УДК 514.71

Н. П. Конева, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

НОРМАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ С ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ – БИЦИЛИНДРАМИ

A system of equations which defines normal congruences with focal surfaces (bicylinders) is found in a biaxial space of hyperbolic type by using a mobile reper of the space and the method of Cartan differential forms. A geometric construction of these congruences is given.

В біаксіальному просторі гіперболічного типу за допомогою рухомого репера простору та методу зовнішніх форм Картана знайдена система рівнянь, що визначає нормальні конгруенції з фокальними поверхнями – біциліндрами, наведена геометрична побудова цих конгруенцій.

В настоящей работе рассматривается задача построения средствами линейчатой геометрии частного случая нормальных конгруэнций [1] в биаксиальном пространстве гиперболического типа B_3.

Пространство B_3 — такое трехмерное многообразие точек, в котором выделена фундаментальная группа преобразований, изоморфная подгруппе проективных преобразований, переводящих в себя две действительные скрещивающиеся прямые (абсолютные прямые пространства l_1, l_2). Те же преобразования, очевидно, переводят в себя линейную конгруэнцию прямых, пересекающих обе абсолютные прямые, или конгруэнцию абсолютных прямых.

Подвижной репер пространства выбираем таким же образом, как и в [2]. Тогда уравнения структуры биаксиального пространства B_3 имеют вид

$$D\,\omega_i^k = [\omega_i^j\,\omega_j^k], \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\omega_2^4-\omega_4^2=0, \quad \omega_3^4-\omega_1^2=0, \quad \omega_1^3-\omega_3^1=0, \quad \omega_4^3-\omega_2^1=0,$$
$$\omega_2^3-\omega_4^1=0, \quad \omega_3^3-\omega_1^1=0, \quad \omega_3^2-\omega_1^4=0, \quad \omega_2^2-\omega_4^4=0.$$

Как и в евклидовом пространстве [3], нормальной конгруэнцией в B_3 названа конгруэнция, у которой фокусы луча совпадают с граничными точками [1]. Уравнения нормальной конгруэнции в B_3 имеют вид

$$\omega_1^3=0, \qquad \omega_2^4=0. \tag{1}$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом и раскрывая, по лемме Картана получаем

$$\begin{gathered}\omega_2^1= a\omega_1^4+b\,\omega_2^3, \quad -\omega_1^2=b\omega_1^4+c\,\omega_2^3\ , \\ d a+2a(\omega_1^1-\omega_2^2)=x_1\,\omega_1^4+y_1\,\omega_2^3, \\ d c+2c(\omega_2^2-\omega_1^1)=z_2\,\omega_2^3+x_2\,\omega_1^4, \quad d b=y_1\,\omega_1^4+x_2\,\omega_2^3.\end{gathered} \tag{2}$$

Из уравнений (1), (2) следует, что критерий Картана выполнен: $Q=N=3$, $S_1 = 1$, $N=3$, $q=2$, $S_2=1$ [3]. Нормальные конгруэнции существуют с произволом в одну функцию двух аргументов.

Теорема. *Если сеть линий кривизны первого рода на фокальных поверхностях нормальной конгруэнции является сопряженной, то эти фокальные поверхности являются бицилиндрами.*

Прежде чем доказывать теорему, отметим, что линейные комплексы, содержащие все прямые, пересекающие обе абсолютные прямые пространства, образуют пучок, который в работе А. П. Нордена [4] назван абсолютным. Две прямые в B_3, не пересекающие абсолютные прямые пространства, называются параллельными, если они принадлежат одному комплексу абсолютного пучка. Линейчатая поверхность — поверхность, образующие которой параллельны между собой,— цилиндрическая. Бицилиндры являются частным случаем цилиндрических поверхностей, т. е. бицилиндр — цилиндрическая поверхность, относительно которой l_1 и l_2 полярно сопряжены.

