$

Указанные процессы будем называть Φ-предгауссовскими.

Определение 3 означает, что

$$\Lambda(X(t)) = \gamma\Phi^{-\beta}(t), \quad \tau_{\Lambda(X(t))} = \Phi(t),$$

$$\Lambda(X(t)-X(s)) = \gamma\Phi^{-\beta}(t,s), \quad \tau_{\Lambda(X(t)-X(s))} = \Phi(t,s).$$

Конкретные примеры Φ-предгауссовских процессов приведены в дальнейшем.

4. Об оценках распределения супремума Φ-предгауссовских процессов. Прежде всего, определим необходимый комплекс условий, которым должен удовлетворять рассматриваемый ниже процесс $X = \{X(t), t \in T\}$: а) X — предгауссовский процесс и Φ — преднорма на $\mathrm{Prg}(\Omega)$; б) процесс X является Φ-предгауссовским; в) процесс X является ρ-сепарабельным, где $\rho(t,s)$ — полуметрика, заданная в свойстве 4′ функционала $\Phi(t,s)$. Кроме того, пусть

$$\delta = \min(\beta, 2), \quad \varepsilon_0 = \sup\Phi(t) > 0,$$

$$C_\delta = \sup_{0<u<\varepsilon_0} H_\Phi^{1/\delta}(T,u)\cdot u,$$

p — произвольное число из интервала $(0, 1)$, а B — такое произвольное число, что $B > \varepsilon_0^{2(\beta-\delta)}$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* а) – в). *Если*

$$\int_0^p H_\Phi^{1/\delta}(T, \varepsilon_0 u)\, du < \infty, \tag{9}$$

то при

$$0 \le \lambda < (1-p)\gamma\, \varepsilon_0^{-\beta} \left(1 - \frac{\varepsilon_0^{2(\beta-\delta)}}{B}\right) \tag{10}$$

выполняются неравенства

$$E \exp\left\{\lambda \sup_{t \in T} X(t)\right\} \le A(\lambda), \tag{11}$$

$$E \exp\left\{-\lambda \inf_{t \in T} X(t)\right\} \le A(\lambda), \tag{12}$$

где

$$A(\lambda) = \exp\left\{\frac{\lambda^2 \varepsilon_0^2}{2(1-p)^2} + \frac{\lambda \varepsilon_0 \Psi(p)}{\sqrt{2}\, p(1-p)}\right\},$$

$$\Psi(p) = \max\left\{1, C_\delta^{\delta-1} \frac{\sqrt{2B}}{\gamma p^{\delta-1}}\right\} \int_0^p H_\Phi^{1/\delta}(T, \varepsilon_0 u)\, du + \int_0^p H_\Phi^{1-1/\delta}(T, \varepsilon_0 u)\, du.$$

Доказательство. Заметим сначала, что при выполнении условия (9) $C_\delta < \infty$. Это следует из того, что при любом ε таком, что $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, справедливы неравенства

$$H_\Phi(T, \varepsilon)\,\varepsilon \le \int_0^{\varepsilon_0} H_\Phi^{1/\delta}(T, u)\, du,$$

т. е.

$$C_\delta \le \int_0^{\varepsilon_0} H_\Phi^{1/\delta}(T, u)\, du.$$

Далее, в силу ρ-сепарабельности процесса X и того, что этот процесс непрерывен по вероятности на (T, ρ), в качестве множества сепарабельности можно взять любое счетное всюду плотное множество в (T, ρ).

Пусть I — счетное всюду плотное множество в (T, Φ). В силу (5) оно будет счетным всюду плотным множеством в (T, ρ), а значит, множеством ρ-сепарабельности процесса X. Поэтому справедливо равенство

$$\sup_{t \in T} X(t) = \sup_{t \in I} X(t) \quad \text{п. н.} \tag{13}$$

Пусть $\varepsilon_k = \varepsilon_0 p^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим через V_{ε_k} ε_k-сеть множества T относительно Φ, $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$. Легко видеть, что V — счетное всюду плотное множество в (T, Φ). Поэтому в силу (13) выполняется равенство

$$\sup_{t \in V} X(t) = \sup_{t \in T} X(t) \quad \text{п. н.} \tag{14}$$

Любой точке $t \in V$ поставим в соответствие фиксированную точку $\alpha_k(t)$ из V_{ε_k} такую, что $\Phi(t, \alpha_k(t)) < \varepsilon_k$. Учитывая (14), легко показать (так же, как и в работе [1]), что п. н.

