УДК 517.983

А. Я. Шкляр, канд. физ.-мат. наук (НМЦ „Интеллектуальные системы" Киев. ун-та)

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ТРЕХЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

The criteria are established for the correctness of the Cauchy problem for the equations $y^{(2n)} + Ay^{(n)} + By = 0$, $t \in [0, \infty)$, where $n > 1$, A, B are arbitrary commuting self-adjoint operators in a Hilbert space. For $n = 2$, the criterion is illustrated by using an example of the dynamic equation for exponentially stratified rotating compressible fluid.

Встановлено критерії коректності задачі Коші для рівнянь $y^{(2n)} + Ay^{(n)} + By = 0$, $t \in [0, \infty)$, де $n > 1$, A, B – довільні самоспряжені оператори у гільбертовому просторі, які комутують. При $n = 2$ критерій проілюстровано на прикладі рівняння динаміки експоненціально стратифікованої стисливої рідини, яка обертається.

Пусть A, B — произвольные коммутирующие (перестановочные) самосопряженные операторы (к. с. о.) в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Перестановочность A и B означает [1], что $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}(R^1)$: $E_A(\Delta_1)E_B(\Delta_2) = E_B(\Delta_2)E_A(\Delta_1)$, где спектральные меры E_A и E_B — разложения единицы A и B соответственно. На основе спектральной теории пары операторов (A, B) в настоящей статье изучена корректность задачи Коши на $R_+ = [0, +\infty)$ для уравнений

$$y^{(2n)}(t) + Ay^{(n)}(t) + By(t) = 0 \tag{1}$$

при $n > 1$. Данная работа является непосредственным продолжением статьи [2], где корректность задачи Коши для (1) на R_+ изучалась при $n = 1$.

1. Напомним некоторые определения. Говорят, что оператор B подчинен оператору A, если $D(A) \subseteq D(B)$ и $\exists\, 0 \le a, b < +\infty$ такие, что

$$\| Bx \|^2 \le a^2 \| Ax \|^2 + b^2 \| x \|^2 \quad \forall x \in D(A). \tag{2}$$

В данном случае это эквивалентно тому, что $D(A) \subseteq D(B)$. Если B подчинен оператору A и (2) выполнено при некоторых $0 \le a < 1$, $0 \le b < +\infty$, то говорят, что B сильно подчинен оператору A.

Известно [1], что для коммутирующих самосопряженных операторов A и B существует (единственное) совместное разложение единицы — спектральная мера E на $\mathcal{B}(R^2)$: $A = \int_{R^2} \lambda dE_{\lambda,\mu}$, $B = \int_{R^2} \mu dE_{\lambda,\mu}$. При этом $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}(R^1)$: $E(\Delta_1 \times \Delta_2) = E_A(\Delta_1)E_B(\Delta_2)$. Носитель спектральной меры E в R^2 $\operatorname{supp} E$ называется совместным спектром A и B и обозначается $\sigma(A, B)$. Дальнейшие сведения о $\sigma(A, B)$ см. в [2].

Обозначим $\forall k \ge 1$: $E_k = E([-k, k] \times [-k, k])$; $D(A) \cap D(B)$ плотно в H, поскольку $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k H \subseteq D(A) \cap D(B)$. В рамках данной статьи введем следующие определения.

***Определение* 1.** *Назовем* $y(t)$ *слабым решением* (*сл. р.*) (*задачи Коши для*) *уравнения* (1) *на* R_+ *с начальными данными* (*н. д.*) $\{f_i\}_{i=0}^{2n-1} \in H^{2n}$, *если* $y(t) \in C(R_+, H)$ *и*

$$\forall g \in D(A) \cap D(B): (y(t), g)^{(2n)},\ (y(t), Ag)^{(n)},\ (y(t), Bg) \in C(R_+)$$

и

$$(y(t), g)^{(2n)} + (y(t), Ag)^{(n)} + (y(t), Bg) = 0 \quad \forall t \in R_+,$$

причем $y(0) = f_0$ *и* $\forall g \in D(A) \cap D(B)$: $(y(t), g)^{(i)}|_{t=0} = (f_i, g)$, $i = \overline{1, 2n-1}$.

Определение 2. *Назовем уравнение* (1) *корректным* (*относительно задачи Коши на* R_+), *если для произвольного* $\{f_i\}_{i=0}^{2n-1} \in H^{2n}$ *существует единственное сл. р.уравнения* (1) *на* R_+ *с начальными данными* $\{f_i\}_{i=0}^{2n-1}$.

2. Напомним критерий корректности уравнения (1) при $n = 1$, полученный в [2]. Для каждого $(\lambda, \mu) \in R^2$ обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического полинома $\omega^2 + \lambda\omega + \mu$; при $i = 0, 1$: $\psi_i(\lambda, \mu, t)$, $t \in R_+$, — решение скалярного уравнения $\psi'' + \lambda\psi' + \mu\psi = 0$ такое, что $\psi_i^{(j)}(\lambda, \mu, 0) = \delta_i^j$, $j = 0, 1$, где δ_i^j — символ Кронекера.

Теорема 1. *Уравнение* $y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0$ *с к. с. о.* A, B *корректно тогда и только тогда, когда выполнено одно из эквивалентных условий*:

1) $\exists\, 0 < \gamma < +\infty$ $\forall\, (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$: $\max\limits_{i=1,2} \operatorname{Re} \omega_i (\lambda, \mu) \le \gamma$;

2) $\exists\, 0 < \gamma < +\infty$: $\sigma(A, B) \subseteq \{(\lambda, \mu) \mid \lambda \ge -\gamma, \quad \mu \ge -\gamma\lambda - \gamma^2\}$;

3) A *полуограничен снизу*, $B_- \overset{\text{def}}{=} BE_B(-\infty, 0)$ *подчинен* A $(D(A) \subseteq D(B_-))$.

