УДК 519

А. Я. Дороговцев, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

СТАЦИОНАРНЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ СО СЛУЧАЙНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Sufficient conditions for existence of stationary or periodic solutions of operator Riccati equation with a random perturbation are given.

Наведені достатні умови існування стаціонарних і періодичних розв'язків операторного рівняння Ріккаті з випадковим збуренням.

1. Введение. Настоящая статья является продолжением работы [1] о существовании ограниченных и периодических решений операторного уравнения Риккати и посвящена доказательству существования стационарных и периодических решений этого уравнения со случайным возмущением. При этом метод работы [1] применим к более сложной ситуации: стационарное или периодическое возмущение необязательно должно быть ограниченным на $\boldsymbol{R}$ с вероятностью 1, а потому свести задачу к использованию только локального условия Липшица не представляется возможным. Рассматриваемый далее периодический с периодом τ (стационарный) процесс есть процесс, все конечномерные распределения которого периодичны с периодом τ по сдвигу времени (не зависят от сдвига). О периодических и стационарных решениях некоторых линейных и нелинейных уравнений в банаховом пространстве см. работу [2], где приведены ссылки на предшествующие и прикладные работы.

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — комплексное сепарабельное банахово пространство, B^* — банахово пространство линейных непрерывных функционалов и $\langle f, x\rangle$ — значение функционала $f \in B^*$ на элементе $x \in B$, $\mathfrak{L}(B)$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов с операторной нормой, обозначаемой также символом $\|\cdot\|$. При этом $\mathfrak{L}(B)$ — банахова алгебра с единицей. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ — полное вероятностное пространство. Далее рассматриваются $\mathfrak{L}(B)$-значные случайные элементы (случайные операторы) в смысле [3]. Приведем определение.

***Определение* 1.** *Отображение Y: $\Omega \to \mathfrak{L}(B)$ называется $\mathfrak{L}(B)$-значным случайным элементом, если для любых $x \in B$ и $f \in B^*$ отображение $\langle f, Yx\rangle$: $\Omega \to \boldsymbol{C}$ есть комплексная случайная величина.*

Для $\mathfrak{L}(B)$-значного случайного элемента Y и любого элемента $x \in B$ Yx — согласно теореме Петтиса B-значный случайный элемент и $\|Yx\|$ — случайная величина, а потому и $\|Y\|$ — случайная величина. Кроме того, сумма и произведение $\mathfrak{L}(B)$-значных случайных элементов — случайный элемент.

***Определение* 2.** *$\mathfrak{L}(B)$-значный случайный процесс $\{Y(t)$: $t \in \boldsymbol{R}\}$ — отображение Y: $\boldsymbol{R} \times \Omega \to \mathfrak{L}(B)$ такое, что для каждого $t \in \boldsymbol{R}$ $Y(t)$ — $\mathfrak{L}(B)$-значный случайный элемент.*

Ниже рассматриваются только $\mathfrak{L}(B)$-значные процессы, почти все траектории которых непрерывны по норме на $\boldsymbol{R}$.

***Определение* 3.** *$\mathfrak{L}(B)$-значный случайный процесс $\{Y(t)$: $t \in \boldsymbol{R}\}$ называется периодическим с периодом τ (стационарным), если $\forall m \in \boldsymbol{N}$ $\forall\{t_1, t_2, \ldots, x_m\} \subset \boldsymbol{R}$ $\forall\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ $\forall\{t_1, t_2, \ldots, x_m\} \subset B$ процесс*

$$(\langle f_1, Y(t_1+t)x_1\rangle, \langle f_2, Y(t_2+t)x_2\rangle, \ldots, \langle f_m, Y(t_m+t)x_m\rangle), \quad t \in \boldsymbol{R},$$

периодичен с периодом τ в $\boldsymbol{C}^m$ (стационарен в $\boldsymbol{C}^m$).

