УДК 517.5

А. С. Романюк, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О НАИЛУЧШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ И КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ БЕСОВА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

The order estimates for the best trigonometric approximations and the Kolmohorov diameters of the classes $B^r_{p,\theta}$ of functions of many variables in the space L_q are obtained for certain values of the parameters p, q.

Одержані порядкові оцінки найкращих тригонометричних наближень, а також колмогорівських поперечників классів $B^r_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі L_q для деяких значень параметрів p і q.

В настоящей работе продолжается (см. [1 – 3]) изучение аппроксимационных свойств классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. Для упрощения формулировок так же, как и в работах [1 – 3], ограничимся рассмотрением классов функций с нулевыми средними по всем аргументам, т. е. будем предполагать, что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx_j = 0,\ j=\overline{1,m}$.

Пусть $f \in L_p(\pi_m)$, $p \in (1,\infty)$, и $\pi_m \in \prod_{j=1}^m [-\pi,\pi]$. Для каждого вектора $s=(s_1,\dots,s_m)$, $s_j \in N$, $j=\overline{1,m}$, положим $\rho(s)=\{k\colon 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}$, $|k_j| \in N$, $j=\overline{1,m}\}$,

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k(f)\, e^{i(k,x)},$$

где

$$c_k(f) = (2\pi)^{-m}\int_{\pi_m} f(t)e^{-i(k,t)}dt$$

— коэффициенты Фурье $f(x)$. В принятых обозначениях при $r=(r_1,\dots,r_m)$, $r_j>0$, $j=\overline{1,m}$, класс Бесова определяется следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot)\ \Big|\ \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s\in N^m} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \le 1\right\},$$

если $1 \le \theta < \infty$, и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(\cdot)\ \Big|\ \sup_{s\in N^m} 2^{(s,r)}\|\delta_s(f,x)\|_p \le 1\right\}.$$

Напомним, что при $\theta=\infty$ классы $B^r_{p,\theta}$ совпадают с известными классами С. М. Никольского H^r_p, а при $\theta=p=2$ — с классами W^r_2. Имеются также соответствующие вложения между классами $B^r_{p,p}$ и W^r_p (более подробно см., например, [1]).

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем предполагать, что вектор $r=(r_1,\dots,r_m)$ упорядочен таким образом, что $0<r_1=r_2=\dots=r_\nu<r_{\nu+1}\le\dots$ $\dots\le r_m$. Тогда через $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$ и $\gamma'=(\gamma'_1,\dots,\gamma'_m)$ обозначим векторы с координатами $\gamma_j=r_j/r_1$, $j=\overline{1,m}$, $\gamma'_j=\gamma_j$, при $j=\overline{1,\nu}$ и $\gamma_{j-1}<\gamma'_j<\gamma_j$ при $j=\nu+1,\dots,m$.

В п. 1 получены порядковые оценки величин

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) = \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_q \qquad (1)$$

в случае, когда $1 < p \le 2 < q < \infty$, и функции из класса $B^r_{p,\theta}$ имеют „малую гладкость". Случай „большой гладкости" изучен в работе автора [3]. Там же приведена соответствующая библиография, относящаяся к данному вопросу.

В п. 2 установлены порядки убывания колмогоровских поперечников

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_q) = \inf_{L_M\subset L_q} \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \inf_{a(\cdot)\in L_M} \| f(\cdot) - a(\cdot)\|_q, \qquad (2)$$

где L_M — M-мерные линейные многообразия в L_q, в двух случаях: $1 < p \le$ $\le 2 < q < \infty$ и $2 \le p < q < \infty$ на классах функций „большой гладкости". Отметим, что для некоторых других значений p и q оценки поперечников $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ найдены в работах [1, 2].

В результате изучения величин (1) и (2) при $\theta \in [1, 2)$ обнаружены некоторые факты, состоящие в следующем:

а) найденные ранее в работе [3] порядки величин $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ и установленные здесь порядковые оценки колмогоровских поперечников не совпадают;

б) при убывании параметра θ (сужение классов $B^r_{p,\theta}$) порядки поперечников не изменяются, а из результатов работы [3] следует, что порядки величин $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ уменьшаются.

В этом проявляется многомерная специфика классов $B^r_{p,\theta}$, поскольку в одномерном случае в аналогичных ситуациях подобных явлений нет.

Отметим также, что при тех же значениях r_1, p и q различия в оценках величин $e_M(F, L_q)$ и $d_M(F, L_q)$, где F — класс W^r_p либо H^r_p, не обнаружено.

При доказательстве результатов использованы некоторые идеи из [4 – 6] с соответствующей модификацией, позволяющей учитывать поведение функций более узких, чем W^r_p классов, и промежуточных между W^r_p и H^r_p.

1. Наилучшие тригонометрические приближения. Важное значение при получении оценок сверху величины (1) имеет следующее утверждение (см., например, [5]).