В этом случае для произвольного $\{f_i\}_{i=0}^{1} \in H^2$ *существует единственное сл. р. уравнения* (1) *на* R_+ *с н. д.* $\{f_i\}_{i=0}^{1}$, *имеющее вид* $y(t) = \sum_{i=0}^{1} \psi_i(A, B, t) f_i$.

3. Рассмотрим теперь уравнение (1) с к. с. о. A, B при $n = 2$:

$$y^{\mathrm{IV}}(t) + Ay''(t) + By(t) = 0. \tag{3}$$

Обозначим $\forall(\lambda, \mu) \in R^2$: $\{\omega_i\}_{i=1}^{4}$ — корни характеристического полинома $\omega^4 + \lambda\omega^2 + \mu$. Здесь ω_i, $i = \overline{1, 4}$, образуют две пары противоположных корней:

$$\pm\sqrt{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}} \quad \text{и} \quad \pm\sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}}\,.$$

Для определенности полагаем $\operatorname{Re}\omega_1 \ge 0$, $\operatorname{Re}\omega_2 \ge 0$, $|\omega_1| \ge |\omega_2|$, $\omega_3 = -\omega_1$, $\omega_4 = -\omega_2$. При $i = \overline{0, 3}$ обозначаем через $\psi_i(\lambda, \mu, t)$, $t \in R_+$, решение скалярного уравнения $\psi^{\mathrm{IV}} + \lambda\psi'' + \mu\psi = 0$ такое, что $\psi_i^{(j)}(\lambda, \mu, 0) = \delta_i^j$, $j = \overline{0, 3}$. При $i = \overline{0, 3}$, $k \ge 0$: $\psi_i^{(k)}(\lambda, \mu, t)$ непрерывна на $R^2 \times R_+$. Полагая $d = \omega_1^2 - \omega_2^2$ для всех $(\lambda, \mu, t) \in R^2 \times R_+$, где $d \ne 0, \omega_1 \ne 0, \omega_2 \ne 0$, имеем

$$\psi_0(\lambda, \mu, t) = d^{-1}(\omega_1^2 \operatorname{ch}\omega_2 t - \omega_2^2 \operatorname{ch}\omega_1 t),$$

$$\psi_1(\lambda, \mu, t) = d^{-1}\left(\omega_1^2 \frac{\operatorname{sh}\omega_2 t}{\omega_2} - \omega_2^2 \frac{\operatorname{sh}\omega_1 t}{\omega_1}\right),$$

$$\psi_2(\lambda, \mu, t) = -d^{-1}(\operatorname{ch}\omega_2 t - \operatorname{ch}\omega_1 t),$$

$$\psi_3(\lambda, \mu, t) = -d^{-1}\left(\frac{\operatorname{sh}\omega_2 t}{\omega_2} - \frac{\operatorname{sh}\omega_1 t}{\omega_1}\right).$$

При любом фиксированном $t \ge 0$ $\psi_i(\lambda, \mu, t)$, $i = \overline{0, 3}$, продолжаются по непрерывности на множество

$$\{(\lambda, \mu) \mid d = 0\} \cup \{(\lambda, \mu) \mid \omega_1 = 0\} \cup \{(\lambda, \mu) \mid \omega_2 = 0\} =$$

$$= \{(\lambda, \mu) \mid \mu = 0\} \cup \{(\lambda, \mu) \mid \mu = \lambda^2/4\} \subset R^2.$$

Теорема 2. *Уравнение* $y^{\mathrm{IV}}(t) + Ay''(t) + By(t) = 0$ *с к. с. о.* A, B *корректно тогда и только тогда, когда выполнено одно из эквивалентных условий*:

1) $\exists\, 0 < \gamma,\ C < +\infty \quad \forall (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$:

а) $\max\limits_{i=\overline{1,4}} \operatorname{Re} \omega_i(\lambda, \mu) \le \gamma$;

б) $\sum_{i=1}^4 |\omega_i|^2 \le C$ *или* $\left|\dfrac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| \le C,\ \left|\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| \le C$;

2) $\exists\, 0 < \varepsilon < 1,\ 0 < \gamma < +\infty \quad \forall (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$:

а) $\lambda \ge -\gamma$;

б) $-\gamma\lambda - \gamma^2 \le \mu \le (1 - \varepsilon)(\lambda^2/4)$ *или* $\lambda^2 + \mu^2 \le 1/\varepsilon^2$;

3) A *полуограничен снизу*, $B_- \overset{\mathrm{def}}{=} BE_B(-\infty, 0)$ *подчинен* A, $B_+ \overset{\mathrm{def}}{=} BE_B[0, +\infty)$ *сильно подчинен* $A^2/4$.

В этом случае для произвольного $\{f_i\}_{i=0}^3 \in H^4$ *существует единственное сл.р. уравнения* (3) *на* R_+ *с н. д.* $\{f_i\}_{i=0}^3$, *имеющее вид* $y(t) = \sum_{i=0}^3 \psi_i(A, B, t) f_i$, $t \in R_+$.

***Замечание* 1.** Условие $\max\limits_{i=\overline{1,4}} \operatorname{Re} \omega_i(\lambda, \mu) \le \gamma$ эквивалентно $\max\limits_{i=\overline{1,4}} |\operatorname{Re} \omega_i(\lambda, \mu)| \le \gamma$, поскольку здесь $\omega_3 = -\omega_1$, $\omega_4 = -\omega_2$.