Определение периодически (стационарно) связанных $\mathfrak{L}(B)$-значных процессов аналогично определению 3. Отметим, что для периодически (стационарно) связанных процессов в $\mathfrak{L}(B)$ $\{Y_j(t): t \in \boldsymbol{R}\}$, $j = 1, 2$, процессы

$$\{Y_1(t) + Y_2(t): t \in \boldsymbol{R}\}, \ \{Y_1(t)\, Y_2(t): t \in \boldsymbol{R}\},$$
$$\{\|Y_1(t)\| \cdot \|Y_2(t)\|: t \in \boldsymbol{R}\}$$

периодичны (стационарны). Аналогично определению 3 определяется стационарный $\mathfrak{L}(B)$-значный процесс $\{Y(n): n \in \boldsymbol{Z}\}$ с дискретным параметром.

Под решением рассматриваемых ниже дифференциальных уравнений понимается такой $\mathfrak{L}(B)$-значный процесс, почти все траектории которого непрерывно дифференцируемы по норме на $\boldsymbol{R}$ и удовлетворяют уравнению. Единственность решения — это единственность с точностью до стохастической эквивалентности.

2. Стационарные решения. Пусть $\{A, C\} \subset \mathfrak{L}(B)$ — фиксированные операторы, $c := \|C\|$. Предположим, что

$$\sigma(A) \cap i\boldsymbol{R} = \varnothing, \tag{1}$$

$\sigma(A)$ — спектр оператора A. При выполнении условия (1) спектр $\sigma(A)$ — объединение двух спектральных множеств, лежащих в левой и правой полуплоскостях; пусть P_1 и P_2 — соответствующие спектральные проекторы. Положим

$$G(t) := \begin{cases} e^{At}P_1, & t > 0, \\ -e^{At}P_2, & t < 0, \end{cases}$$

тогда для некоторых чисел $L \geq 0$ и $a > 0$

$$\|G(t)\| \leq Le^{-a|t|}, \quad t \in \boldsymbol{R} \tag{2}$$

(по этому поводу см. [4]). Числа L и a далее предполагаются фиксированными.

Теорема 1. *Предположим, что для фиксированных операторов* $\{A, C\} \subset \subset \mathfrak{L}(B)$ *выполнено условие* (1) *и неравенство* (2), *а* $\{Y(t): t \in \boldsymbol{R}\}$ — *стационарный* $\mathfrak{L}(B)$-*значный процесс такой, что*

$$\sup_{k \in N} (\boldsymbol{M}\, \|Y(0)\|^k)^{1/k} =: \lambda < +\infty. \tag{3}$$

Если выполнено неравенство

$$8L\sqrt{c\lambda} \leq a, \tag{4}$$

то уравнение Риккати

$$X'(t) = AX(t) + X(t)CX(t) + Y(t), \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{5}$$

имеет стационарное $\mathfrak{L}(B)$-*значное решение* $\{X(t): t \in \boldsymbol{R}\}$.

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Для того чтобы для любого* $\mathfrak{L}(B)$-*значного стационарного процесса* $\{Y(t): t \in \boldsymbol{R}\}$, $\boldsymbol{M}\, \|Y(0)\| < +\infty$, *уравнение*

$$X'(t) = AX(t) + Y(t), \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{6}$$

с оператором $A \in \mathfrak{L}(B)$ *имело единственное* $\mathfrak{L}(B)$-*значное стационарное решение* $\{X(t): t \in \boldsymbol{R}\}$, $\boldsymbol{M}\, \|X(0)\| < +\infty$, *необходимо и достаточно выполнение условия* (1).

Доказательство леммы 1 получается аналогично результатам статьи [2]. При этом решение уравнения (6) представимо в виде

$$X(t) = \int_{\boldsymbol{R}} G(t-s)Y(s)\, ds, \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{7}$$

Интеграл в (7) существует в силу оценки (2) и теоремы Бохнера с вероятностью 1 как интеграл Бохнера.

Рассмотрим последовательность $\{X_n(t): t \in \boldsymbol{R}\}$, $n \geq 0$, стационарно связанных $\mathfrak{L}(B)$-значных процессов, определяемых следующими равенствами с удовлетворяющим условию (1) оператором A и удовлетворяющим условию (3) процессом Y:

$$X_0'(t) = AX_0(t) + Y_0(t), \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{8}$$

$$X_n'(t) = AX_n(t) + Y_n(t), \quad t \in \boldsymbol{R}, \quad n \geq 1, \tag{9}$$

где

$$Y_0(t) := Y(t), \quad Y_n(t) := \sum_{j=0}^{n-1} X_j(t) C X_{n-j}(t), \quad t \in \boldsymbol{R}, \quad n \geq 1.$$