Лемма А. *Пусть* $2 < q < \infty$. *Для всякого тригонометрического полинома* $T(\Omega_N, x)$, *содержащего не более* N *гармоник, и для любого* $M < N$ *найдется тригонометрический полином* $T(\Omega_M, x)$, *у которого не более* M *коэффициентов отличны от нуля, и такой, что*

$$\| T(\Omega_N, x) - T(\Omega_M, x)\|_q \le \sqrt{N M^{-1}}\, \| T(\Omega_N, x)\|_2,$$

причем $\Omega_M \subset \Omega_N$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$. *Тогда при* $1 \le$ $\le \theta \le \infty$

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})_+}}{M^{(q/2)(r_1 - 1/p + 1/q)}},$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$, $\theta^{-1} + (\theta')^{-1} = 1$, $q^{-1} + (q')^{-1} = 1$.

Доказательство. Сначала получим оценку сверху. Пусть $f(x)$ — некоторая функция из класса $B^r_{p,\theta}$. По заданному натуральному числу M подберем числа $n,\ n_1,\ n_2$ из соотношений

$$2^n\ n^{\nu-1} \asymp M,\ \ n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2}-1\right)(\nu-1)\log n,\ \ n_2 = \frac{q}{2}n + \frac{q}{2}(\nu-1)\log n$$

и представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \left(\sum_{(s,\gamma)<n} + \sum_{n\le(s,\gamma)<n_1} + \sum_{n_1\le(s,\gamma)<n_2} + \sum_{(s,\gamma)\ge n_2} \right)\delta_s(f,x). \qquad (3)$$

Заметим, что в силу теоремы Литлвуда—Пэли (см., например, [4, с. 7]) каждое слагаемое в (3) есть некоторая функция из класса $B^r_{p,\theta}$. Приближающий полином для $f(x)$ будем искать в виде трех слагаемых

$$T_M(x) = \sum_{(s,\gamma)<n} \delta_s(f,x) + \sum_{n\le(s,\gamma)<n_1} P_1(\Omega_{N_s},x) + \sum_{n_1\le(s,\gamma)<n_2} P_2(\Omega_{M_s},x), \qquad (4)$$

где $P_1(\Omega_{N_s},x)$ и $P_2(\Omega_{M_s},x)$ — полиномы, которые будут сконструированы в процессе доказательства. Предположим, что полином $T_M(x)$, доставляющий требуемую оценку приближения, построен. Тогда из (3) и (4) следует

$$e_M(f,L_q) \overset{df}{=} \inf_{k^j,\,c_j} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)} \right\|_q \ll$$

$$\ll \left\| \sum_{n\le(s,\gamma)<n_1} (\delta_s(f,x) - P_1(\Omega_{N_s},x)) \right\|_q + \left\| \sum_{n_1\le(s,\gamma)<n_2} (\delta_s(f,x) - P_2(\Omega_{M_s},x)) \right\|_q +$$

$$+ \left\| \sum_{(s,\gamma)\ge n_2} \delta_s(f,x) \right\|_q = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3. \qquad (5)$$

Перейдем теперь к оценке полученных сумм.

Для оценки $\sum_1$ воспользуемся сначала теоремой Литлвуда – Пэли, потом неравенством Минковского и затем подберем полиномы $P_1(\Omega_{N_s},x)$ для каждого блока $\delta_s(f,x)$ согласно лемме А. В результате получим

$$\sum\nolimits_1 \ll \left\| \Big(\sum_{n\le(s,\gamma)<n_1} |\delta_s(f,x) - P_1(\Omega_{N_s},x)|^2 \Big)^{1/2} \right\|_q \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{n\le(s,\gamma)<n_1} \left\| (\delta_s(f,x) - P_2(\Omega_{M_s},x)) \right\|_q^2 \Big)^{1/2} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{n\le(s,\gamma)<n_1} \frac{2^{(s,1)}}{N_s} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_2^2 \Big)^{1/2}.$$

Применив теперь к $\|\delta_s(f,x)\|_2$ неравенство разных метрик Никольского (см., например, [4, с. 23]), продолжим оценку

$$\ll \Big(\sum_{n\le(s,\gamma)<n_1} \frac{2^{(s,1)}\, 2^{2(s,1)(1/p-1/2)}}{N_s} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\sum_{n\le(s,\gamma)<n_1} \frac{2^{\frac{2}{p}(s,1)}}{N_s} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{1/2}. \qquad (6)$$

Далее подберем по каждому s, удовлетворяющему условию $n \le (s,\gamma) < n_1$, числа N_s из равенства

$$N_s = \left[2^n n^{\nu-1} 2^{n_1(r_1 - 1/p)} 2^{(s,\gamma')(1/p - r_1)} 2^{(s,r)} \| \delta_s(f,x) \|_p n_1^{-\frac{\nu-1}{\theta'}} \right] + 1, \qquad (7)$$

где $[a]$ — целая часть числа a.

Покажем, что тогда количество гармоник в полиномах $P_1(\Omega_{N_s}, x)$ по всем s таким, что $n \le (s,\gamma) < n_1$, не превышает по порядку $2^n n^{\nu-1}$.