Доказательство теоремы 2 основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Для произвольного* $(\lambda, \mu) \in R^2$ *имеет место один из таких случаев*:

1) $\operatorname{Re} \omega_1 = \operatorname{Re} \omega_2 = 0$ (*при* $(\lambda, \mu) \in \Lambda_1 = \{(\lambda, \mu) \mid \lambda \ge 0,\ 0 \le \mu \le \lambda^2/4\}$);

2) $\operatorname{Re} \omega_1 = 0$, $\operatorname{Im} \omega_2 = 0$ (*при* $(\lambda, \mu) \in \Lambda_2 = \{(\lambda, \mu) \mid \lambda \ge 0,\ \mu \le 0\}$);

3) $\operatorname{Re} \omega_2 = 0$, $\operatorname{Im} \omega_1 = 0$ (*при* $(\lambda, \mu) \in \Lambda_3 = \{(\lambda, \mu) \mid \lambda \le 0,\ \mu \le 0\}$);

4) $\operatorname{Im} \omega_1 = \operatorname{Im} \omega_2 = 0$ (*при* $(\lambda, \mu) \in \Lambda_4 = \{(\lambda, \mu) \mid \lambda \le 0,\ 0 \le \mu \le \lambda^2/4\}$);

5) $\exists a \ge 0,\ b \ge 0$: $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{a + ib,\ a - ib,\ -a + ib,\ -a - ib\}$ (*при* $(\lambda, \mu) \in \Lambda_5 = \{(\lambda, \mu) \mid \mu \ge \lambda^2/4\}$).

Лемма 2. *Зафиксируем произвольное* $0 < \varepsilon < 1$. *Пусть*

$$\Omega = \{(\lambda, \mu) \in R^2 \mid \lambda \ge \varepsilon,\ \mu \ge -(1/\varepsilon)\lambda,\ |\mu| \le (1 - \varepsilon)\lambda^2/4\}.$$

Положим $|\omega_1| \ge |\omega_2|$. *Тогда* $\forall (\lambda, \mu) \in \Omega$ *выполняются неравенства*

1) $\sqrt{|\lambda|}/\sqrt{2} \le |\omega_1| \le \sqrt{2}\sqrt{|\lambda|}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{|\mu|}{\lambda}} \le |\omega_2| \le \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{|\mu|}{\lambda}}$;

3) $\sqrt{\varepsilon}\,\lambda \le |d| = |\omega_1^2 - \omega_2^2| \le \sqrt{2-\varepsilon}\,\lambda$;

4) $\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2}|\omega_1|^2 \le |d| = |\omega_1^2 - \omega_2^2| \le 2\sqrt{2-\varepsilon}\,|\omega_1|^2$;

5) $|\operatorname{Re}\omega_i| \le \sqrt{1/\varepsilon} < +\infty, \ \ i = \overline{1,4}$.

Доказательство пп. 1 – 4 основано на лемме 2 из [2] и том факте, что ω_1^2, ω_2^2 — корни уравнения $x^2 + \lambda x + \mu = 0$,

$$|\omega_1^2 - \omega_2^2| = \left|2\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}\right|;$$

п. 5 следует из пп. 1, 2 леммы 1 и п. 2 леммы 2.

Лемма 3. *Следующие предложения эквивалентны:*

I. $\Omega \subseteq R^2$ *и* $\exists 0 < \gamma, \varepsilon < +\infty$ *такие, что* $\forall(\lambda, \mu) \in \Omega$ *выполнено одно из условий*:

1) $|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 < 1/\varepsilon$;

2) $\max\limits_{i=\overline{1,4}} |\operatorname{Re}\omega_i| \le \gamma, \ \left|\dfrac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| < \dfrac{1}{\varepsilon}, \ \left|\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| < \dfrac{1}{\varepsilon}$.

II. $\Omega \subseteq R^2$ *и* $\exists 0 < \gamma < +\infty, \ 0 < \varepsilon < 1$ *такие, что* $\forall(\lambda, \mu) \in \Omega$ *выполнено одно из условий*:

1) $\lambda^2 + \mu^2 < 1/\varepsilon$;

2) $\lambda \ge 1, \ \ \mu \ge -(1/\varepsilon)\lambda, \ \ |\mu| \le (1-\varepsilon)\lambda^2/4$.

Доказательство. С учетом леммы 2 из предложения II следует предложение I. Осталось показать, что из условия:

$$\exists 0 < \gamma, \varepsilon < +\infty \quad \forall(\lambda, \mu) \in \Omega \subseteq R^2\colon \max_{i=\overline{1,4}} \operatorname{Re}\omega_i < \gamma, \quad \frac{\max(|\mu|, \lambda^2)}{|\lambda^2 - 4\mu|} < \frac{1}{\varepsilon}$$

следует предложение II. Аналогично доказательству леммы 4 из [2], применяя критерий Рауса — Гурвица к полиному

$$(\xi + \gamma)^4 + \lambda(\xi + \gamma)^2 + \mu \equiv \omega^4 + \lambda\omega^2 + \mu,$$

находим

$$\max_{i=\overline{1,4}} \operatorname{Re}\omega_i < \gamma \Leftrightarrow \operatorname{Re}\xi_i < 0, \ i = \overline{1,4} \Leftrightarrow \lambda > -6\gamma^2, \ -\gamma^2\lambda - \gamma^4 < \mu < \lambda^2/4 + 2\gamma^2\lambda + \gamma^4.$$

Учитывая, что

$$\frac{|\lambda^2 - 4\mu|}{\lambda^2} = 4\left|\frac{\mu}{\lambda^2} - \frac{1}{4}\right| \ge \varepsilon > 0,$$

получаем, что $\exists 0 < \varepsilon_1 < 1\colon \mu < (1 - \varepsilon_1)\lambda^2/4$ на Ω вне некоторого ограниченного подмножества.