Согласно лемме 1 для исходного процесса $Y_0 = Y$ при условии (3) существует единственное стационарное $\mathfrak{L}(B)$-значное решение X_0, причем

$$X_0(t) = \int_{\boldsymbol{R}} G(t-s) Y_0(s)\, ds, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{10}$$

и процессы X_0 и Y_0 стационарно связаны. Затем по стационарному $\mathfrak{L}(B)$-значному процессу $Y_1 = X_0 C X_0$ аналогично определяется процесс X_1 в $\mathfrak{L}(B)$ и т. д. При этом

$$Y_n(t) = \int_{\boldsymbol{R}} G(t-s) Y_n(s)\, ds, \quad t \in \boldsymbol{R}, \quad n \geq 0. \tag{11}$$

Лемма 2. *Для любого* $k \in \boldsymbol{N}$ *справедливо неравенство*

$$(\boldsymbol{M} \| X_0(0) \|^k)^{1/k} \leq \alpha (\boldsymbol{M} \| Y_0(0) \|^k)^{1/k},$$

где $\alpha := 4La^{-1}$.

Утверждение леммы 2 следует из равенства (10) и неравенства Гельдера.

Лемма 3. *Для любых* $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ *и* $k \in \boldsymbol{N}$ *справедливо неравенство*

$$(\boldsymbol{M} \|X_{n+1}(0)\|^k)^{1/k} \leq \alpha c \sum\nolimits_{j=0}^{n} (\boldsymbol{M} \|X_j(0)\|^{2k})^{1/2k} (\boldsymbol{M} \| X_{n-j}(0) \|^{2k})^{1/2k}. \tag{12}$$

Доказательство леммы 3 следует из представления (11) и неравенств Минковского и Коши.

Лемма 4. *Для любых* $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ *и* $k \in \boldsymbol{N}$ *справедливо неравенство*

$$(\boldsymbol{M} \| X_n(0) \|^k)^{1/k} \leq \frac{C_{2n}^n}{n+1} \alpha^{2n+1} c^n \lambda^{n+1}. \tag{13}$$

Лемма 4 доказывается с помощью утверждений лемм 2 и 3 и метода математической индукции. Нужное для проведения индукционного шага тождество содержится в [5] (тождество 11(а) на с. 123). При доказательстве леммы 4 проверяется, что правая часть неравенства (12) не превышает правой части неравенства (13) с индексом $n+1$ вместо n.

***Доказательство теоремы* 1.** Предположим, что условие (4) выполнено. Поскольку

$$C_{2n}^n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \to \infty,$$

то согласно лемме 4 для каждого $t \in \boldsymbol{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{M} \| X_n(t) \| < +\infty,$$

следовательно, для каждого $t \in \boldsymbol{R}$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) \tag{14}$$

сходится с вероятностью 1 по норме в $\mathfrak{L}(B)$ и его сумма $X(t)$ есть $\mathfrak{L}(B)$-значный случайный элемент. Полученный процесс $\{X(t)\colon t \in \boldsymbol{R}\}$ стационарен.

Покажем, что процесс X непрерывен на $\boldsymbol{R}$. Для этого достаточно убедиться, что процесс X непрерывен на каждом отрезке $[u, v] \subset \boldsymbol{R}$. Сначала заметим, что с вероятностью 1

$$\sup_{u \le t \le v} \| X_n(t) \| \le \int_{\boldsymbol{R}} g(s) \| Y_n(s) \| \, ds, \quad n \ge 0,$$

где

$$g(s) := \sup_{u \le t \le v} \| G(t-s) \| \le L \sup_{u \le t \le v} e^{-a|t-s|}, \quad s \in \boldsymbol{R},$$

причем

$$\int_{\boldsymbol{R}} g(s) ds = \tilde{\alpha} := L(2/a + u - v).$$

Согласно леммам 3 и 4 имеем

$$\boldsymbol{M}(\sup_{u \le t \le v} \| X_n(t) \|) \le \tilde{\alpha} \boldsymbol{M} \, \| Y_n(0) \| \le \alpha c \sum_{j=0}^{n-1} (\boldsymbol{M} \, \| X_j(0) \|^2)^{1/2} (\boldsymbol{M} \, \| X_{n-j-1}(0) \|^2)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} \frac{C_{2n}^n}{n+1} \alpha^{2n+1} c^n \lambda^{n+1}, \quad n \ge 0. \tag{15}$$

Таким образом, с учетом условия (4) и неравенства (15) можно утверждать, что ряд (14) с вероятностью 1 сходится по норме равномерно на каждом конечном отрезке. Поэтому процесс X непрерывен на $\boldsymbol{R}$.