В силу неравенства Гельдера и оценки [4, с. 11]

$$\sum_{(s,\gamma) \le n} 2^{\alpha(s,\delta)} \ll 2^{\alpha n} n^{\nu-1}, \quad \alpha > 0, \qquad (8)$$

где $1 = \gamma_1 = \delta_1 = \ldots = \gamma_\nu = \delta_\nu$, $1 < \delta_j < \gamma_j$, $j = \nu+1, \ldots, m$, будем иметь

$$\sum_{n \le (s,\gamma) < n_1} N_s \ll n_1^{m-1} + 2^n n^{\nu-1} 2^{n_1(r_1 - 1/p)} n_1^{-\frac{\nu-1}{\theta'}} \times$$

$$\times \sum_{n \le (s,\gamma) < n_1} 2^{(s,\gamma')(1/p - r_1)} 2^{(s,r)} \| \delta_s(f,x) \|_p \ll n_1^{m-1} + 2^n n^{\nu-1} 2^{n_1(r_1 - 1/p)} n_1^{-\frac{\nu-1}{\theta'}} \times$$

$$\times \left(\sum_{n \le (s,\gamma) < n_1} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f,x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{n \le (s,\gamma) < n_1} 2^{(s,\gamma')(1/p - r_1)\theta'} \right)^{1/\theta'} \ll$$

$$\ll 2^n n^{\nu-1} 2^{n_1(r_1 - 1/p)} n_1^{-\frac{\nu-1}{\theta'}} \| f \|_{B^r_{p,\theta}} 2^{n_1(1/p - r_1)} n_1^{\frac{\nu-1}{\theta'}} \ll 2^n n^{\nu-1}.$$

Далее, подставляя в правую часть (6) вместо N_s его значения из (7), получаем

$$\sum\nolimits_1 \ll \left(\sum_{n \le (s,\gamma) < n_1} \frac{2^{(2/p)(s,1)}}{N_s} \| \delta_s(f,x) \|_p^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2}} n_1^{-\frac{\nu-1}{2}} 2^{\frac{n_1}{2}(1/p - r_1)} n_1^{\frac{\nu-1}{2\theta'}} \left(\sum_{n \le (s,\gamma) < n_1} 2^{(s,r)} \| \delta_s(f,x) \|_p 2^{(s,\gamma')(1/p - r_1)} \right)^{1/2}.$$

Применив к последней сумме сначала неравенство Гельдера, а затем воспользовавшись оценкой (8), после соответствующих преобразований будем иметь

$$\sum\nolimits_1 \ll 2^{-\frac{n}{2}} n_1^{-\frac{\nu-1}{2}} 2^{\frac{n_1}{2}(1/p - r_1)} n_1^{\frac{\nu-1}{2\theta'}} \| f \|_{B^r_{p,\theta}}^{1/2} 2^{\frac{n_1}{2}(1/p - r_1)} n_1^{\frac{\nu-1}{2\theta'}} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2}} n_1^{-\frac{\nu-1}{2}} 2^{n_1(1/p - r_1)} n_1^{\frac{\nu-1}{\theta'}} \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{(q-1)\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)}}{M^{(q/2)(r_1 - 1/p + 1/q)}}. \qquad (9)$$

Таким образом, для $\sum_1$ получаем требуемую оценку.

Переходя к оценке $\sum_2$, проделаем следующую процедуру. Для каждого $l \in N$, $n_1 \le l < n_2$, положим

$$S_l = \left(\sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f,x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta}, \quad m_l = \left[2^{-l\frac{q'}{q}} S_l^\theta 2^{-\frac{q'}{2}n} n^{\frac{(\nu-1)q'}{2}} \right], \qquad (10)$$

после чего разобьем сумму $\sum\limits_{n_1 \le (s,\gamma) < n_2} \delta_s(f,x)$ на две части:

$$\sum_{n_1 \le (s,\gamma) < n_2} \delta_s(f,x) = \sum_{n_1 \le l < n_2} \left(\sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}' \delta_s(f,x) + \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}'' \delta_s(f,x) \right), \quad (11)$$

где первая сумма внутри скобок содержит m_l блоков $\delta_s(f,x)$, соответствующих наибольшим числам $\|\delta_s(f,x)\|_p$, а вторая — остальные. При этом приближающие полиномы $P_2(\Omega_{M_s},x)$ будем строить согласно лемме А только для тех блоков $\delta_s(f,x)$, которые попали в первую сумму.

Аналогично тому, как это делалось при оценке $\sum_1$, находим

$$\sum\nolimits_2 \ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} 2^l \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}' \frac{\|\delta_s(f,x)\|_2^2}{M_s} \right)^{1/2} + \left\| \sum_{l=n_1}^{n_2} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}'' \delta_s(f,x) \right\|_q =$$

$$= I_1 + I_2. \quad (12)$$

Оценим сначала слагаемое I_1. Пусть $r_1 \ge \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$. Положим

$$M_s = \left[2^{l/2} \|\delta_s(f,x)\|_2 \, 2^{n_1\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)} \left(2^n n^{\nu-1}\right)^{1-\frac{q'}{2\theta'}} \right] + 1, \quad (13)$$

где $l \le (s,\gamma) < l+1$, $n_1 \le l < n_2$.