$$\sup_{t\in T} X(t) \le \max_{t\in V_{\varepsilon_1}} X(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \max_{t\in V_{\varepsilon_k}} \left(X(t) - X(\alpha_{k-1}(t))\right). \tag{15}$$

Пусть $q_k > 1$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность таких чисел, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} \le 1.$$

Тогда из (15) и неравенства Гельдера при $\lambda \ge 0$ следует неравенство

$$E\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T} X(t)\right\} \le \left(E\exp\left\{\lambda q_1 \max_{t\in V_{\varepsilon_k}} X(t)\right\}\right)^{1/q_1} \times$$

$$\times \prod_{k=2}^{\infty} \left(E\exp\left\{\lambda q_k \max_{t\in V_{\varepsilon_k}} \left(X(t) - X(\alpha_{k-1}(t))\right)\right\}\right)^{1/q_k} \tag{16}$$

Так как в силу условий теоремы при $0 \le \lambda < \gamma\left(q_1 \varepsilon_0^{\beta}\right)^{-1}$ справедливо неравенство

$$E\exp\left\{\lambda q_1 \max_{t\in V_{\varepsilon_1}} X(t)\right\} \le N_{\Phi}(T, \varepsilon_1) \exp\left\{\frac{\lambda^2 \varepsilon_0^2 q_1^2}{2}\right\}, \tag{17}$$

а при $0 \le \lambda < \gamma\left(q_k (\varepsilon_0 p^{k-1})^{\beta}\right)^{-1}$ справедливы неравенства

$$E\exp\left\{\lambda q_k \max_{t\in V_{\varepsilon_k}} \left(X(t) - X(\alpha_{k-1}(t))\right)\right\} \le$$

$$\le N_{\Phi}(T, \varepsilon_k) \exp\left\{\frac{\lambda^2 q_k^2 \varepsilon_0^2 p^{2(k-1)}}{2}\right\}, \tag{18}$$

то при тех $\lambda \ge 0$, при которых одновременно выполняются неравенства (17) и (18), справедливо соотношение

$$E\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T} X(t)\right\} \le \prod_{k=1}^{\infty} \left(N_{\Phi}(T, \varepsilon_0 p^k) \exp\left\{\frac{\lambda^2 q_k^2 \varepsilon_0^2 p^{2(k-1)}}{2}\right\}\right)^{1/q_k} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{\Phi}(I, \varepsilon_0 p^k)}{q_k} + \frac{\lambda^2}{2} \varepsilon_0^2 q_k^2 p^{2(k-1)}\right\}. \tag{19}$$

Положим

$$q_k = \frac{1}{\varepsilon_0 \lambda p^{k-1}} \left(\frac{\lambda^2 \varepsilon_0^2}{2(1-p)^2} + z(p^k \varepsilon_0)\right)^{1/2} \sqrt{2}, \tag{20}$$

где

$$z(\varepsilon_0 p^k) = \min\left\{H_{\Phi}^{2(1-1/\delta)}(T, \varepsilon_0 p^k), \frac{\gamma^2}{2B(\varepsilon_0 p^{k-1})^{2(\delta-1)}}\right\}.$$

Покажем теперь, что при q_k, определенных в (20), неравенство (19) выполняется при λ, удовлетворяющих неравенству (10). Неравенства (17) и (18) выполняются одновременно, если при всех целых $k > 0$ справедливо неравенство

$$0 \le \lambda < \gamma\left(q_k (\varepsilon_0 p^{k-1})^{\beta}\right)^{-1}. \tag{21}$$

Подставляя в (21) значение q_k, получаем, что при $\lambda > 0$ неравенство (21) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{\lambda^2 \varepsilon_0^2}{2(1-p)^2} + z(\varepsilon_0 p^k) \le \frac{\gamma^2}{2} (\varepsilon_0 p^{k-1})^{2(1-\beta)},$$

а это неравенство будет выполняться, если выполняется неравенство

$$\frac{\lambda^2 \varepsilon_0^2}{2(1-p)^2} \le \frac{\gamma^2}{2} (\varepsilon_0 p^{k-1})^{2(1-\beta)} \left(1 - \frac{1}{B} (\varepsilon_0 p^{k-1})^{2(\beta-\delta)}\right).$$

В свою очередь, это неравенство выполняется для всех $k \ge 1$, если

$$\lambda^2 \le (1-p)^2 \gamma^2 \varepsilon_0^{-2\beta} \left(1 - \frac{1}{B} \varepsilon_0^{2(\beta-\delta)}\right),$$

т. е. если выполняется неравенство (10).