Лемма 4. *Зафиксируем произвольные* $0 < \gamma, \varepsilon, T < +\infty$ *и рассмотрим*

$$\Omega = \left\{ (\lambda, \mu) \in R^2 \mid \max_{i=\overline{1,4}} |\operatorname{Re}\omega_i| \le \gamma, \ \left|\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| \le \frac{1}{\varepsilon}, \ \left|\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| \le \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{(\lambda, \mu) \in R^2 \,\middle|\, |\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 \le 1/\varepsilon\right\}.$$

Тогда $\exists\, 0 < C = C_{\gamma,\varepsilon,T} < +\infty$ *такое, что* $\forall (\lambda, \mu, t) \in \Omega \times [0, T]$:

1) $|\psi_j(\lambda, \mu, t)| \le C, \ j = \overline{0, 3}$;

2) $|\psi_0^{(i)}(\lambda, \mu, t)| \ (i = \overline{0, 4}), \ |\lambda \psi_0''(\lambda, \mu, t)|, \ |\mu \psi_0(\lambda, \mu, t)| \le C(|\mu| + 1)$,

$$|\psi_1^{(i)}(\lambda, \mu, t)| \ (i = \overline{0, 4}), \ |\lambda \psi_1''(\lambda, \mu, t)|, \ |\mu \psi_1(\lambda, \mu, t)| \le C(\min(|\mu|, \sqrt{|\lambda\mu|}) + 1),$$

$$|\psi_2^{(i)}(\lambda, \mu, t)| \ (i = \overline{0, 4}), \ |\lambda \psi_2''(\lambda, \mu, t)|, \ |\mu \psi_2(\lambda, \mu, t)| \le C(|\lambda| + 1),$$

$$|\psi_3^{(i)}(\lambda, \mu, t)| \ (i = \overline{0, 4}), \ |\lambda \psi_3''(\lambda, \mu, t)|, \ |\mu \psi_3(\lambda, \mu, t)| \le C(\sqrt{|\lambda|} + 1).$$

Доказательство основано на непосредственной оценке

$$|\psi_0(\lambda, \mu, t)| = \left| \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \operatorname{ch} \omega_2 t - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \operatorname{ch} \omega_1 t \right|$$

последующих функций, указанных в лемме, на $\Omega \times [0, T]$ с учетом непрерывности $\psi_i^{(k)}(\lambda, \mu, t)$ на $R^2 \times R_+$ при $i = \overline{0, 3}$, $k \ge 0$; на леммах 3, 2 и том факте, что $\lambda = -(\omega_1^2 + \omega_2^2)$, $\mu = \omega_1^2 \omega_2^2$.

Доказательство теоремы 2. Эквивалентность условий 1 и 2 следует из леммы 3, эквивалентность условий 2 и 3 — из утверждений статьи [2]: теоремы 2, следствия 1 из нее и замечания после следствия 2 из нее.

Достаточность. Аналогично лемме 1 из [2] находим, что если существует сл. р. уравнения (3) на R_+ с н. д. $\{f_i\}_{i=0}^3 \in H^4$ $y(t)$, то оно единственно и имеет вид $y(t) = \lim\limits_{k \to \infty} \sum_{i=0}^3 \psi_i(A, B, t) E_k f_i$. Теперь достаточно доказать, что если выполнено условие 1, то при $i = \overline{0, 3}$: $\forall f \in H$, $\psi_i(A, B, t) f$ является сл. р. уравнения (3) на R_+ с н. д. $\{\delta_i^j f\}_{j=0}^3$. Действительно, из п. 1 леммы 4 по теореме Лебега следует $\psi_i(A, B, t) f \in C(R_+, H)$. Аналогично доказательству достаточности в теореме 3 из [2], из п. 2 леммы 4 согласно теореме Лебега следует, что

$$\forall g \in D(A) \cap D(B): \psi_i(A, B, t) g \in C^4(R_+, H),$$

$$(A\psi_i(A, B, t) g)'' = A\psi_i''(A, B, t)\, g = A(\psi_i(A, B, t)\, g)'' \in C(R_+, H),$$

$$B\psi_i(A, B, t) g \in C(R_+, H)$$

и $y(t) = \psi_i(A, B, t) g$ удовлетворяет уравнению (3) на R_+ и $y^{(j)}(0) = \delta_i^j g$, $j = \overline{0, 3}$. Отсюда $\forall g \in D(A) \cap D(B)$:

$$(\psi_i(A, B, t) f, g)^{\mathrm{IV}} + (\psi_i(A, B, t) f, Ag)'' + (\psi_i(A, B, t) f, Bg) =$$

$$= (f, (\psi_i(A, B, t) g)^{\mathrm{IV}} + A(\psi_i(A, B, t) g)'' + B\psi_i(A, B, t) g) \equiv 0, \ t \in R_+,$$

