УДК 512.55

А. А. Туганбаев, канд. физ.-мат. наук (Моск. энергет. ин-т)

ПЛОСКИЕ МОДУЛИ И ДИСТРИБУТИВНЫЕ КОЛЬЦА

Let A be a semi-primary ring entire over its center. We prove that the following conditions are equivalent: a) A is a ring distributive from the left (right), b) w. gl. dim $(A) \leq 1$. In addition, if M is an arbitrary primary ideal of the ring A, $A \setminus M$ is a right Ore set.

Нехай A — півпервинне кільце, ціле над своїм центром. Доведено, що рівносильні такі умови: а) A — дистрибутивне справа (зліва) кільце; б) w. gl. dim $(A) \leq 1$, причому якщо M — будь-який первинний ідеал кільця A, то $A \setminus M$ — права множина Оре.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Дистрибутивным модулем называется модуль с дистрибутивной решеткой подмодулей. Слова типа „дистрибутивное кольцо" означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Неравенство w.gl. dim $(A) \leq 1$, где w.gl. dim (A) — слабая глобальная размерность кольца A, означает, что все правые (левые) идеалы кольца A являются плоскими. В [1] доказано, что для коммутативного полупервичного кольца A неравенство w. gl. dim $(A) \leq 1$ равносильно дистрибутивности кольца A. В [2] показано, что дистрибутивность полупервичного кольца A, целого над своим центром, равносильна тому, что для любого первичного идеала N кольца A множество $A \setminus N$ является множеством Оре и w.gl. dim$(A) \leq 1$. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — полупервичное кольцо, целое над своим центром. Тогда равносильны условия:*

а) w.gl. dim$(A) \leq 1$ *и для любого первичного идеала N из A множество $A \setminus N$ является правым множеством Оре;*

б) w.gl. dim$(A) \leq 1$ *и для любого первичного идеала N из A множество $A \setminus N$ является левым множеством Оре;*

в) *A — дистрибутивное справа кольцо;*

г) *A — дистрибутивное слева кольцо.*

Доказательство разобьем на ряд лемм. Через $C(A)$, $J(A)$, $\max(A_A)$, $\max({}_AA)$ обозначим соответственно центр, радикал Джекобсона, множество всех максимальных правых идеалов и множество всех максимальных левых идеалов кольца A, через $r(B)$ и $l(B)$ — правый и левый аннуляторы подмножества B кольца A. Элемент $a \in A$ называется регулярным, если $r(a) = l(a) = 0$. Кольцо A называется целым (алгебраическим) над $C(A)$, если для любого его элемента a найдутся такие элементы $b_0, \dots, b_n \in C(A)$, где b_n — обратимый (регулярный) элемент кольца A, что $\sum_{i=0}^{n} b_i a^i = 0$. Подмножество T кольца A называется мультипликативным, если T — мультипликативно замкнутое подмножество кольца A, содержащее его единицу и не содержащее его нуля. Мультипликативное подмножество T кольца A называется правым множеством Оре, если для любых элементов $a \in A$, $t \in T$ найдутся такие элементы $b \in \in A$, $u \in T$, что $au = tb$. Если все нильпотентные элементы кольца A центральны и T — правое множество Оре в кольце A, то (см. [3], лемма 6) существует такое кольцо A_T и кольцевой гомоморфизм $f_T \equiv f: A \to A_T$, что все элементы из $f(T)$ обратимы в A_T, $\mathrm{Ker}(f) = \{a \in A \mid at = 0$ для некоторого $t \in T$, $A_T = \{f(a)f(t)^{-1} \mid a \in A,\ t \in \in T\}$. В этих условиях A_T называется правым кольцом частных для A по T, а f — каноническим гомоморфизмом. Аналогично определяются левые множества Оре и левые кольца частных ${}_T A$. Если $T = A \setminus M$, где M — правый или левый идеал, то пишем A_M и ${}_M A$ вместо A_T и ${}_T A$. Редуцированным кольцом называется кольцо без нулевых нильпотентных элементов. Идеал B кольца A называется вполне первичным, если A/B — ненулевая область. Модуль называется цепным, если любые его два подмодуля сравнимы по включению. Модуль называется равномерным, если любые его два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Если Q — правое или левое кольцо частных кольца A по T, $f: A \to Q$ — канонический гомоморфизм, B — подмножество A, то будем писать $\overline{B}$ вместо $f(B)$. В лемме 1 объединим известные, либо непосредственно проверяемые утверждения.