Кроме того, из равенств (8), (9) и ограниченности оператора A с помощью аналогичных рассуждений получаем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} X_n'(t)$ с вероятностью 1 сходится по норме равномерно на каждом конечном отрезке $[u, v]$. Действительно, достаточно доказать сходимость $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{M}(\sup_{u \le t \le v} \| Y_n(t) \|)$. Поскольку

$$\boldsymbol{M}(\sup_{u \le t \le v} \| Y_n(t) \|) \le c \sum_{j=0}^{n-1} (\boldsymbol{M} \sup_{u \le t \le v} \| X_j(t) \|^2)^{1/2} (\boldsymbol{M} \sup_{u \le t \le v} \| X_{n-1-j}(t) \|^2)^{1/2},$$

и

$$\boldsymbol{M}(\sup_{u \le t \le v} \|X_n(t)\|^2) \le \tilde{\alpha}^2 \boldsymbol{M} \|Y_n(0)\|^2,$$

то с учетом лемм 3 и 4 имеем

$$\boldsymbol{M}(\sup_{u \le t \le v} \|Y_n(t)\|) \le \tilde{\alpha}^2 c \sum_{j=0}^{n-1} (\boldsymbol{M} \|Y_j(0)\|^2 \boldsymbol{M} \|Y_{n-1-j}(0)\|^2)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\tilde{\alpha}^2}{\alpha^2} c \frac{C_{2n}^n}{n+1} \alpha^{2n+1} c^n \lambda^{n+1}, \quad n \ge 1.$$

Следовательно, процесс $\{X(t)\colon t \in \boldsymbol{R}\}$ имеет с вероятностью 1 непрерывную производную и

$$X'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n'(t), \quad t \in \boldsymbol{R},$$

с вероятностью 1. Кроме того, с учетом (8) и (9) и того, что $A \in \mathfrak{L}(B)$, с вероятностью 1 для каждого $t \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$X'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} AX_n(t) + Y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} X_j(t)CY_{n-1-j}(t) =$$
$$= AX(t) + X(t)CX(t) + Y(t).$$

Теорема 1 доказана.

3. Периодические решения. Пусть число $\tau > 0$ фиксировано и функции $\{A, C\} \subset \boldsymbol{C}(\boldsymbol{R}, \mathfrak{L}(B))$ таковы, что

$$\forall\, t \in \boldsymbol{R}: \ A(t+\tau) = A(t), \ \ C(t+\tau) = C(t).$$

Пусть U: $\boldsymbol{R} \to \mathfrak{L}(B)$ — обратимозначное на $\boldsymbol{R}$ решение задачи

$$U'(t) = A(t)U(t), \quad t \in \boldsymbol{R},$$
$$U(0) = E,$$

где E — единичный оператор. Используемые ниже свойства функции U хорошо известны (см., например, [6]).

Периодический $\mathfrak{L}(B)$-значный процесс — это периодический процесс с периодом τ, а $\mathcal{P}$ — класс всех периодических процессов $\{Y(t)\colon t \in \boldsymbol{R}\}$ таких, что

$$\int_0^{\tau} \boldsymbol{M}\, \| Y(t) \|\, dt < +\infty.$$

Лемма 5. *Для того чтобы для каждого процесса* $Y \in \mathcal{P}$ *уравнение*

$$X'(t) = A(t)X(t) + Y(t), \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{16}$$

имело единственное периодическое решение X *такое, что*

$$\sup_{0 \le t \le \tau} \boldsymbol{M}\, \| X(t) \| < +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma(U(\tau)) \cap \{e^{i\varphi} \mid 0 \le \varphi \le 2\pi\} = \varnothing. \tag{17}$$