Тогда количество гармоник в приближающих полиномах $P_2(\Omega_{M_s},x)$ оценивается следующим образом:

$$\sum_{l=n_1}^{n_2} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}' M_s \ll 2^{n_1\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)} \left(2^n n^{\nu-1}\right)^{1-\frac{q'}{2\theta'}} \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{l/2} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}' \|\delta_s(f,x)\|_2. \quad (14)$$

Далее, учитывая, что во внутренней сумме правой части (14) содержится m_l слагаемых, вследствие неравенств Никольского и Гельдера находим

$$\sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{l/2} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}' \|\delta_s(f,x)\|_2 \ll \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{-l(r_1 - 1/p)} \times$$

$$\times \left(\sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}' \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \, 2^{(s,r)\theta} \right)^{1/\theta} m_l^{1/\theta'} \ll \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{-l(r_1 - 1/p)} S_l \, m_l^{1/\theta'} \ll$$

$$\ll 2^{\frac{q'n}{2\theta'}} n^{(\nu-1)\frac{q'}{2\theta'}} \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{-l\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)} S_l^\theta + \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{-l(r_1 - 1/p)} S_l =$$

$$= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \quad (15)$$

Принимая во внимание, что, с одной стороны, $r_1 \dot{\ge} \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, для $\mathcal{I}_1$ получаем оценку

$$\mathcal{I}_1 \le 2^{\frac{nq'}{2\theta'}} n^{(\nu-1)\frac{q'}{2\theta'}} 2^{-n_1\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)} \sum_{l=n_1}^{n_2} S_l^\theta \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{nq}{2}(r_1 - 1/p)}\, n^{(\nu-1)\frac{q'}{2\theta'}}\, n^{(\nu-1)(q/2-1)\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)}. \tag{16}$$

С другой стороны, поскольку $r_1 < 1/p$, то

$$\mathcal{J}_2 \le 2^{-n_2(r_1 - 1/p)} \sum_{l=n_1}^{n_2} S_l \ll 2^{-n_2(r_1 - 1/p)} = 2^{-\frac{nq}{2}(r_1 - 1/p)}\, n^{-\frac{q}{2}(\nu-1)(r_1 - 1/p)}. \tag{17}$$

Сопоставляя (16) и (17), имеем $\mathcal{J}_2 \ll \mathcal{J}_1$, и, следовательно, соотношение (15) принимает вид

$$\sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{l/2} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}{}' \|\delta_s(f,x)\|_2 \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{nq}{p}(r_1 - 1/p)}\, n^{(\nu-1)\frac{q'}{2\theta'}}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{q}{2}-1\right)\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (14), получаем требуемую оценку

$$\sum_{l=n_1}^{n_2} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}{}' M_s \ll 2^n n^{\nu-1}.$$

Теперь возвратимся к оценке I_1. Подставив вместо M_s его значение из (13) и воспользовавшись оценкой (18), будем иметь

$$I_1 \ll \left\{ \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{l/2} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1}{}' \|\delta_s(f,x)\|_2 \right\}^{1/2} 2^{-\frac{n_1}{2}\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)} \left(2^n n^{\nu-1}\right)^{\frac{q'}{4\theta'} - \frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{nq}{2}(r_1 - 1/p + 1/q)}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{q}{2}-1\right)\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)}\, n^{(\nu-1)\left(\frac{q'}{\theta'}-1\right)} \asymp$$

$$\asymp \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{(q-1)\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)}}{M^{(q/2)(r_1 - 1/p + 1/q)}}, \tag{19}$$

и, таким образом, случай $r_1 \ge \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$ рассмотрен.

Переходя к рассмотрению случая $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} < r_1 < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, заметим, что он имеет смысл только при $\theta' > q'$. Полагая для каждого s такого, что $l \le$ $\le (s,\gamma) < l+1$, $n_1 \le l < n_2$

$$M_s = \left[\; 2^{l/2} \|\delta_s(f,x)\|_2\, 2^{n_2\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)} \left(2^n n^{\nu-1}\right)^{1 - \frac{q'}{2\theta'}} \right] + 1$$

и рассуждая так же, как и в предыдущем случае, находим

$$I_1 \ll \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{\theta'} - 1\right)}}{M^{(q/2)(r_1 - 1/p + 1/q)}} \le M^{-\frac{q}{2}(r_1 - 1/p + 1/q)}. \tag{20}$$

Объединяя соотношения (19) и (20), получаем требуемую оценку

$$I_1 \ll \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{(q-1)\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)_+}}{M^{(q/2)(r_1 - 1/p + 1/q)}}. \tag{21}$$

Для оценки слагаемого I_2 потребуется следующая лемма, доказанная В. Н. Темляковым [4, с. 25].

Лемма Б. *Пусть заданы* $1 < p < q < \infty$ *и* $f \in L_q(\pi_m)$. *Тогда*

$$\|f\|_q \ll \left\{ \sum_s \left(\|\delta_s(f, x)\|_p \, 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^q \right\}^{1/q},$$

где $\|s\|_1 = s_1 + \ldots + s_m$.