Из неравенства (19) при q_k, определенных в (20), и λ, удовлетворяющих (10), получаем соотношения

$$E \exp\left\{\lambda \sup_{t \in T} X(t)\right\} \le \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} \left(H_\Phi(T, \varepsilon_0 p^k) + \frac{\lambda^2 \varepsilon_0^2}{2(1-p)^2} + z(\varepsilon_0 p^k)\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2 \varepsilon_0^2}{2(1-p)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k}\right\} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(H_\Phi(T, \varepsilon_0 p^k) + z(\varepsilon_0 p^k)\right) \varepsilon_0 \lambda p^{k-1}}{\sqrt{2} \left((\lambda^2 \varepsilon_0^2)/\left(2(1-p)^2\right) + z(\varepsilon_0 p^k)\right)^{1/2}}\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{\lambda^2 \varepsilon_0^2}{2(1-p)^2}\right\} \exp\left\{\frac{\lambda \varepsilon_0}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \left(\frac{H_\Phi(T, \varepsilon_0 p^k)}{z^{1/2}(\varepsilon_0 p^k)} + z^{1/2}(\varepsilon_0 p^k)\right)\right\}. \qquad (22)$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} z^{1/2}(\varepsilon_0 p^k) \le \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} H_\Phi^{1-1/\delta}(T, \varepsilon_0 p^k) \le$$

$$\le \frac{1}{p(1-p)} \int_0^p H_\Phi^{1-1/\delta}(T, \varepsilon_0 u)\, du, \qquad (23)$$

а

$$\frac{H^{1-1/\delta}(\varepsilon_0 p^k)}{z^{1/2}(\varepsilon_0 p^k)} \le \max\left\{1,\ H_\Phi^{1-1/\delta}(T, \varepsilon_0 p^k) \frac{\sqrt{2B}\, (\varepsilon_0 p^{k-1})^{\delta-1}}{\gamma}\right\} =$$

$$= \max\left\{1, \left[\sup_k H_\Phi^{1/\delta}(T, \varepsilon_0 p^k)\, \varepsilon_0 p^k\right]^{\delta-1} \frac{\sqrt{2B}}{\gamma p^{\delta-1}}\right\} \le \max\left\{1,\ C_\delta^{\delta-1} \frac{\sqrt{2B}}{\gamma p^{\delta-1}}\right\}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \frac{H_\Phi(T, \varepsilon_0 p^k)}{z^{1/2}(\varepsilon_0 p^k)} \le \max\left\{1, C_\delta^{\delta-1} \frac{\sqrt{2B}}{\gamma p^{\delta-1}}\right\} \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} H_\Phi^{1/\delta}(T, \varepsilon_0 p^k) \le$$

$$\le \max\left\{1, C_\delta^{\delta-1} \frac{\sqrt{2B}}{\gamma p^{\delta-1}}\right\} \frac{1}{p(1-p)} \int_0^p H_\Phi^{1/\delta}(T, \varepsilon_0 u)\, du. \qquad (24)$$

Из (23), (24) и (22) следует неравенство (11). Неравенство (12) доказывается аналогично. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть процесс* $(X(t), t \in T)$ *удовлетворяет условию леммы 3. Тогда для всех* $x > 0$ *справедливы неравенства*

$$P\left\{\sup_{t\in T} X(t) > x\right\} \le U(x), \tag{25}$$

$$P\left\{\inf_{t\in T} X(t) < -x\right\} \le U(x), \tag{26}$$

$$P\left\{\sup |X(t)| > x\right\} \le 2U(x), \tag{27}$$

где

$$U(x) = \begin{cases} 1 \;\; \textit{при} \;\; 0 < x < \alpha_1(p); \\ \exp\left\{\dfrac{(1-p)^2\left(x - \left(\varepsilon_0 \Psi(p)\right)/\left(\sqrt{2}\,p(1-p)\right)\right)^2}{2\varepsilon_0^2}\right\} \;\; \textit{при} \;\; \alpha_1(p) \le x < \alpha_2(p); \\ \exp\left\{\dfrac{\Psi(p)\gamma}{2\sqrt{2}\,p\,\varepsilon_0^{\beta-1}\Delta}\right\}\exp\left\{\dfrac{(1-p)\gamma\Delta x}{2\varepsilon_0^{\beta}}\right\} \;\; \textit{при} \;\; \alpha_2(p) \le x, \end{cases}$$