причем $(\psi_i(A, B, t) f, g)^{\mathrm{IV}}, (\psi_i(A, B, t) f, Ag)'', (\psi_i(A, B, t) f, Bg) \in C(R_+)$ и

$$(\psi_i(A, B, t) f, g)^{(j)}|_{t=0} = (f, (\psi_i(A, B, t) g)^{(j)})|_{t=0} = (\delta_i^j f, g), \ j = \overline{0, 3}.$$

Необходимость. 1. Пусть уравнение (3) корректно. Обозначим $\forall (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$: ω — корень $\omega^4 + \lambda\omega^2 + \mu = 0$ с наибольшим $\operatorname{Re}\omega$, а если таких корней несколько — то с наибольшим $\operatorname{Im}\omega$. Аналогично доказательству необходимости в теореме 3 из [2] находим, что $\forall\, 0 < T < +\infty \ \exists C_T < +\infty \ \forall (\lambda, \mu, t) \in$

$\in \sigma(A, B) \times [0, T]$:

$$|\psi_0(\lambda, \mu, t)| \le C_T, \tag{4}$$

$$\frac{e^{2\operatorname{Re}\omega T}}{(\operatorname{Re}\omega)^6 + (\operatorname{Im}\omega)^6 + 1} \le C_T. \tag{5}$$

2. Покажем, что выполнено условие 1а), т. е. $\exists\, 0 < \gamma < +\infty \quad \forall(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$: $\max\limits_{i=\overline{1,4}} \operatorname{Re}\omega_i \le \gamma$. Для этого, основываясь на лемме 1, покажем, что при $l = \overline{1, 5}$ $\exists\, \gamma_l < +\infty \quad \forall(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B) \cap \Lambda_l$: $\operatorname{Re}\omega < \gamma$ (здесь Λ_l из леммы 1). При $l = 1$ это очевидно. При $l = 2, l = 3, l = 4$ имеем $\omega = \operatorname{Re}\omega \ge 0$, и (5) запишется так:

$$\frac{e^{2\omega T}}{\omega^6 + 1} \le C_T \Leftrightarrow \operatorname{Re}\omega = \omega \le \gamma'(T, C_T) < +\infty.$$

Осталось доказать при $l = 5$, где $\exists\, a \ge 0,\ b \ge 0$: $\omega_j = \pm a \pm ib$, $j = \overline{1, 4}$, что

$$a = a(\lambda, \mu) \le \gamma_5(T, C_T) < +\infty,$$

где γ_5 не зависит от $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B) \cap \Lambda_5$. Действительно, пусть $a \ge 4/T$. При $b \le 16a$:

$$(5) \Rightarrow C_T \ge \frac{e^{2\operatorname{Re}\omega T}}{|\operatorname{Im}\omega|^6 + |\operatorname{Re}\omega|^6 + 1} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2^{25}} \frac{e^{2\operatorname{Re}\omega T}}{(\operatorname{Re}\omega)^6 + 1} \Rightarrow a = \operatorname{Re}\omega \le 2^{25}\gamma'(T, C_T) < +\infty.$$

При $a \ge 4/T$ и $b \ge 16a$: $\omega_1^2 \ne \omega_2^2$, и, обозначая здесь $\omega_1 = a + ib$, $\omega_2 = a - ib$, имеем

$$\psi_0(\lambda, \mu, t) = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}(\operatorname{ch}\omega_1 t - \operatorname{ch}\omega_2 t) + \operatorname{ch}\omega_2 t =$$

$$= i\frac{2\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \operatorname{sh} at \sin bt + \operatorname{ch} at \cos bt + i \operatorname{sh} at \sin bt =$$

$$= i\left(\frac{2\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} + 1\right)\operatorname{sh} at \sin bt + \operatorname{ch} at \cos bt.$$

Поскольку $|bT - bT/2| > 2\pi$, то при некотором $t_0 \in [T/2, T]$: $\sin bt_0 = 1$. Тогда

$$\cos bt_0 = 0; \quad e^{-at_0} = e^{-2at_0} e^{at_0} \le e^{-aT} e^{at_0} \le e^{-4} e^{at_0} \Rightarrow \operatorname{sh} at_0 \ge \frac{1 - e^{-4}}{2} e^{at_0};$$

$$\left|\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\right| = \frac{a^2 + b^2}{4ab} \ge \frac{b}{4a} \ge 4 \Rightarrow \left|\frac{2\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} + 1\right| \ge 7.$$

Окончательно,

$$(4) \Rightarrow C_T \ge |\psi_0(\lambda, \mu, t_0)| = \left|\frac{2\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} + 1\right| \operatorname{sh} at_0 \ge \frac{7(1 - e^{-4})}{2} e^{at_0} \ge$$

$$\ge e^{aT/2} \Rightarrow a \le (2/T)\ln C_T < +\infty.$$

3. Покажем, наконец, что выполняется условие 1б), т. е. $\exists 0 < C < +\infty \quad \forall(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$: $\max_{i=\overline{1,4}} |\omega_i| \le C$ или $\left|\dfrac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| \le C$. Как показано при доказательстве леммы 4,

$$\max_{i=\overline{1,4}} \operatorname{Re} \omega_i(\lambda, \mu) < \gamma \Leftrightarrow \lambda > -6\gamma^2, \ -\gamma^2\lambda - \gamma^4 < \mu < \lambda^2/4 + 2\gamma^2\lambda + 4\gamma^2.$$

Таким образом,

$$\exists 0 < R < +\infty: \ \sigma(A, B) \subseteq \{(\lambda, \mu) \mid \lambda^2 + \mu^2 \le R^2\} \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_5$$