Прежде чем воспользоваться этой леммой, занумеруем блоки $\delta_s(f, x)$, входящие в каждую сумму $\sum''_{l \le (s,\gamma) < l+1} \delta_s(f, x)$, $n_1 \le l < n_2$, в порядке убывания чисел $\|\delta_s(f, x)\|_p$ и обозначим их $a_{i_l}(f)$. Тогда из определения S_l будем иметь

$$a_{i_l}(f) \ll i_l^{-1/\theta} \, 2^{-l r_1} \, S_l,$$

и в силу леммы Б

$$I_2 \ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} \sum_{i_l > m_l} a_{i_l}^q(f) \, 2^{l\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)q} \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} \sum_{i_l > m_l} a_{i_l}^{\theta}(f) \, a_{i_l}^{q-\theta}(f) \, 2^{l\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)q} \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \, 2^{-l(q-\theta)r_1} \, S_l^{q-\theta} \, 2^{l\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)q} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \, \|\delta_s(f, x)\|_p^{\theta} \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \, 2^{-l\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)q} \, S_l^{q-\theta} \, S_l^{\theta} \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \, 2^{-l\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} \, S_l^{q} \right)^{1/q}.$$

Далее, подставляя вместо m_l его значение из (10) и принимая во внимание, что $q' = q/(q-1)$, получаем

$$I_2 \ll \left(2^{-\frac{nq'}{2}\frac{q-\theta}{\theta}} \, n^{-\frac{(\nu-1)q'}{2}\frac{q-\theta}{\theta}} \right)^{1/q} \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{-lq\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'}\right)} S_l^{\theta} \right)^{1/q}. \qquad (22)$$

Пусть $r_1 \ge 1/p - q'/(q\theta')$. Тогда второй сомножитель в (22) оценивается сверху величиной $2^{-n_1\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'}\right)}$, и в силу того, что $n_1 = \frac{q}{2} n - \left(\frac{q}{2} - 1\right)(\nu - - 1) \log n$, для I_2 получаем оценку

$$I_2 \ll \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{(q-1)\left(r_1 - 1/p + \frac{q'}{q\theta'}\right)}}{M^{(q/2)(r_1 - 1/p + 1/q)}}. \qquad (23)$$

Аналогично в случае $1/p - 1/q < r_1 < 1/p - q'/(q\theta')$ находим

$$I_2 \ll M^{-\frac{q}{2}\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}. \tag{24}$$

Объединяя (23) и (24), имеем

$$I_2 \ll \frac{(\log^{\nu-1} M)^{(q-1)\left(r_1-1/p+\frac{q'}{q\theta'}\right)_+}}{M^{(q/2)(r_1-1/p+1/q)}}. \tag{25}$$

Наконец, осталось получить оценку для $\sum_3$. Заметим, что в силу теоремы 2 из [1]

$$\sum\nolimits_3 \ll 2^{-n_2\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}$$

и учитывая, что $n_2 = \frac{q}{2} + \frac{q}{2}(\nu-1)\log n$, находим

$$\sum\nolimits_3 \ll \frac{(\log^{\nu-1} M)^{(q-1)\left(r_1-1/p+\frac{q'}{q\theta'}\right)_+}}{M^{(q/2)(r_1-1/p+1/q)}}. \tag{26}$$

Теперь, подставляя (21) и (25) в (12), а затем (9), (12), (26) в (5), получаем требуемую оценку сверху.

При установлении оценки снизу будем пользоваться соотношением

$$e_M(f, L_q) = \inf_{\Omega_M} \sup_{\substack{P \in L^{\perp}(\Omega_M), \\ \|P\|_{q'} \le 1}} \left| \int_{\pi_m} f(x) P(x)\, dx \right|, \tag{27}$$

где $L^{\perp}(\Omega_M)$ — множество функций, ортогональных подпространству Ω_M. Отметим, что это соотношение следует из более общего результата С. М. Никольского [7, с. 25]. Заметим также, что, как отмечалось, например, в [3], оценку снизу достаточно установить для $\nu = m$.

Пусть задано натуральное число M. Подберем число l из условия

$$l = \frac{q}{2}\log M - (m-1)(q-1)\log\log M \tag{28}$$

и рассмотрим ядро Дирихле вида

$$D_l(x) = \sum_{(s,1)\le l} \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}.$$

Поскольку $\forall s\colon (s,1) \le l$ и $p \in (1,\infty)$

$$\|\delta_s(D_l, x)\|_p = \Big\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} \Big\|_p \asymp 2^{(s,1)(1-1/p)},$$

то

$$\|D_l\|_{B^r_{p,\theta}} \ll \left(\sum_{(s,1)\le l} 2^{(s,r)\theta}\, 2^{(s,1)(1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} \ll 2^{l(r_1+1-1/p)}\, l^{\frac{m-1}{\theta}}$$

Следовательно, функция

$$f(x) = 2^{l\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)}\, l^{-\frac{m-1}{\theta}} D_l(x) \tag{29}$$

принадлежит классу $C_1 B^r_{p,\theta}$ (здесь и ниже через $C_1, C_2, \ldots$ обозначаются положительные постоянные, зависящие, возможно, только от параметров r, θ, p, q).

Далее, пусть Ω_M — некоторый набор из M m-мерных векторов с целочисленными координатами. Обозначим $u(x) = \sum'_{n_k \in \Omega_M} e^{i(n_k, x)}$, где штрих означает, что суммируются только те гармоники с „номерами" из Ω_M, которые содержатся в $D_l(x)$, и рассмотрим функцию $F(x) = D_l(x) - u(x)$.