$$\alpha_1(p) = \frac{\varepsilon_0 \Psi(p)}{\sqrt{2}\,p(1-p)},$$

$$\alpha_2(p) = \alpha_1(p) + \varepsilon_0^{2-\beta}\frac{\gamma\Delta}{2(1-p)},$$

$$\Delta = \left(1 - \varepsilon_0^{2(\beta-\delta)}/B\right)^{1/2},$$

а функция $\Psi(p)$, $0 < p < 1$, *определена в* (11).

Доказательство. Применяя неравенство Чебышева — Маркова, получаем, что при $x > 0$, $\lambda > 0$

$$P\left\{\sup_{t\in T} X(t) \ge x\right\} \le \frac{E\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T} X(t)\right\}}{\exp\{\lambda x\}}.$$

Далее, если λ удовлетворяет условию (10), то, применяя неравенство (11), имеем

$$P\left\{\sup_{t\in T} X(t) \ge x\right\} \le A(\lambda)\exp\{\lambda x\}.$$

Минимизируя по λ правую часть этого неравенства, получаем неравенство (25). Неравенство (26) доказывается аналогично. Неравенство (27) следует из неравенств (25), (26). Теорема 1 доказана.

Функция $U(x)$ имеет достаточно сложный вид и зависит от двух параметров p и B. В действительности, оценки (25) – (27) можно уточнить, если минимизировать функцию $U(x)$ по этим параметрам. В качестве примера рассмотрим случай, когда параметр B фиксируется, а функция $U(x)$ оценивается сверху некоторой функцией $U_1(x)$, которая затем минимизируется по параметру p.

***Следствие* 1.** *При* $x \ge x_0$

$$P\left\{\sup_{t\in T} X(t) > x\right\} \le \exp\{-C_1 x + C_2 x^{\delta(1+\delta)}\}, \tag{28}$$

где

$$x_0 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, \quad A_1 = \left(\sqrt{B}\,a_1 / a_2^{\delta}\right)^{1+\delta},$$

$$A_2 = (2a_2)^{1+\delta}, \quad A_3 = \frac{a_2^{1+\delta}}{\left(I_{1/\delta}(\varepsilon_0)\sqrt{2B}/\gamma\right)^{(\delta+1)/(\delta-1)}},$$

$$a_1 = 2\left[\frac{\varepsilon_0}{\gamma}w(\varepsilon_0) + \frac{\varepsilon_0^{2-\gamma}\Delta}{2}\right], \quad w(\varepsilon_0) = I_{1/\delta}(\varepsilon_0)\left[I_{1/\delta}(\varepsilon_0) + I_{1-1/\delta}(\varepsilon_0)\right],$$

$$I_r(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} H_\Phi^r(T,u)\,du, \quad a_2 = \left(\frac{\delta a_4}{a_3}\right)^{1/(1+\delta)}, \quad a_3 = \frac{\gamma\Delta}{2\varepsilon_0^{\beta}}, \quad a_4 = \frac{\sqrt{B}}{2\varepsilon_0^{\beta-1}\Delta},$$

$$B > \max\left\{1, \varepsilon_0^{2(\beta-\delta)}\right\}, \quad C_1 = \frac{\gamma\Delta}{2\varepsilon_0^{\beta}}, \quad C_2 = a_2a_3 + a_2^{\delta}a_4.$$

Доказательство. Заметим, что

$$C_\delta \le (1/\varepsilon_0)I_{1/\delta}(\varepsilon_0 p).$$

При

$$p \le \min\left\{\frac{1}{2}, \left(\frac{\sqrt{2B}}{\gamma}I_{1/\delta}(\varepsilon_0)\right)^{1/(\delta-1)}\right\} \tag{29}$$

выполняется неравенство

$$\Psi(p) \le \frac{\sqrt{2B}\,w(\varepsilon_0)}{\gamma p^{\delta-1}}.$$

Кроме того,

$$\alpha_2(p) \le \left(\sqrt{B}/p^{\delta}\right)a_1.$$

Следовательно, при

$$x \ge \left(\sqrt{B}\,a_1\right)/p^{\delta} \tag{30}$$

справедливо неравенство

$$U(x) \le \exp\{-C_1x\}\exp\{a_4p^{-\delta} + a_3px\}. \tag{31}$$

Минимизируя выражение в правой части по p, получаем

$$p_{\min} = a_2x^{-1/(1+\delta)}.$$

При $x > \max\{A_2, A_3\}$ выполнено неравенство (29). Подставляя $p_{\min}$ в неравенство (37) и учитывая неравенство (30), получаем искомое неравенство. Следствие 1 доказано.