(Λ_l из леммы 1). По лемме 2 из [2]

$$\lambda^2 + \mu^2 \le R^2 \Rightarrow \max_{i=\overline{1,4}} |\omega_i(\lambda, \mu)| \le \sqrt{1+R} < +\infty.$$

Для всех $(\lambda, \mu) \in \Lambda_2$: $\omega_1^2 \ge 0$, $\omega_2^2 \le 0$, так что $\left|\dfrac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| \le 1$. Осталось доказать, что $\exists C < +\infty \quad \forall(\lambda, \mu) \in (\sigma(A, B) \cap \Lambda_1) \cup (\sigma(A, B) \cap \Lambda_5)$:

$$\left|\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| \le C \quad \text{или} \quad |\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 \le C.$$

Зафиксируем произвольное $T \in (0, \infty)$. Учитывая, что $\forall(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$: $\max_{i=\overline{1,4}} |\operatorname{Re} \omega_i| \le \gamma$ и

$$\psi_0(\lambda, \mu, t) = \operatorname{ch} \omega_1 t + \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} (\operatorname{ch} \omega_2 t - \operatorname{ch} \omega_1 t),$$

из (4) находим $\exists C < +\infty \quad \forall(\lambda, \mu, t) \in \sigma(A, B) \times [0, T]$:

$$\left|\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| |\operatorname{ch} \omega_1 t - \operatorname{ch} \omega_2 t| \le C. \tag{6}$$

а). Пусть $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B) \cap \Lambda_1$. Тогда, полагая $\omega_1 = ix$, $\omega_2 = iz$, $x \ge z \ge 0$, (6) можно записать в виде

$$\left|\frac{x^2}{x^2 - z^2}\right| |\cos xt - \cos zt| \le C, \quad t \in [0, T].$$

Здесь

$$x = \max_{j=\overline{1,4}} |\omega_j|, \quad \left|\frac{x^2}{x^2 - z^2}\right| = \left|\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right|.$$

Дальнейшее проверяется непосредственным вычислением:

1) $x \le 8/T \Leftrightarrow |\omega_j| \le 8/T$, $j = \overline{1,4}$;

2) при $(x - z)/2 \le 1/T$, $x \ge 8/T$ имеем

$$C \ge \left(\frac{T}{8}\right) x \left|\sin \frac{x+z}{2} t\right| \ \forall t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \Rightarrow \frac{C^2 T}{2} \ge \frac{T^2}{2^6} x^2 \int_{T/2}^{T} \sin^2 \frac{x+z}{2} t\, dt \ge \frac{T^3}{2^9} x^2;$$

окончательно,

$$|\omega_j| \le \sqrt{\frac{2^9 C}{T^3}}, \quad j = \overline{1,4};$$

3) при $x - z \ge 2/T$, $z \ge 4/T$:

$$C^2 T \ \ge \ \frac{x^2}{x^2 - z^2} \int_0^T (\cos xt - \cos zt)^2 dt \ \ge \ \frac{x^2}{x^2 - z^2} \frac{T}{8},$$

т. е. $\left| \dfrac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right| \le 8C^2$;

4) при $x - z \ge 2/T$, $z \le 4/T$, $x \ge 8/T$ имеем

$$z \le \frac{1}{2} x \Rightarrow \left| \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right| \le \frac{4}{3}.$$

б). Пусть $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B) \cap \Lambda_5$. Тогда $\exists a \ge 0,\ b \ge 0$: $\omega_j = \pm a \pm i b$, $j = \overline{1,4}$, и

$$C \ \ge \left| \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} (\operatorname{ch} \omega_2 t - \operatorname{ch} \omega_1 t) \right| = \frac{a^2 + b^2}{2ab} \operatorname{sh} at \, |\sin bt|, \quad t \in [0, T];$$

$$\max_{j=\overline{1,4}} |\omega_j| = \sqrt{a^2 + b^2}; \ \left| \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right| = \frac{a^2 + b^2}{4ab}.$$

Здесь возможны три случая:

1) $b \le 4/T$; тогда при $t = T/4$:

$$C \ \ge \ \frac{1}{2} t^2 \left| \frac{\operatorname{sh} at}{at} \right| \left| \frac{\sin bt}{bt} \right| (a^2 + b^2) \ \ge \ \frac{\sin 1}{2} t^2 (a^2 + b^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{j=\overline{1,4}} |\omega_j|^2 = a^2 + b^2 \le \frac{2^5 C}{T^2 \sin 1};$$

2) $a \le 4/T$, $b \ge 4/T$; тогда $\forall T/2 \le t \le T$:

$$C \ \ge \ \frac{t}{2} b \left| \frac{\operatorname{sh} at}{at} \right| |\sin bt| \ \ge \ \frac{T}{4} b |\sin bt|,$$

откуда

$$C^2 T \ge \frac{T^2}{16} b^2 \int_{T/2}^{T} \sin^2 bt \, dt \ge \frac{T^3}{2^7} b^2 \Rightarrow b^2 \le \frac{2^7 C^2}{T^2} \Rightarrow \max_{j=\overline{1,4}} |\omega_j|^2 \le \frac{16 + 2^7 C^2}{T^2};$$

3) $a \ge 4/T$, $b \ge 4/T$; тогда $\forall T/2 \le t \le T$:

$$\operatorname{sh} at \ge \operatorname{sh} 2 \ge 1 \ \Rightarrow \ C \ \ge \ \frac{a^2 + b^2}{2ab} |\sin bt|,$$

откуда

$$C^2 T \ge \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} \right)^2 \int_{T/2}^{T} \sin^2 bt \, dt \ \ge \ \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} \right)^2 \frac{T}{8} \Rightarrow \left| \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right| = \frac{a^2 + b^2}{4ab} \le C\sqrt{2}.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Согласно теореме 1 при $n = 1$ в случае к. с. о. A, B условие

$$\sup_{(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B),\, i = \overline{1, 2n}} \operatorname{Re} \omega_i(\lambda, \mu) < +\infty \tag{7}$$

является необходимым и достаточным для корректности уравнения (1). Теорема 2 показывает, что при $n = 2$ это условие уже в случае к. с. о. A, B перестает быть достаточным для корректности (оставаясь необходимым).