Доказательство леммы 1 следует из теоремы 1 [2]. При этом при условии (17) устанавливается следующее равенство:

$$X(n\tau + s) = U(s)X(n\tau) + U(s)\int_0^s U^{-1}(t)Y(n\tau + t)dt, \quad s \in [0, \tau], \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{18}$$

а также тот факт, что стационарный $\mathfrak{L}(B)$-значный процесс $\{X(n\tau)\colon\ n \in \mathbf{Z}\}$ удовлетворяет уравнению

$$X((n+1)\tau) = U(\tau)X(n\tau) + Z(n), \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{19}$$

где
$$Z(n) := \int_0^{\tau} U(\tau)U^{-1}(s)Y(n\tau + s)ds, \quad n \in \mathbf{Z},$$

причем $\boldsymbol{M}\, \|Z(0)\| < +\infty$. Пусть P_- — спектральный проектор, отвечающий лежащей внутри единичной окружности части спектра $\sigma(U(\tau))$, а $P_+ := E - P_-$, положим также $U_- := U(\tau)P_-$, $U_+ := U(\tau)P_+$. Для каждого $n \in \mathbf{Z}$

$$X(n\tau) = \sum_{j=0}^{+\infty} U_-^j Z(n-1-j) - \sum_{j=-\infty}^{-1} U_+^j (n-1-j), \tag{20}$$

причем ряд в правой части сходится по норме в $\mathfrak{L}(B)$ с вероятностью 1, поскольку при условии (17)

$$b := \sum_{j=0}^{+\infty} \|U_-^j\| + \sum_{j=-\infty}^{-1} \|U_+^j\| < +\infty,$$

и $M\|X(0)\| < +\infty$.

Пусть $\{Y_0(t) = Y(t):\ t \in \boldsymbol{R}\}$ — периодический $\mathfrak{L}(B)$-значный процесс такой, что

$$\mu := \sup_{k\ge 1} (M(\int_0^\tau \|Y(s)\| ds)^k)^{1/k} < +\infty. \tag{21}$$

Определим теперь последовательность периодических и периодически связанных $\mathfrak{L}(B)$-значных процессов $\{X_n(t):\ t \in \boldsymbol{R}\}$, $n \ge 0$, следующим образом. Пусть для $m \in \boldsymbol{Z}$

$$Z_0(m) := \int_0^\tau U(\tau)U^{-1}(s)Y_0(m\tau + s)ds,$$

$$X_0(m\tau) := \sum_{j=0}^{+\infty} U_-^j Z_0(m-1-j) - \sum_{j=-\infty}^{-1} U_+^j Z_0(m-1-j), \tag{22}$$

$$X_0(m\tau + s) := U(s)X_0(m\tau) + U(s)\int_0^s U^{-1}(t)Y_0(m\tau + t)dt, \quad s \in [0, \tau].$$

Построенный процесс $\{X_0(t):\ t \in \boldsymbol{R}\}$ периодичен и периодически связан с $\{Y(t):\ t \in \boldsymbol{R}\}$. Если процесс $\{X_n(t):\ t \in \boldsymbol{R}\}$ определен, то процесс $\{X_{n+1}(t):\ t \in \boldsymbol{R}\}$ с помощью периодического процесса

$$Y_{n+1}(t) := \sum_{j=0}^{n} X_j(t)C(t)X_{n-j}(t), \quad t \in \boldsymbol{R},$$

определяется так:

$$Z_{n+1}(m) := \int_0^\tau U(\tau)U^{-1}(s)Y_{n+1}(m\tau + s)ds,$$

$$X_{n+1}(m\tau) := \sum_{j=0}^{+\infty} U_-^j Z_{n+1}(m-1-j) - \sum_{j=-\infty}^{-1} U_+^j Z_{n+1}(m-1-j), \tag{23}$$

$$X_{n+1}(m\tau + s) := U(s)X_{n+1}(m\tau) + U(s)\int_0^s U^{-1}(\tau)Y_{n+1}(m\tau + t)dt, \quad s \in [0, \tau]; \quad m \in Z.$$

Все процессы X_n, $n \ge 0$, определяются по процессу Y и являются периодически связанными. Пусть для $n \ge 0$ и $k \ge 0$

$$u_n(k) := (M \sup_{0\le s\le \tau} \|X_n(s)\|^k)^{1/k}.$$

Лемма 6. *Предположим, что периодический процесс* $\{Y(t):\ t \in \boldsymbol{R}\}$ *удовлетворяет условию* (21). *Тогда для любого* $k \ge 1$

$$u_0(k) \le (1 + bd)\mu d, \tag{24}$$

где

$$d := \exp\left(\int_0^\tau \|A(s)\| ds\right).$$

Доказательство леммы 6 следует из представлений (22) с помощью элементарных неравенств.