Лемма 1. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

а) *каждый первичный идеал кольца A содержит минимальный первичный идеал кольца A;*

б) *если все первичные идеалы кольца A вполне первичны (это равносильно тому, что для любого первичного идеала N множество $A \setminus N$ мультипликативно), то A — редуцированное кольцо;*

в) *если M — максимальный правый или левый идеал кольца A, являющийся идеалом, то A/M — тело, M — вполне первичный идеал;*

г) *если кольцо A полупервично и все его правые идеалы являются идеалами, то A — редуцированное кольцо.*

Лемма 2. *Пусть A — редуцированное кольцо. Тогда:*

а) *если $a, b \in A$ и $ab = 0$, то $ba = 0$;*

б) *все минимальные первичные идеалы из A вполне первичны;*

в) *если все 2-порожденные правые идеалы кольца A являются плоскими, все максимальные правые идеалы являются идеалами и для любого вполне первичного идеала N множество $A \setminus N$ является правым множеством Оре, то кольцо A дистрибутивно справа;*

г) *если T — правое множество Оре в кольце A, то A_T — редуцированное кольцо;*

д) *каждый максимальный левый или правый идеал M из A содержит минимальный вполне первичный идеал.*

Доказательство. Пп. а), б) доказаны в [4, с. 286, 288]. П. в) доказан в следствии 1 [3]. Докажем п. г). Пусть $Q = A_T$, $q \in Q$, $q^2 = 0$, $q = \overline{a}\overline{t}^{-1}$, $a \in A$, $t \in T$. Тогда $au = tb$ для некоторых $u \in T$, $b \in A$. Поэтому $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{a}\overline{t}^{-1}\overline{t}\,\overline{b} = (\overline{a}\overline{t}^{-1})^2\overline{t}\,\overline{u} = \overline{0}$, $ab \in \operatorname{Ker}(f_T)$, $abs = 0$ для некоторого $s \in T$. Так как согласно п. а) $r(a)$ — идеал, то $atbs = 0$. Тогда $a^2us = 0$, $a^2x = 0$, где $x = us \in T$. Тогда $(a \times a)^2 = 0$, $axa = 0$, $(ax)^2 = 0$, $ax = 0$, $a \in \operatorname{Ker}(f_T)$, $q = \overline{0}$. Докажем п. д). В M лежит примитивный слева или справа и, в частности, первичный идеал. Тогда M содержит минимальный первичный, являющийся согласно п. б) минимальным вполне первичным идеалом.

Лемма 3. *Пусть A — дистрибутивное справа кольцо. Тогда:*

а) *если M — максимальный правый идеал кольца A, то M — идеал, A/M — тело, $A \setminus M$ — правое подмножество Оре;*

б) *если M, N — не сравнимые по включению вполне первичные идеалы кольца A, то $A = M + N$;*

в) *$A/J(A)$ — подпрямое произведение тел;*

г) *если кольцо A цело над своим центром, то все правые идеалы кольца A являются идеалами;*

д) *если M — максимальный правый или левый идеал кольца A, то множество $\mathfrak{L}$ всех вполне первичных идеалов кольца A, лежащих в M, не пусто,* *линейно упорядочено по включению, и поэтому M содержит ровно один минимальный вполне первичный идеал кольца.*

Доказательство. Пп. а) — г) доказаны соответственно в [3] (лемма 10), [5], [6] (лемма 4, в) и [2] (лемма 11, в)). Докажем п. д). Если M — максимальный правый идеал, то утверждение следует из пп. а) и б). Пусть $M \in ({}_AA)$. Согласно п. б) достаточно доказать, что множество $\mathfrak{L}$ не пусто. Пусть $h: A \to A/J(A)$ — естественный эпиморфизм. Согласно лемме 2, д) и п. в) максимальный левый идеал $h(M)$ редуцированного кольца $h(A)$ содержит вполне первичный идеал $h(N)$, где N — идеал кольца A, содержащий $J(A)$ и лежащий в M. Тогда $N \in \mathfrak{L}$.

Лемма 4 (см. [3] предложение 1, лемма 10, в)). *Пусть все нильпотентные элементы кольца A центральны. Правая дистрибутивность кольца A равносильна тому, что A_M для любого $M \in \max(A_A)$ существует и является цепным справа кольцом. Тогда для любого вполне первичного идеала N кольца A правое кольцо частных A_N существует и является цепным справа кольцом.*

Лемма 5. *Равномерное справа редуцированное кольцо A является областью.*

Лемма 5 проверяется непосредственно, с учетом того, что по лемме 2, а) все правые аннуляторы в кольце A являются идеалами.

Лемма 6. *Пусть A — дистрибутивное слева редуцированное кольцо. Тогда:*

а) *если N — вполне первичный идеал кольца A, $T = A \setminus N$, то кольцо A_N существует и является цепной справа областью, ядро H канонического гомоморфизма $A \to A_N$ является единственным минимальным вполне первичным идеалом кольца A, лежащим в N, причем $H = \{a \in A \mid 0 = at = ta$ для некоторого $t \in T\}$ и, в частности, все элементы из H не регулярны, причем $H = N$, если N — минимальный вполне первичный идеал;*

б) *если N — минимальный вполне первичный идеал кольца A, то все его элементы не регулярны, кольцо A_N существует и является телом, а любой регулярный элемент кольца A имеет ненулевой естественный образ в области A/N.*

Доказательство. а) По леммам 4 и 2, г) кольцо A_N существует и является цепным справа редуцированным кольцом. Пусть $Q = A/N$. Так как по лемме 5 Q — область, то H — вполне первичный идеал. Кроме того, $H = \{a \in A \mid at = 0$ для некоторого $t \in T\}$, причем по лемме 2, а) равенство $at = 0$ равносильно равенству $ta = 0$. Поэтому H — минимальный вполне первичный идеал, являющийся по лемме 3, д) единственным минимальным вполне первичным идеалом, лежащим в идеале N.