Воспользовавшись оценкой из [8], а также учитывая, что $1 < q' < 2$, получим

$$\|F\|_{q'} \le \|D_l(x)\|_{q'} + \|u\|_2 << 2^{l/q}\, l^{\frac{m-1}{q'}} + \sqrt{M}.$$

Отсюда следует, что функция

$$P(x) = C_2 \left(2^{l/q}\, l^{\frac{m-1}{q'}} + \sqrt{M} \right)^{-1} F(x) \tag{30}$$

удовлетворяет условиям, налагаемым правой частью в (27). Таким образом, подставляя (30) и (29) в (27) и принимая во внимание, что для l из (28) $2^{l/q}\, l^{\frac{m-1}{q'}} + \sqrt{M} << 2^{l/q}\, l^{\frac{m-1}{q'}}$ и $2^l l^{m-1} - M >> 2^l l^{m-1}$, получаем

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) >> \frac{2^l l^{m-1} - M}{2^{l(r_1+1-1/p)}\, l^{(m-1)/\theta} (2^{l/q}\, l^{(m-1)/q'} + \sqrt{M})} >>$$

$$>> \frac{2^l l^{m-1}}{2^{l(r_1+1-1/p)}\, l^{(m-1)/\theta}\, 2^{l/q}\, l^{(m-1)/q'}} \asymp \frac{l^{(m-1)(1/q-1/\theta)}}{2^{l(r_1-1/p+1/q)}} \asymp$$

$$\asymp \frac{(\log^{m-1} M)^{(q-1)\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'}\right)}}{M^{(q/2)(r_1-1/p+1/q)}}. \tag{31}$$

Полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху при $r_1 \ge \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$. Если же $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} < r_1 < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, то отметим следующее.

Поскольку в этом случае оценка сверху не зависит от размерности пространства R^m, то оценку снизу достаточно установить при $m = 1$. Но в одномерном случае требуемая оценка получается с помощью тех же рассуждений, что и оценка (31). Теорема доказана.

Отметим, что порядковые оценки величин $e_M(W^r_p, L_q)$ и $e_M(H^r_p, L_q)$ при $1 < p \le 2 < q < \infty$ получены в работах [5, 9].

2. Колмогоровские поперечники классов $B^r_{p,\theta}$. Здесь, как уже отмечалось в начале работы, будем изучать поведение величин $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ в случае, когда $1 < p \le 2 < q < \infty$ или $2 \le p < q < \infty$ и функции из класса $B^r_{p,\theta}$ имеют „большую гладкость".

Относительно колмогоровских поперечников классов $B^r_{p,\theta}$ отметим работы [1, 2], где найдены их порядки для некоторых областей изменения параметров p и q. Порядковые оценки $d_M(W^r_p, L_q)$ и $d_M(H^r_p, L_q)$ в областях $1 < p \le 2 \le \le q < \infty$ или $2 \le p \le q < \infty$ и при „больших гладкостях" найдены В. Н. Темляковым (см., например, [4]) методом, который отличается от применяемого здесь. В своих рассуждениях мы используем метод дискретизации, который применялся в [6] при установлении оценок поперечников классов $\overline{W}_p^r$ и $\overline{H}_p^r$, являющихся пересечением конечного числа классов $W_p^{r^i}$ и $H_p^{r^i}$, $i=\overline{1,m}$, а также в [1] при получении оценки снизу $d_M(B_{p,\theta}^r, L_q)$ в случае $1<p\le q\le 2$. При этом нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть l_p^m обозначает пространство R^m, снабженное нормой

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty; \\ \max\limits_{1\le i\le m} |x_i|, & p=\infty, \end{cases}$$

и B_p^m — единичный шар в l_p^m.

Если S — некоторое подмножество целочисленной решетки, то $|S|$ обозначает число элементов S.

Теорема А [6]. *Между пространством тригонометрических полиномов вида* $f(t) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{i(k,t)}$ *и пространством* $R^{2^{(s,1)}}$ *устанавливается изоморфизм путем сопоставления функции* $f(\cdot)$ *вектора* $\delta_s f^j = \{f_n(\tau_j)\} \in R^{2^{(s,1)}}$

$$f_n(t) = \sum_{\operatorname{sgn} k_l = \operatorname{sgn} n_l} c_k e^{i(k,t)}, \quad l=\overline{1,m}, \quad n=(\pm 1, \dots, \pm 1) \in R^m$$

$$\tau_j = (\pi 2^{2-s_j} j_1, \dots, \pi 2^{2-s_j} j_m), \quad j_i = 1, \dots, 2^{s_j-1}, \quad i=\overline{1,m},$$

и порядковое равенство

$$\|\delta_s(f,x)\|_p \asymp \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^p\right)^{1/p}, \quad 1<p<\infty.$$

Лемма В [6]. *Пусть* $f(x) = \sum\limits_{s\in S} \delta_s(f,x)$, $s\in N^m$, $p\in(1,\infty)$. *Тогда*

$$|S|^{(1/2-1/p)_-} \left(\sum_{s\in S} \|\delta_s(f,x)\|_p^p\right)^{1/p} << \|f\|_p <<$$

$$<< |S|^{(1/2-1/p)_+} \left(\sum_{s\in S} \|\delta_s(f,x)\|_p^p\right)^{1/p},$$

где $a_- = \min\{a, 0\}$.