Действительно, взяв $\sigma(A, B) = \{(\lambda, \mu) \mid \lambda \geq 1, \mu = (\lambda^2/4)\}$, находим $\forall(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$: $\operatorname{Re}\omega_j = 0$, $j = \overline{1, 4}$, так что условие (7) выполнено. В то же время

$$\forall(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B): \left|\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right| = +\infty,$$

причем

$$\sup_{(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)} |\omega_1|^2 = +\infty,$$

так что условие 1б) теоремы 2 не выполнено, и, значит, уравнение

$$y^{\mathrm{IV}}(t) + A\, y''(t) + B\, y(t) = 0$$

не является корректным.

***Замечание* 3.** В критерии корректности уравнения (1), где A, B — к. с. о. в H, на A и B_- при $n = 2$ налагаются те же условия, что и при $n = 1$. А именно: A полуограничен снизу, B_- подчинен A. Но в отличие от $n = 1$ при $n = 2$ дополнительно налагается условие на B_+: B_+ сильно подчинен $A^2/4$.

***Следствие* 1.** *Достаточным (но не необходимым) условием корректности* (3) *с к. с. о. A, B является условие: A полуограничен снизу, B подчинен A (т. е. $D(A) \subseteq D(B)$).*

***Следствие* 2.** *Если $D(A) \subseteq D(B)$, то необходимым и достаточным условием корректности уравнения* (3) *с к. с. о. A, B является полуограниченность снизу оператора A.*

Следствия 1, 2 непосредственно следуют из теоремы 2 из [2] и того факта, что условие 2 теоремы 2 настоящей работы необходимо и достаточно для корректности (3) с к. с. о. A, B.

***Пример* 1.** В работе [3] выведено уравнение динамики экспоненциально стратифицированной вращающейся сжимаемой жидкости в трехмерном пространстве (СВС-жидкости). Скорость звука в рассматриваемой жидкой среде $0 < c < +\infty$ предполагается постоянной, не зависящей от времени и координат; она характеризует сжимаемость жидкости. Жидкость экспоненциально стратифицирована вдоль оси Ox_3, т. е. ее плотность в невозмущенном стационарном состоянии $\rho_0 = \rho_0(x_3) = \alpha \exp(-2\beta x_3)$, где $\alpha, \beta > 0$ — постоянные. При сделанных предположениях частота Вейсяля – Брента оказывается постоянной: $\omega_0^2 = 2\beta g - g^2/c^2$, где g — ускорение свободного падения. Предполагается $\omega_0^2 \geq 0$. Это условие означает устойчивость распределения плотности $\rho_0(x_3)$ в жидкости и отсутствие конвективных движений. Для определенности полагаем $\omega_0 \geq 0$. Жидкость вращается вокруг оси Ox_3 с постоянной угловой скоростью $(1/2)f \geq 0$. Рассмотрение движений СВС-жидкости отнесено к декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3), которая вращается вместе с жидкостью. „Основное уравнение динамики СВС-жидкости" имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta_3 u + (f^2 + \beta^2 c^2)u\right] - \left[\omega_0^2 c^2 \Delta_2 u + f^2 c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \beta^2 c^2 f^2 u\right] = 0,$$

где

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Соответствующее дифференциально-операторное уравнение таково:

$$y^{\mathrm{IV}}(t) + Ay''(t) + By(t) = 0, \tag{8}$$

где

$$H = L_2(R^3),$$

$$A = -c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + (f^2 + \beta^2 c^2),$$

$$B = -\omega_0^2 c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) - f^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \beta^2 c^2 f^2.$$

Здесь A, B — к. с. о. в H; $\inf \sigma(A) \geq \beta^2 c^2 > 0$; $D(A) \subseteq D(B)$. В силу теоремы 2 и следствия 1 из нее уравнение (8) корректно, и $\forall \{f_i\}_{i=0}^{3} \in H^4$ сл. р. (8) на R_+ с н. д. $\{f_i\}_{i=0}^{3}$ имеет вид

$$y(t) = \sum_{i=0}^{3} \psi_i(A, B, t) f_i, \quad t \in R_+.$$

Дальнейшие утверждения об уравнении (8) см. в [4 – 6].

4. Рассмотрим, наконец, уравнение (1) с к. с. о. A, B при $n > 2$.