В [1, 2] дано определение линий кривизны первого и второго рода поверхности. Для нормальной конгруэнции в B_3 условие сопряженности линий кривизны первого рода на фокальных поверхностях конгруэнции имеет вид

$$b^2 - 1 = a\,c. \tag{3}$$

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Дифференцируя (3) и используя (1), (2), получаем $z_2 = x_1 = 0$. Отсюда следует, что система уравнений (1) – (3) вполне интегрируема и конгруэнция, определяемая этой системой, существует с произвольными шестью постоянными. Асимптотические линии, описываемые точкой A_1 (A_1, A_2, A_3, A_4 — вершины подвижного репера, A_1 и A_2 совмещены с фокусами луча конгруэнции [1, 2]), в этом случае будут прямыми. Тогда поверхность, описываемая точкой A_1, является линейчатой поверхностью второго порядка. Уравнение асимптотических линий на фокальных поверхностях нормальных конгруэнций имеет вид [1]

$$a\,(\omega_1^4)^2 - c\,(\omega_2^3)^2 = 0. \tag{4}$$

Из (3), (4) получаем

$$\pm a\,\omega_1^4 = \sqrt{b^2-1}\,\omega_2^3. \tag{5}$$

Подставляя это значение в $dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4$, находим

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + a^{-1}\sqrt{b^2-1}\,((\mp b + \sqrt{b^2-1})\,A_2 \pm A_4)\,\omega_2^3.$$

Обозначим через T точку, лежащую на касательной к асимптотической линии поверхности (A_1) в точке A_1. Верхний знак соответствует одному направлению асимптотической линии в точке A_1, а нижний — другому. Тогда имеем

$$T = (\mp b - \sqrt{b^2-1})\,A_2 \pm A_4,$$

$$dT = (\pm\omega_4^1 + \omega_2^1(\pm b - \sqrt{b^2-1}))\,A_1 + \omega_2^2 T + ((\mp b - \sqrt{b^2-1})\omega_2^3 \pm (a\,\omega_1^4 + b\omega_2^3))A_3,$$

$$(\mp b - \sqrt{b^2-1})\;\omega_2^3 \pm (a\,\omega_1^4 + b\omega_2^3) = -\sqrt{b^2-1}\,\omega_2^3 \pm a\,\omega_1^4 = 0. \tag{6}$$

Отсюда следует, что асимптотические линии поверхности (A_1) — прямые. Соприкасающаяся поверхность второго порядка к поверхности (A_1) в точке A_1 совпадает с поверхностью (A_1). Найдем уравнение поверхности (A_1). Обозначим через T_1 точку, которой соответствуют верхние знаки в (6), а через T_2 — нижние. Запишем уравнение квадрики с текущей точкой M в виде $\sum a\,M\,M = 0$, или сокращенно $[M\,M] = 0$ [4]. В таком случае прямая $A_1 T_1$ будет принадлежать этой квадрике при выполнении условий

$$[A_1A_1] = 0,\ [A_1T_1] = 0,\quad [T_1T_1] = 0,$$

или

$$[A_1A_1] = 0,\ -(b + \sqrt{b^2-1})\,[A_1A_2] + [A_1A_4] = 0,$$

$$(b + \sqrt{b^2-1})^2\,[A_2A_2] - 2(b + \sqrt{b^2-1})\,[A_2A_4] + [A_4A_4] = 0.$$

Продифференцируем дважды эти равенства в направлении кривой $-a\,\omega_1^4 = \sqrt{b^2-1}\;\omega_2^4$. Это означает, что квадрика проходит через три бесконечно близкие касательные к кривой $a\,\omega_1^4 = \sqrt{b^2-1}\;\omega_2^3$ вдоль $-a\,\omega_1^4 = \sqrt{b^2-1}\;\omega_2^3$:

$$d\,[A_1A_1] = (b - \sqrt{b^2-1})\,[A_1A_2] - [A_1A_4] = 0,$$

$$d^2\,[A_1A_1] = (b - \sqrt{b^2-1})\,[A_2A_2] - 2\,(b - \sqrt{b^2-1})\,[A_2A_4] + [A_4A_4] = 0,$$

$$d\,[A_1T_1] = [A_2A_2] + 2\,b\,[A_2A_4] - 2\,a\,[A_1A_3] - [A_4A_4] = 0,$$

$$d^2[A_1T_1] = [A_1A_2] - (b - \sqrt{b^2-1})[A_1A_4] - (b - \sqrt{b^2-1})[A_2A_3] + [A_3A_4] = 0,$$

$$d[T_1T_1] = (b + \sqrt{b^2-1})[A_2A_3] - [A_3A_4] = 0,$$

$$d^2[T_1T_1] = -(b + \sqrt{b^2-1})[A_2A_2] + 2a[A_3A_3] + 2[A_2A_4] - (b - \sqrt{b^2-1})[A_4A_4] = 0.$$