Лемма Г [10]. *Пусть* $n<m$, $\beta = (1/p-1/q)/(1-2/q)$. *Тогда*

$$d_m(B_p^m, L_q^m) \asymp \begin{cases} \min\{1, m^{2\beta/q} n^{-\beta}\}, & 2\le p<q<\infty; \\ \max\left\{ m^{1/q-1/p}, \min\{1, m^{1/q} n^{-1/2}\}\sqrt{1-n/m} \right\}. & 1\le p\le 2<q\le\infty. \end{cases}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $1\le\theta\le\infty$. *Тогда*

$$d_m(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp \begin{cases} \dfrac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}}{M^{r_1 - 1/p + 1/2}}, & 1 < p \le 2 < q < \infty, \; r_1 > \dfrac{1}{p}; \\ \dfrac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}}{M^{r_1}}, & 2 \le p < q < \infty, r_1 > \beta. \end{cases}$$

Доказательство. Сначала получим оценку сверху в случае $2 \le p < q < \infty$. При этом заметим, что поскольку $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{2,\theta}$, то достаточно рассмотреть случай $p = 2$. Обозначим $S_{l,k} = \{s \in N^m \mid l - 1 \le (s, \gamma) < l, \; (s, 1) = k, \; k, l \in N\}$. Тогда для $\| S_{l,k} \| = \bigcup_{s \in S_{l,k}} \rho(s)$ будем иметь $\| S_{l,k} \| = |S_{l,k}| \, 2^k$. Далее, по заданному M подберем число μ из условия $\mu^{\nu-1} 2^{\mu} \asymp M$ и положим

$$M_{l,k} = \begin{cases} \| S_{l,k} \|, & m \le k \le l, \, l \le \mu; \\ |S_{l,k}| 2^{\mu + \alpha\mu - 2\alpha l + \alpha k}, & m \le k \le l, \, l > \mu, \end{cases}$$

где α — число, удовлетворяющее условию $0 < \alpha < 2 r_1 - 1$.

Убедимся, что $\sum_{l \ge m} \sum_{k=1}^{l} M_{l,k} << M$. Имеем

$$\sum_{l \ge m} \sum_{k=m}^{l} M_{l,k} = \sum_{k=m}^{\mu} \sum_{k=m}^{l} M_{l,k} + \sum_{l > \mu} \sum_{k=m}^{l} M_{l,k} \le$$

$$\le \sum_{l=m}^{\mu} \sum_{k=m}^{l} \| S_{l,k} \| + \sum_{l > \mu} \sum_{k=m}^{l} |S_{l,k}| \, 2^{\mu + \alpha\mu - 2\alpha l + \alpha k} \asymp$$

$$\asymp \sum_{(s,\gamma) \le \mu} 2^{(s,1)} + \sum_{l > \mu} \sum_{(s,\mu) < l} 2^{\mu + \alpha\mu - 2\alpha l + \alpha(s,1)} \asymp$$

$$\asymp 2^{\mu} \mu^{\nu-1} + \sum_{l > \mu} 2^{\mu + \alpha\mu - \alpha l} \, l^{\nu-1} \asymp \mu^{\nu-1} \, 2^{\mu} \asymp M.$$

Пусть $\mathcal{T}_{l,k}$ обозначает множество полиномов с гармониками из $S_{l,k}$. Предположим сначала, что $\theta \ge 2$. Тогда в силу неравенства Гельдера с показателем $\theta/2$

$$\left(\sum_{s \in S_{l,k}} \| \delta_s(f,x) \|_2^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \| \delta_s(f,x) \|_2^{\theta} \right)^{1/\theta} |S_{l,k}|^{1/2 - 1/\theta}. \tag{32}$$

Следовательно, с одной стороны, для $f \in B^r_{2,\theta} \cap \mathcal{T}_{l,k}$ согласно (32) и теореме А будем иметь

$$\| f \|_{B^r_{2,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in S_{l,k}} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f,x) \|_2^{\theta} \right)^{1/\theta} \ge 2^{r_1 l} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \| \delta_s(f,x) \|_2^{\theta} \right)^{1/\theta} \ge$$

$$\ge |S_{l,k}|^{1/\theta - 1/2} \, 2^{r_1 l} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \| \delta_s(f,x) \|_2^2 \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp 2^{r_1 l - k/2} |S_{l,k}|^{1/\theta - 1/2} \left(\sum_{s \in S_{l,k}} \sum_{j=1}^{2^k} |\delta_s f^j|^2 \right)^{1/2}. \tag{33}$$

Таким образом, каждой функции из $B^r_{2,\theta}\cap\mathcal{T}_{l,k}$ с помощью соотношения (33) сопоставляется шар радиуса $\rho\, 2^{-r_1 l+k/2}\,|S_{l,k}|^{1/2-1/\theta}$, $\rho>0$, конечномерного пространства $l_2^{\|S_{l,k}\|}$. С другой стороны, в силу леммы В и теоремы А имеем

$$\|g\|_q \ll |S_{l,k}|^{1/2-1/q}\left(\sum_{s\in S_{l,k}}\|\delta_s(g,x)\|_q^q\right)^{1/q}\ll$$

$$\ll |S_{l,k}|^{1/2-1/q}\,2^{-k/q}\left(\sum_{s\in S_{l,k}}\sum_{j=1}^{2^k}|\delta_s g^j|^q\right)^{1/q}. \tag{34}$$