5. Квадратичные формы от гауссовских процессов. Рассмотрим процессы, представимые в виде квадратичных форм от гауссовских процессов, и покажем, что эти процессы являются Φ-предгауссовскими.

Лемма 4. *Пусть* $\vec{\theta}$ — *n-мерный гауссовский вектор* (*столбец*), $\vec{\theta}^{\mathrm{T}}$ — *транспонированный вектор*, $E\vec{\theta} = 0$; A — *произвольная* ($n \times n$)-*мерная матрица*; $\zeta = \vec{\theta}^{\mathrm{T}}A\vec{\theta} - E\vec{\theta}^{\mathrm{T}}A\vec{\theta}$. *Тогда для любого* $c \in (0,1)$ *при*

$$|\lambda| < c/\sqrt{2E\zeta^2}$$

выполняется неравенство

$$E\exp\{\lambda\zeta\} \le \exp\left\{\frac{\lambda^2E\zeta^2}{2(1-c^2)}\right\}. \tag{32}$$

Доказательство. Используя [13], видим, что при

$$|\lambda| \leq \min\{1/\delta_1, 1/\delta_2\},$$

где δ_1 и δ_2 — некоторые положительные числа, зависящие от ковариационной матрицы случайного вектора $\vec{\theta}$, такие, что $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 1$, выполняется неравенство

$$E\exp\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{E(\zeta - E\zeta)^2}}\right)\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda\delta_1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-\lambda\delta_2)^k}{k}\right]\right\}.$$

Подобное неравенство можно также получить, используя результаты работы [14]. В силу монотонности функции, стоящей под знаком экспоненты, и того, что $\delta_1, \delta_2 \in [0, 1]$, получаем, что при $|\lambda| \leq c$

$$E\exp\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{E(\zeta - E\zeta)^2}}\right)\right\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2}{2(1-c^2)}\right\}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы. Лемма 4 доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\vec{\theta}_1$ *и* $\vec{\theta}_2$ *— совместно гауссовские случайные векторы,* $E\vec{\theta}_1 = E\vec{\theta}_2 = 0$; A_1, A_2 *— произвольные* $(n \times n)$*-мерные матрицы. Если положить*

$$\zeta = (\vec{\theta}_1^{\mathrm{T}} A_1 \vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_2^{\mathrm{T}} A_2 \vec{\theta}_2) - E(\vec{\theta}_1^{\mathrm{T}} A_1 \vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_2^{\mathrm{T}} A_2 \vec{\theta}_2),$$

то для ζ *справедливо неравенство* (32).

Доказательство вытекает из леммы 4, если рассмотреть вектор $\begin{pmatrix}\vec{\theta}_1\\ \vec{\theta}_2\end{pmatrix}$, матрицу $\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & -A_2\end{pmatrix}$ и воспользоваться равенством

$$\vec{\theta}_1^{\mathrm{T}} A_1 \vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_2^{\mathrm{T}} A_2 \vec{\theta}_2 = (\vec{\theta}_1^{\mathrm{T}}, \vec{\theta}_2^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & -A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\theta}_1\\ \vec{\theta}_2\end{pmatrix}.$$

Пусть (T, d) — сепарабельное метрическое пространство и $(\xi_k(t), t \in T)$, $k = 1, \ldots, n$, — совместно гауссовские центрированные непрерывные в среднем квадратическом процессы, сепарабельные на (T, d). Далее, пусть $G(t) = (G_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ — неслучайная матричная функция, непрерывная на (T, d). Рассмотрим при $t \in T$ процессы

$$Y(t) = \sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}(t)\xi_i(t)\xi_j(t),$$

$$X(t) = Y(t) - EY(t).$$

Применяя лемму 4 и следствие 2, видим, что для любого $c \in (0, 1)$ при

$$|\lambda| < c/\sqrt{2EX^2(t)}$$

справедливо неравенство

$$E\exp\{\lambda X(t)\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 EX^2(t)}{2(1-c^2)}\right\}$$

