УДК 519.21

Ш. Шарахметов, канд. физ.-мат. наук (Ташкент. ун-т)

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ *r*-НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

We suggest a method for the investigation of r independent random variables by using a multiplicative system. An estimate of the remainder term in the central limit theorem for r independent random variables is obtained.

Запропоновано метод дослідження r-незалежних випадкових величин за допомогою мультиплікативних систем. Одержана оцінка залишкового члена в центральній граничній теоремі для r-незалежних випадкових величин.

В настоящей статье исследуются r-независимые случайные величины.

Определение 1. *Случайные величины (с. в.)* $X_1, \ldots, X_n$ *называются* r*-независимыми* $(2 \le r \le n)$, *если любые* r *с. в. из них независимы.*

Определение 2. *Случайные величины* $X_1, \ldots, X_n$ *называются мультипликативной системой порядка* α *(сокращенно* $\mathrm{MC}(\alpha)$*), если существуют моменты* $E\,|X_j|^\alpha$ *и для любых* $\alpha_j \in [0, 1, \ldots, \alpha]$ $j = 1, \ldots, n$, *выполняется равенство*

$$E\prod_{j=1}^{n} X_j^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{n} EX_j^{\alpha_j}.$$

Алексич [1] при исследовании ортогональных систем функций ввел понятия мультипликативной и сильно мультипликативной систем, которые в определении 2 соответствуют МС(1), МС(2). Примерами МС(1) являются: лакунарные тригонометрические системы $(\cos 2\pi n_k x,\ \sin 2\pi n_k x,\ k = 1, 2, \ldots)$ при $n_{k+1}/n_k \ge 2$ на отрезке $[0, 1]$ с лебеговой мерой и мартингал-разностные последовательности.

Лакунарные тригонометрические системы с большими лакунами (т. е. $n_{k+1}/n_k \ge \alpha + 1$) образуют $\mathrm{MC}(\alpha)$. Мультипликативные системы достаточно хорошо изучены в работах Алексича, Ревеса, Гапошкина, Морица, Комлоша.

В настоящей работе используются известные результаты для $\mathrm{MC}(\alpha)$ при изучении r-независимых с. в., которые до сих пор практически не изучались. Впервые r-независимые с. в. рассмотрены Н. С. Бахваловым [2] и использованы при вычислении на ЭВМ определенных интегралов. Б. В. Гладков [3, 4] сформулировал r-независимые с. в. с заданными одномерными распределениями и для сумм r-независимых с. в. доказал центральную предельную теорему (ЦПТ). Одним из основных результатов данной работы является лемма (доказательство очевидно), которая позволяет хорошо разработанные методы и результаты для $\mathrm{MC}(\alpha)$ использовать при исследовании r-независимых с. в.

Основная лемма. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ — *r-независимые с. в.,* τ_j, α_j, $j = 1, \ldots, N$, $N \le n$ — *целые числа,* $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = n$, f_j, $j = 1, \ldots, n$, — *действительные функции. Положим*

$$\xi_j = \sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} f_i(x).$$

Если $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \le r$, *то* $E\prod_{j=1}^{N} \xi_j^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{N} E\xi_j^{\alpha_j}$.

Следствие. *Если* $\alpha_j = \alpha$, $j = 1, \ldots, N$, *и* $N\alpha \le r$, *то* $\{\xi_j, j = 1, \ldots, N\}$ *образует* МС(α).

Применим теперь основную лемму для получения оценок скорости сходимости в ЦПТ для r-независимых с. в. Рассмотрим последовательность серий r_n-независимых в n-й серии с. в.

$$\{X_{nk},\ n = 1, 2, \ldots,\ k = 1, \ldots, k_n\}\ 4 \le r_n \le k_n, \quad EX_{nk} = 0, \quad EX_{nk}^2 < \infty.$$

Положим

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} EX_{nj}^2, \quad \Delta_n = \sup_x \left| P\left(\sum_{j=1}^{k_n} \frac{X_{nj}}{B_n} < x \right) - \Phi(x) \right|.$$

Теорема 1. *Пусть* $E|X_{nj}|^3 < \infty$, $j = 1, \ldots, k_n$. *Тогда существует абсолютная постоянная* C *такая, что*

$$\Delta_n \le C \left[\frac{1}{r_n^{1/5}} + \left(\frac{\sum_{j=1}^{k_n} E|X_{nj}|^3}{B_n^3} \right)^{1/4} \right].$$

Теорема 2. *Пусть* $r_n \to \infty$ *и выполняется условие Линдеберга. Тогда справедлива центральная предельная теорема.*

Докажем более общий результат:

$$\Delta_n \le C \left[\frac{1}{r_n^{1/5}} + \frac{1}{bB_n} \sum_{j=1}^{k_n} E\overline{\overline{X}}_j^2 + \left(\frac{1}{B_n^4} \sum_{j=1}^{k_n} E\overline{X}_j^4 \right)^{1/5} \right], \tag{1}$$

где $b > 0$, $\overline{X}_j = X_{nj} I(|X_{nj}| \le b)$, $\overline{\overline{X}}_j = X_{nj} I(|X_{nj}| > b)$, C — абсолютная постоянная. Отсюда, рассуждая аналогично тому, как при доказательстве теоремы 7 из [5, с. 162], получаем ряд результатов, в частности утверждения теорем 1, 2.