После проведения дискретизации согласно соотношениям (33) и (34) получаем

$$d_M(B^r_{2,\theta},L_q)\ll\sum_{l,k}d_{M_{l,k}}(B^r_{2,\theta}\cap\mathcal{T}_{l,k},L_q\cap\mathcal{T}_{l,k})\ll$$

$$\ll\sum_{l>\mu}\sum_{k=m}^{l}2^{-r_1 l+k/2-k/q}\,|S_{l,k}|^{1-1/q-1/\theta}\,d_{M_{l,k}}\left(B_2^{\|S_{l,k}\|},l_q^{\|S_{l,k}\|}\right).$$

Далее, воспользовавшись леммой Г и приняв во внимание, что $\beta=\frac{1}{2}$, продолжим оценку

$$\ll\sum_{l>\mu}\sum_{k=m}^{l}2^{-r_1 l+k/2-k/q}\,|S_{l,k}|^{1-1/q-1/\theta}\frac{\left(|S_{l,k}|2^k\right)^{1/q}}{\left(|S_{l,k}|2^{\mu+\alpha\mu-2\alpha l+\alpha k}\right)^{1/2}}\asymp$$

$$\asymp\sum_{l>\mu}2^{-r_1 l+\alpha l-\mu/2-\alpha\mu/2}\sum_{k=m}^{l}2^{k/2}\,|S_{l,k}|^{1/2-1/\theta}\,2^{-\alpha k/2}\ll$$

$$\ll\sum_{l>\mu}2^{-r_1 l+\alpha l-\mu/2-\alpha\mu/2+l/2-\alpha l/2}\,l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}\asymp$$

$$\asymp 2^{-\mu/2-\alpha\mu/2}\sum_{l>\mu}2^{-l(r_1-\alpha/2-1/2)}\,l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}\ll\mu^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}\,2^{-\mu r_1}\asymp$$

$$\asymp\frac{\left(\log^{\nu-1}M\right)^{r_1+1/2-1/\theta}}{M^{r_1}}.$$

Если же $1\le\theta<2$, то рассуждения аналогичны: нужно только вместо соотношения (32) воспользоваться оценкой

$$\left(\sum_{s\in S_{l,k}}\|\delta_s(f,x)\|_2^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{s\in S_{l,k}}\|\delta_s(f,x)\|_2^\theta\right)^{1/\theta}.$$

Оценка сверху в случае $1<p\le 2<q<\infty$ следует из полученной. Действительно, поскольку при $1<p\le 2$ в силу неравенства Никольского

$$\|f\|_{B^r_{2,\theta}}\asymp\left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\,\|\delta_s(f,x)\|_p^\theta\right)^{1/\theta}\ge$$

$$\ge\left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\,2^{(s,1)(1/2-1/p)\theta}\,\|\delta_s(f,x)\|_2^\theta\right)^{1/\theta}\asymp$$

$$\asymp \left(\sum_s 2^{(s,\, r-1/p+1/2)\theta} \, \|\delta_s(f,x)\|_2^\theta \right)^{1/\theta} \asymp \|f\|_{B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}},$$

где $r-1/p+1/2$ обозначает вектор с координатами $r_j-1/p+1/2$, $j=\overline{1,m}$, то отсюда следует, что $B_{p,\theta}^r \subset C_3 B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}$, $C_3>0$. Значит,

$$d_M(B_{p,\theta}^r, L_q) \le d_M(B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}, L_q) \ll \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1/p+1/2+(1/2-1/\theta)_+}}{M^{r_1-1/p+1/2}}.$$

Оценки снизу в обоих случаях вытекают из найденных ранее оценок в других ситуациях.

В случае $1<p\le 2<q<\infty$, полагая в теореме 4 из [1] $q=2$, находим

$$d_M(B_{p,\theta}^r, L_q) \ge d_M(B_{p,\theta}^r, L_2) \asymp \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1/p+1/2+(1/2-1/\theta)_+}}{M^{r_1-1/p+1/2}}.$$

Во втором случае, воспользовавшись теоремой 1 из [2], при $q=p$ получаем

$$d_M(B_{p,\theta}^r, L_q) \ge d_M(B_{p,\theta}^r, L_p) \asymp \frac{\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+(1/2-1/\theta)_+}}{M^{r_1}}.$$

Теорема доказана.

1. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн.– 1991. – **43**, № 10. – С. 1398–1408.
2. *Романюк А. С.* О колмогоровских и линейных поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных // Исследования по теории приближения функций. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 86–92.
3. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^r$. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535–1547.
4. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
5. *Белинский Э. С.* Приближение плавающей системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль, 1988.– С. 16–33.
6. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\tilde{W}_p^\alpha$ и $\tilde{H}_p^\alpha$ в пространстве L_q // Изв. АН СССР. Сер. мат.– 1985.– **49**, № 5.– С. 916–934.
7. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М. : Наука, 1987. – 424 с.
8. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α-ядра Дирихле в смешанной норме // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 1. – С. 32–43.
9. *Белинский Э. С.* Приближение плавающей системой экспонент на классах периодических гладких функций // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 46–47.
10. *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 2. – С. 384–391.

Получено 19.03.92