и при

$$|\lambda| < c/\sqrt{2E|X(t)-X(s)|^2}$$

справедливо неравенство

$$E\exp\{\lambda(X(t)-X(s))\} \le \exp\left\{\frac{\lambda^2 E(X(t)-X(s))^2}{2(1-c^2)}\right\}.$$

Теперь, если положить

$$\Phi(\xi) = \rho(\xi) = \sqrt{\frac{E\xi^2}{1-c^2}},$$

$$\Xi = \operatorname{Prg}(\Omega),$$

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{EX^2(t)}{1-c^2}}, \quad \Phi(t,s) = \sqrt{\frac{E(X(t)-X(s))^2}{1-c^2}},$$

то (см. определение 3) процесс $X = (X(t), t \in T)$ является Φ-предгауссовским, т. е. он подчинен норме $\Phi(\xi)$; при этом неравенства (7), (8) выполняются при $\beta = 1$, $\gamma = c/\sqrt{2(1-c^2)}$.

Кроме того, в силу исходных предположений процесс X является ρ-сепарабельным. Таким образом, выполнены все предварительные требования для процесса X и согласно теореме 1 справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon H_\sigma(T,u)\,du < \infty,$$

где

$$\sigma(t,s) = \sqrt{E(X(t)-X(s))^2}, \quad t,s \in T.$$

Тогда для всех $x \ge 0$ *справедливы неравенства* (25) – (28) *при* $\beta = 1$, $\delta = 1$ *и* $\varepsilon_0 = \sup_{t\in T}\sqrt{EX^2(t)}$.

6. Стохастические интегралы по процессам с независимыми приращениями. Рассмотрим случайные процессы, представимые в виде стохастических интегралов

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s)\,d\eta(s), \tag{33}$$

где $f(t,s)$, $t,s \in (-\infty,\infty)$, — неслучайная функция, а $\eta(s)$, $s \in (-\infty,\infty)$, — центрированный стохастический непрерывный сепарабельный процесс с независимыми приращениями. Более точные ограничения на функцию $f(t,s)$ и процесс $\eta(s)$ приводятся ниже.

При изучении таких процессов будут применяться функционалы специального вида, использующие семиинварианты случайных величин. Такие функционалы вводились и применялись в работах [15, 16].

Напомним, что если $\varphi_\xi(u)$, $u \in (-\infty,\infty)$, — характеристический функционал случайной величины ξ, то согласно определению величина

$$\varkappa_k = \varkappa_k(\xi) = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{du^k}\ln\varphi_\xi(u)\Big|_{u=0}$$

называется семиинвариантом (кумулянтом) k-го порядка [17]. Семиинвариант k-го порядка существует тогда и только тогда, когда существует момент $E\,\xi^k$ k-го порядка.

Пусть у случайной величины ξ существуют семиинварианты κ_k, $k \geq 1$. Положим

$$B(\xi) = \sup_{k\geq 2}\left(\frac{|\kappa_k(\xi)|}{(k-2)!}\right)^{1/2(k-1)}. \tag{34}$$

Например, если ξ — гауссовская центрированная случайная величина, то $\Phi(\xi) = \sqrt{E\xi^2}$. Так как семиинварианты не являются однородными функциями, то функционал $\Phi(\xi)$, вообще говоря, не является нормой. Однако будет справедливо следующее неравенство:

$$\sqrt{E\xi^2} \leq B(\xi). \tag{35}$$

Кроме того, как показано в [16], если $E\,\xi = 0$ и $B(\xi) < \infty$, то случайная величина ξ является предгауссовской. Более того, для любых чисел $c \in (0, 1)$ при

$$|\lambda| < c/B^2(\xi) \tag{36}$$

справедливо неравенство

$$E\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2(\xi)}{2(1-c)}\right\}. \tag{37}$$

Далее, пусть $Z = (Z(t), t \in T)$ — центрированный случайный процесс такой, что

$$\sup_{t\in T} B(Z(t)) < \infty, \quad \sup_{t,s\in T} B(Z(t)-Z(s)) < \infty. \tag{38}$$