Теорема 3. *При* $n > 2$ *уравнение*

$$y^{(2n)}(t) + Ay^{(n)}(t) + By(t) = 0$$

с к. с. о. A, B *корректно тогда и только тогда, когда* A *и* B *— ограниченные операторы.*

Достаточность очевидна. Докажем ***необходимость.***

1. Для каждого $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$ перенумеруем $\omega_i(\lambda, \mu)$, $i = \overline{1, 2n}$, — корни характеристического многочлена $\omega^{2n} + \lambda\omega^n + \mu$ — таким образом, что $\operatorname{Re}\omega_i \leq \operatorname{Re}\omega_{i-1}$, и если $\operatorname{Re}\omega_i = \operatorname{Re}\omega_{i-1}$, то $\operatorname{Im}\omega_i \leq \operatorname{Im}\omega_{i-1}$. Аналогично доказательству необходимости в теореме 3 из [2] находим, что $\exists\, 0 < C_1 < +\infty \quad \forall (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$:

$$\frac{(\operatorname{Re}\omega_1)^{2(2n-1)} + (\operatorname{Im}\omega_1)^{2(2n-1)} + 1}{e^{2\operatorname{Re}\omega_1}} \geq \frac{1}{C_1} > 0,$$

откуда $\exists 0 < \gamma_1, \varepsilon_1 < +\infty \quad \forall (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$: $\operatorname{Re}\omega_1 \leq \gamma_1$ или $|\operatorname{Im}\omega_1| \geq \varepsilon_1 e^{\operatorname{Re}\omega_1/(2n-1)}$. Повторяя эти рассуждения для ω_j, $j = \overline{2, 2n}$, находим $\exists\, 0 < \gamma, \varepsilon < +\infty \quad \forall (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$, $j = \overline{1, 2n}$: $\operatorname{Re}\omega_j \leq \gamma$ или $|\operatorname{Im}\omega_j| \geq \varepsilon e^{\operatorname{Re}\omega_j/(2n-1)}$.

Из этого следует (полагаем $\forall z \in C^1$: $-\pi \leq \arg z < \pi$): $\forall 0 < \alpha < \pi/2 \;\exists\, 0 < \gamma(\alpha) < +\infty \quad \forall (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$, $j = \overline{1, 2n}$:

$$\operatorname{Re}\omega_j \leq \gamma(\alpha) \quad \text{или} \quad |\arg \omega_j| > \alpha. \tag{9}$$

2. Рассмотрим произвольное $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$ и любой из корней уравнения $\omega^{2n} + \lambda\omega^n + \mu = 0$, например $\omega_j(\lambda, \mu)$. Корнями уравнения $\omega^{2n} + \lambda\omega^n + \mu = 0$ являются все вершины правильного n-угольника M с центром O и одной из вершин $\omega_j(\lambda, \mu)$, лежащего в комплексной плоскости C^1. Если $\omega_j(\lambda, \mu) \neq 0$, то ровно одна из этих вершин (пусть это $\omega_l(\lambda, \mu)$) имеет $-\pi/n \leq \arg\omega_l(\lambda, \mu) < \pi/n$. В силу (9) (при $\alpha = \pi/n$): $\operatorname{Re}\omega_l(\lambda, \mu) \leq \gamma(\pi/n)$, откуда

$$|\omega_j(\lambda, \mu)| = |\omega_l(\lambda, \mu)| \leq \frac{\gamma(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} < +\infty$$

(при $\omega_j(\lambda, \mu) = 0$ тем более

$$|\omega_j(\lambda, \mu)| \le \frac{\gamma(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} < +\infty).$$

Итак, $\exists\, 0 < \gamma(\pi/n) < +\infty$ такая, что $\forall(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$, $j = \overline{1, 2n}$:

$$|\omega_j(\lambda, \mu)| \le \frac{\gamma(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} < +\infty.$$

По формулам Виета

$$\exists C < +\infty \quad \forall(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B): \ |\lambda| \le C, \quad |\mu| \le C.$$

Иными словами, $\sigma(A, B)$ ограничен, т. е. $\sigma(A) = \overline{pr_{O\lambda}\sigma(A, B)}$, $\sigma(B) = \overline{pr_{O\mu}s(A, B)}$ ограничены, т. е. A и B — ограниченные операторы.

Замечание 4. Теорема 3 остается справедливой, если вместо коммутирующих самосопряженных операторов A, B рассматриваются коммутирующие нормальные.

Замечание 5. Аналогичные результаты для двучленных уравнений $y^{(n)} + A y = 0$ при $n > 2$ получены в [7–10].

1. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 264 с.
2. *Шкляр А. Я.* Совместный спектр коммутирующих самосопряженных операторов и критерии корректности и устойчивости для дифференциально-операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 3. – С. 406 – 414.
3. *Габов С. А., Малышева Г. Ю., Свешников А. Г., Шатов А. К.* О некоторых уравнениях, возникающих в динамике вращающейся, стратифицированной и сжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1984. – **24**, № 12. – С. 1850 – 1863.
4. *Горбачук М. Л., Шкляр А. Я.* О разрешимости задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, вып. 4. – С. 161.
5. *Gorbachuk M. L., Shkliar A. Ya.* Equations connected with the stratified fluid motion // Nonlinear and turbulent processes in physics: Proc. III Intern. Workshop (Kiev, April 13 – 26, 1987). – Киев: Наук. думка, 1988. – Т. 2. – С. 32 – 35.
6. *Шкляр А. Я.* Задача Коши для дифференциальных уравнений с коммутирующими нормальными операторными коэффициентами: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1990. – 17 с.
7. *Hille E.* Une generalisation du probleme de Cauchy // Ann. Inst. Fourier. – 1953. – **4**. – P. 31 – 48.
8. *Chazarain J.* Problemes de Cauchy au sens des distributions vectorielles et applications // Comp. Rendus Acad. Sci. Paris, Ser. A. – 1968. – **266**. – P. 10 – 13.
9. *Chazarain J.* Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes // J. Funct. Anal. – 1971. – **7**. – P. 386 – 446.
10. *Fattorini H.* Ordinary differential equations in linear topological spaces. I // J. Different. Equat. – 1969. – **5**. – P. 72 – 105.

Получено 10. 09. 91