Прежде чем приступить к доказательству (1), приведем две леммы.

Лемма 1. *Положим*

$$\overline{B}_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} E(\overline{X}_j - E\overline{X}_j)^2, \quad \overline{\Delta}_n = \sup_x \left| P\left(\sum_{j=1}^{k_n} \frac{\overline{X}_j}{\overline{B}_n} < x \right) - \Phi(x) \right|.$$

Тогда

$$\Delta_n \le \overline{\Delta}_n + \frac{1}{b^2} \sum_{j=1}^{k_n} E\overline{\overline{X}}_j^2 + \frac{1}{\sqrt{2n}\,\overline{B}_n b} \sum_{j=1}^{k_n} E\overline{\overline{X}}_j^2 + \frac{1}{2\sqrt{2\pi e}} \frac{B_n^2 - \overline{B}^2}{\overline{B}_n^2}.$$

Лемма 2. *Пусть с. в.* $\xi, \ldots, \xi_N$ *являются* МС(4) *с* $E\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, N$. *Тогда*

$$\sup_x \left| P\left(\frac{\sum_1^N \xi_j}{\left(\sum_1^N E\xi_j^2\right)^{1/2}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le C \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{E\xi_j^4}{\left(\sum_1^N E\xi_j^2\right)^2} \right)^{1/5}.$$

Лемма 1 является некоторым видоизменением теоремы 8 из [6, с. 164]. Лемма 2 доказывается так же, как соответствующий результат из [5].

Перейдем к доказательству (1). Сначала докажем, что

$$\overline{\Delta}_n \le C\left(\sum_{j=1}^{k_n} \frac{E\overline{X}_j^4}{\overline{B}_n^4} + \frac{1}{r_n} \right)^{1/5}. \tag{2}$$

Пусть $N = [r/4]$. Определим числа $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = n$ следующим образом:

$$\tau_j = \min\left\{ \tau\colon \sum_{j=1}^{\tau} E(\overline{X}_j - E\overline{X}_j)^2 \le \frac{j}{N}\overline{B}_n^2,\ \sum_{j=1}^{\tau+1} E(\overline{X}_j - E\overline{X}_j)^2 > \frac{j}{N}\overline{B}_n^2 \right\}.$$

Положим $\xi_j = \sum\limits_{\tau=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} (\overline{X}_j - E\overline{X}_j)$, тогда $\sum\limits_{j=1}^{k_n} (\overline{X}_j - E\overline{X}_j) = \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_j$ и

$$E\,\xi_j^2 = \sum_{\tau=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} E(\overline{X}_j - E\overline{X}_j)^2 \le \frac{j}{N}\overline{B}_n^2 - \frac{j-2}{N}\overline{B}_n^2 \le \frac{2}{N}\overline{B}_n^2, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} E\,\xi_j^2 = \overline{B}_n^2.$$

На основании следствия основной леммы с учетом того, что $4N \le r$, видим, что $\xi_1, \ldots, \xi_N$ образуют МС(4). По лемме 2 получаем

$$\overline{\Delta}_n = \sup_x \left| P\left(\frac{\sum_1^N \xi_j}{\left(\sum_1^N E\xi_j^2\right)^{1/2}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le C\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{E\xi_j^4}{\left(\sum_1^N E\xi_j^2\right)^2} \right)^{1/5}.$$

В силу оценки

$$E\xi_j^4 \le C\left(\sum_{\tau_{j+1}+1}^{\tau_j} E(\overline{X}_j - E\overline{X}_j)^4 + \left(\sum_{\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} E(\overline{X}_j - E\overline{X}_j)^2 \right)^2 \right.$$

и (3) имеем

$$\frac{1}{\left(\sum E\xi_j^2\right)^2} \sum_{j=1}^{N} E\xi_j^4 \le \left(\frac{1}{\overline{B}_n^4} \sum_1^{k_n} E\overline{X}_j^4 + \frac{1}{N} \right).$$

Полученное неравенство доказывает (2). Далее, очевидно, что

$$0 \le 1 - \frac{\overline{B}_n^2}{B_n^2} = \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \left(E\overline{\overline{X}}_{nj} + (E\overline{\overline{X}}_{nj})^2 \right) \le \frac{2}{B_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} E\overline{\overline{X}}_j^2.$$

Следовательно,

$$0 \le 1 - \frac{\overline{B}_n}{B_n} \le \frac{2}{B_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} E\overline{\overline{X}}_j^2.$$

Из последней оценки и (2) в силу леммы 1 следует (1).

1. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов.- М.: Изд-во иностр. лит., 1963.- 359 с.
2. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальных оценках сходимости квадратурных процессов // Методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы.– М.: Наука, 1964. – С. 5 – 63.
3. *Гладков Б. В.* Суммы случайных величин, любые из которых независимы // Мат. заметки. – 1982. – **32**, вып. 3. – С. 385 – 393.
4. *Гладков Б. В.* Центральная предельная теорема для сумм с. в., любые r из которых независимы // Дискретная математика. – 1989. – **1**, вып. 1. – С. 22 – 28.
5. *Шарахметов Ш.* Оценка остаточного члена в центральной предельной теореме для сильно мультипликативной системы функций // Вероятностные процессы и мат. статистика. – Ташкент: Фан, 1978. – С. 179 – 183.
6. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин – М.: Наука, 1987. – 320 с.

Получено 25.12.91