Тогда, если положить

$$\Phi(\xi) = \frac{B(\xi)}{\sqrt{1-c}},$$

$$\Xi = \{\xi \in \mathrm{Prg}\,(\Omega)\colon\ B(\xi) < \infty\},$$

то функционал $\Phi(\xi)$ будет преднормой и согласно (35) мажорирует норму $\rho(\xi) = \sqrt{E\xi^2}$. В силу условий (38) и неравенств (36), (37) процесс Z является Φ-предгауссовским, и если

$$\Phi(t) = \frac{B(Z(t))}{\sqrt{1-c}}, \quad \Phi(t, s) = \frac{B(Z(t)-Z(s))}{\sqrt{1-c}},$$

то неравенства (7), (8) выполняются при $\beta = 2$ и $\gamma = c$. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть* (T, d) — *сепарабельное метрическое пространство и* $(Z(t), t \in T)$ — *центрированный непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс, сепарабельный на* (T, d). *Кроме того, пусть выполнены условия* (38). *Тогда если для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} H_\Phi^{1/2}(T, u)\,du < \infty,$$

то для всех $x > 0$ *справедливы неравенства* (25) – (27), (28) *при* $\beta = 2$, $\delta = 2$ *и* $\varepsilon_0 = \sup_{t \in T} \Phi(t)$.

Рассмотрим теперь процесс, определенный стохастическим интегралом (39). В этом случае [18]

$$B(X(t)) = \sup_{k \ge 2} \left(\frac{1}{(k-2)!} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f^k(t, \tau) \pi(d\tau, dx) \right| \right)^{1/2(k-1)} \tag{39}$$

$$B(X(t) - X(s)) = \sup_{k \ge 2} \left(\frac{1}{(k-2)!} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \big(f(t, \tau) - f(s, \tau) \big)^k \pi(d\tau, dx) \right| \right)^{1/2(k-1)} \tag{40}$$

где $\pi(d\tau, dx)$ — спектральная мера процесса $\eta(s)$.

Теорема 3. *Для процесса* $X(t)$, $t \in [a, b]$, *выполнено утверждение леммы* 5, *где* $B(X(t))$, $B(X(t) - X(s))$ *заданы соотношениями* (39), (40).

1. *Дмитровский В. А.* О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовских полей // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1981. – Вып. 25. – С. 154 – 164.
2. *Петров В. В.* Обобщение и уточнение неравенств Бернштейна // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1967. – № 19. – С. 63 – 68.
3. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* О локальных свойствах реализаций некоторых случайных процессов и полей // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1974. – Вып. 10. – С. 39 – 47.
4. *Kahane J. P.* Proprietes locales des fonctions á series de Fourier aleatoires // Stud. math. – 1960. – **19**, № 1. – P. 1 – 25.
5. *Козаченко Ю. В.* Локальные свойства выборочных функций одного класса случайных процессов // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1970. – Вып. 1. – С. 109 – 116.
6. *Jain N. C., Marcus M. B.* Continuity of subgaussian processes // Adv. Probab. – 1978. – **4**. – P. 408 – 423.
7. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* О субгауссовских случайных величинах // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 723 – 730.
8. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Субгауссовские случайные векторы и процессы // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1987. – Вып. 36. – С. 10 – 22.
9. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Там же. – 1985. – Вып. 32. – С. 42 – 53.
10. *Островский Е. И.* Экспоненциальные оценки распределения максимума негауссовского случайного поля // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – **35**, № 3. – С. 482 – 493.
11. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М. : Наука, 1987. – 317 с.
12. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
13. *Козаченко Ю. В., Стадник А. И.* О сходимости некоторых фунционалов от гауссовских векторов в пространстве Орлича // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1991. – Вып. 44. – С. 80 – 87.
14. *Бакиров Н. К.* Экстремумы распределений квадратичных форм от гауссовских величин // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **34**, № 2. – С. 241 – 250.
15. *Булдыгин В. В., Яровая Н. В.* Функциональная предельная теорема для полей дробового эффекта // Проблемы теории вероятностных распределений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 25 – 41.
16. *Buldygin V.* Semi-invariant conditions of weak convergence of random processes in the space of continuous functions // New Trends in Probab. and Statist. – Utrecht: VSP, 1991. – P. 78 – 92.
17. *Лукач Э.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 423 с.
18. *Скороход А. В.* Процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 280 с.

Получено 29. 10. 91