Лемма 7. *При условиях леммы* 6 *для любых* $n \in N$ *и* $k \in N$

$$u_n(k) \leq b\tilde{c}d(1+d)\sum_{j=0}^{n-1} u_j(2k)u_{n-1-j}(2k), \tag{25}$$

где

$$\tilde{c} := \int_0^\tau \|C(s)\|\, ds.$$

Лемма 7 следует из представлений (23).

Лемма 8. *При условиях леммы* 6 *для любых* $n \in N \cup \{0\}$ *и* $k \in N$ *справедливо неравенство*

$$u_n(k) \leq \frac{C_{2n}^n}{n+1}((1+bd)d)^{2n+1}\left(\frac{b\tilde{c}(1+d)}{1+bd}\right)^n \mu^{n+1}. \tag{26}$$

Утверждение леммы 8 — это следствие леммы 4 и неравенств (24) и (25).

Теорема 2. *Пусть* $\{A, C\} \subset C(\boldsymbol{R}, \mathfrak{L}(B))$ — *периодические функции и* $\{Y(t): t \in \boldsymbol{R}\}$ — *периодический* $\mathfrak{L}(B)$*-значный процесс, удовлетворяющий условию* (21). *Если* $4(1+bd)(1+d)b\tilde{c}d^2\mu \leq 1$, *то уравнение*

$$X'(t) = A(t)X(t) + X(t)C(t)X(t) + Y(t), \quad t \in \boldsymbol{R},$$

имеет периодическое $\mathfrak{L}(B)$*-значное решение* $\{X(t): t \in \boldsymbol{R}\}$.

Доказательство. Из оценки (26) следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, сходится с вероятностью 1 равномерно на $[0, \tau]$ по норме в $\mathfrak{L}(B)$. Поэтому его сумма $\{X(t): t \in \boldsymbol{R}\}$ — периодический непрерывный $\mathfrak{L}(B)$-значный процесс. Далее, поскольку [2] с вероятностью 1

$$X_0'(t) = A(t)X_0(t) + Y(t), \quad t \in \boldsymbol{R},$$
$$X_n'(t) = A(t)X_n(t) + Y_n(t), \quad t \in \boldsymbol{R}, \quad n \geq 1, \tag{27}$$

то, как и при доказательстве теоремы 1, проверяется, что ряд из производных $\sum_{n=0}^{\infty} X_n'(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, также сходится с вероятностью 1 равномерно на любом периоде по норме в $\mathfrak{L}(B)$. Следовательно, процесс $\{X(t): t \in \boldsymbol{R}\}$ имеет непрерывную производную и с вероятностью 1

$$X'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n'(t), \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Из (27) и ограниченности операторов $A(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, следует, что процесс X — решение уравнения из теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Замечания. **1.** Результаты, аналогичные теоремам 1 и 2, могут быть получены для более общего уравнения Риккати из [1].

2. Условия (3) и (21) на процесс Y являются пока весьма жесткими, а условия (4) и (21) требуют определенной малости параметров c или $\tilde{c}$, λ или μ.

3. Вопросы разрешимости операторного уравнения Риккати изучались в [7].

1. *Дороговцев А. Я.* О периодических и ограниченных решениях операторного уравнения Риккати // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 239 – 242.
2. *Дороговцев А. Я.* Стохастически периодические решения дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами // Там же. – 1991. – **43**, № 4. – С. 489 – 496.
3. *Bharucha-Reid A. T.* Random Integral Equations. – New York: Acad. press, 1972. – 258 p.
4. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1954. – 186 с.
5. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
6. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.– М.: Мир, 1970. – 456 с.
7. *Lucas J.* Solving algebraic and differential Riccati operator equations // Linear Algebra Appl. – 1991. – **144**. – P. 71 – 83.

Получено 12.05.92