Из этих равенств получаем

$$[A_1A_1] = [A_1A_2] = [A_1A_4] = [A_2A_3] = [A_3A_4] = [A_3A_3] = 0,$$

$$[A_2A_2] = [A_4A_4], \quad [A_2A_4] = b[A_2A_2], \quad [A_1A_3] = a^{-1}(b^2-1)[A_2A_2].$$

Положим $[A_2A_2] = 1$, тогда уравнение поверхности (A_1) можно записать так: $x_2^2 + x_4^2 + 2bx_2x_4 + 2a^{-1}(b^2-1)x_1x_3 = 0$. Абсолютные прямые пространства l_1, l_2 полярно сопряжены относительно этой поверхности. Аналогично можно доказать, что такие же результаты справедливы и для второй фокальной поверхности конгруэнции, описываемой точкой A_2. Теорема доказана.

Произвольный линейный комплекс можно задать уравнением [3]

$$a_{ij}p^{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{7}$$

где p^{ij} — плюккеровы координаты луча комплекса. Абсолютный пучок комплексов найдем из того условия, что прямая PQ, где $P = A_1 + A_3 + t(A_2 + A_4)$, $Q = A_1 - A_3 + \tau(A_2 - A_4)$, при произвольных значениях параметров t, τ принадлежит комплексу (7). Тогда $a_{23} = 1$, $a_{14} = -1$, $a_{34} = a_{12} = \lambda$, $a_{42} = a_{13} = 0$. Уравнение абсолютного пучка комплексов принимает вид

$$p^{23} - p^{14} + \lambda(p^{12} + p^{34}) = 0.$$

Присоединив два уравнения, определяющие произвольные линейные комплексы

$$p^{12} = mp^{23} + np^{24} + rp^{34}, \tag{8}$$

$$p^{12} = Mp^{23} + Np^{24} + Rp^{34}, \tag{9}$$

получим систему уравнений, определяющую цилиндрическую поверхность. Произвольная цилиндрическая поверхность зависит от семи постоянных. В общем случае бицилиндры существуют с произволом в пять постоянных. Действительно, произвольная линейчатая поверхность второго порядка зависит от девяти постоянных, а условия полярной сопряженности относительно двух ее прямых (l_1, l_2) уменьшают этот произвол до пяти постоянных. В данном случае фокальные поверхности нормальной конгруэнции с сопряженной сетью линий кривизны первого рода являются бицилиндрами. Поэтому если к системе уравнений (7)–(9) присоединить условия полярной сопряженности цилиндрической поверхности относительно l_1, l_2, то полученные таким образом бицилиндры будут существовать уже с произволом в три постоянные. Действительно, пусть цилиндрическая поверхность задана системой уравнений (7)–(9). Полярная сопряженность l_1 и l_2 относительно этой поверхности эквивалентна тому, что l_1 и l_2 будут сопряжены в нуль-системе каждого комплекса (7)–(9) [3]. В таком случае получаем следующие условия: $m + r = -1$, $n = 0$, $M + R = 0$, $N = 0$. Отсюда следует, что рассматриваемый бицилиндр зависит уже от трех постоянных. Так как конгруэнция с фокальными поверхностями — бицилиндрами — существует с произволом в щесть постоянных, то она представляет собой множество общих касательных к двум бицилиндрам.

1. *Конева Н. П.* Нормальные конгруэнции в биаксиальном пространстве гиперболического типа. – Киев, 1983. – 27 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики: 83.49).
2. *Конева Н. П.* Два предложения о конгруэнциях биаксиального пространства // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 11. – С. 1471–1476.
3. *Фиников С. П.* Теория конгруэнций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 443 с.
4. *Норден А. П.* Пространство линейной конгруэнции // Мат. сб.– 1949.– **24**, № 3.– С. 429–455.

Получено 27.06.91