б) Утверждение следует из п. а).

Лемма 7. *Для редуцированного кольца A равносильны условия:*

а) *A — дистрибутивное справа кольцо;*

б) *для каждого максимального правого идеала M кольца A кольцо A_M существует и является цепной справа областью;*

в) *для любого вполне первичного идеала M кольца A кольцо A_M существует и является цепной справа областью, причем все максимальные правые идеалы кольца A являются вполне первичными идеалами кольца A;*

г) *для каждого минимального вполне первичного идеала H кольца A и любого содержащего H максимального правого идеала M кольца A верно, что A/H — дистрибутивное справа кольцо и $H = \{a \in A \mid at = 0$ для некоторого $t \in A \setminus M\}$.*

Доказательство. Импликация в) $\Rightarrow$ б) очевидна. Импликация б) $\Rightarrow$ а) следует из леммы 4. Импликация а) $\Rightarrow$ в) следует из лемм 4, 3, а), 2, г), 5. Импликация а) $\Rightarrow$ г) следует из леммы 6, а). Докажем импликацию г) $\Rightarrow$ б). Пусть $M \in \max(A_A)$, $T = A \setminus M$. По лемме 2, д) M содержит минимальный вполне первичный идеал H кольца A. Пусть $B = A/H$, $h: A \to B$ — естественный эпиморфизм. Так как по условию область B дистрибутивна справа, то по лемме 3, а) $h(M)$ — вполне первичный идеал кольца B. По лемме 6, а) кольцо $B_{h(M)}$ существует и является цепной справа областью. Тогда M — идеал кольца A, A/M — тело и для любых элементов $a \in A$, $t \in T$ найдутся элементы $b \in A$, $u \in T$ такие, что $h(a)h(u) = h(t)h(b)$. Поэтому $au - tb = n \in H$. По условию $ns = 0$ для некоторого $s \in T$. Пусть $u_1 = us \in T$, $b_1 = bs \in A$. Тогда $au_1 = tb_1$ и T — правое множество Оре и существует правое кольцо частных A_M. Так как из условия и леммы 2, а) следует, что H совпадает с ядром канонического гомоморфизма $A \to \to A_M$, то $A_M \cong B_{h(M)}$ — цепная справа область.

Лемма 8. *Пусть A — дистрибутивное слева редуцированное кольцо, причем для любого минимального вполне первичного идеала H кольца A область A/H дистрибутивна справа. Тогда A — дистрибутивное справа кольцо.*

Доказательство. Пусть M — максимальный правый идеал кольца A, содержащий минимальный вполне первичный идеал H кольца A. Так как кольцо A/H по условию дистрибутивно справа, то по лемме 3, а) M/H — идеал кольца A/H. Тогда M — идеал кольца A, A/M — тело, M — максимальный левый идеал. По лемме 2, а) и левостороннему аналогу леммы 6, а) $H = \{a \in A \mid at = 0$ для некоторого $t \in A \setminus M\}$. По лемме 7 кольцо A дистрибутивно справа.

Лемма 9. *Пусть A — редуцированное кольцо, алгебраическое над своим центром. Тогда левая дистрибутивность кольца A равносильна его правой дистрибутивности.*

Доказательство. Пусть A — дистрибутивное слева кольцо, H — минимальный вполне первичный идеал кольца A, $B = A/H$. По левостороннему варианту леммы 6, б) получаем, что B — дистрибутивная слева область, алгебраическая над своим центром. Тогда область B дистрибутивна справа [7]. По лемме 8 кольцо A дистрибутивно справа. Аналогично из правой дистрибутивности следует левая дистрибутивность кольца A.

***Доказательство теоремы* 1.** Рассмотрим условие д): A — дистрибутивное кольцо. Эквивалентность условий в), г), д) следует из лемм 9, 3, г), 1, г). Импликации а) $\Rightarrow$ в), б) $\Rightarrow$ г) следуют из лемм 1, б), 2, в). Импликации д) $\Rightarrow$ а), д) $\Rightarrow$ б) доказаны в теореме 1 из [2].

1. *Jensen C. U.* A remark on arithmetical rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – **15**, № 6. – P. 951 – 954.
2. *Туганбаев А. А.* Кольца с плоскими правыми идеалами и дистрибутивные кольца // Мат. заметки. – 1985. – 38, № 2. – С. 218 – 228.
3. *Туганбаев А. А.* Наследственные кольца // Там же. – 1987. – **41**, № 3. – С. 303 – 312.
4. *Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.* Радикалы алгебр и структурная теория. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
5. *Stephenson W.* Modules whose lattice of submodules is distributive // Proc. London Math. Soc. – 1974. – **28**, № 2. – P. 291 – 310.
6. *Туганбаев А. А.* Дистрибутивные кольца рядов // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 4. – С. 518 – 528.
7. *Gräter J.* Ringe mit distributivem rechtsidealverband // Results Math. – 1987.– **12**. – S. 95 – 98.

Получено 17.05.91