УДК 517.53

В. И. Белый, д-р физ.-мат. наук, **И. Е. Прицкер,** асп. (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

ОБ УСЛОВИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО КЛИНА И МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Let a Jordan curve L satisfy the internal or external wedge condition; the wedge can be of various geometric forms. Some estimates are obtained for the continuity modulus of conformal mappings of the exterior (or the interior) of L onto the exterior (or the interior) of the unit circle.

Вивчається жорданова крива L, що задовольняє внутрішню або зовнішню умови клину різноманітної геометричної форми. Одержані оцінки для модулів неперервності конформних відображень внутрішності та зовнішності L відповідно на внутрішність та зовнішність одиничного кола.

1. Пусть L — замкнутая жорданова кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Кривая L разбивает плоскость $\mathbb{C}$ на ограниченную облсть $G = \operatorname{Int} L$ (точка $a \in G$) и неограниченную $\Omega = \operatorname{Ext} L$, содержащую точку ∞.

Известно, что существует конформное отображение $\varphi\colon G \to D$ области G на единичный круг $D = \{w\colon |w| < 1\}$, нормированное условиями $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a) > 0$, и обратное конформное отображение $\psi = \varphi^{-1}$.

Для области Ω существует конформное отображение $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$, где $\Omega' = \{w\colon |w| > 1\}$, с нормировкой в бесконечности $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$ и его обратное $\Psi = \Phi^{-1}$.

Известно множество различных геометрических условий для областей G и Ω, гарантирующих принадлежность конформных отображений $\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ классам Гельдера. Одно из таких условий рассмотрено в работе [1]: кривая L удовлетворяет внутреннему условию α-клина, если $\exists\, r > 0$, $\alpha \in (0, 1)$: $\forall\, z \in L$ существует круговой сектор с вершиной в точке z раствора $\alpha\pi$ и радиуса r, расположенный в области G. Если $\forall\, z \in L$ существует такой сектор, содержащийся в Ω, то L удовлетворяет внешнему условию α-клина. В [1] доказано:

1) если L удовлетворяет внутреннему условию α-клина, то $\psi \in H^{\alpha}(\overline{D})$;

2) если L удовлетворяет внешнему условию α-клина, то $\varphi \in H^{\beta}(\overline{G})$, где $\beta = 1/(2-\alpha)$.

В данной работе с использованием результатов из [2] рассматриваются внутреннее и внешнее условия клина более общего геометрического строения, чем α-клин, что будет гарантировать принадлежность конформных отображений классам с определенной мажорантой модуля непрерывности.

2. Пусть $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ — вещественнозначные функции ограниченной вариации на $[0, r]$, причем $\theta_1(t), \theta_2(t) \geq m > 0$ и $\theta(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) \leq \pi$ при $t \in [0, r]$. Будем называть клином (с вершиной в точке 0) множество $K = \{\zeta\colon |\zeta| < r, -\theta_2(t) < \arg \zeta < \theta_1(t)\}$. Если $\exists\, \theta_1(t), \theta_2(t)$ и $r > 0$ такие, что $\forall\, z \in L$ в области G можно разместить клин K с вершиной в точке z, то будем говорить, что L удовлетворяет внутреннему условию клина. Аналогично, если $\exists\, \theta_1(t), \theta_2(t)$ и $t > 0$ такие, что $\forall\, z \in L$ в области Ω можно разместить клин с вершиной в точке z, то L удовлетворяет внешнему условию клина.

***Замечание* 1.** Если L удовлетворяет внутреннему (или внешнему) условию клина, то она также удовлетворяет внутреннему (внешнему) условию α-клина раствора $2m$. Следовательно, все утверждения относительно геометрических свойств L, доказанные в [1, 3], справедливы в рассматриваемом случае. В частности, L спрямляема и $\exists M' > 0$ $\forall z_1, z_2 \in L$

$$\operatorname{mes}(\widetilde{z_1 z_2}) \leq M' d(z_1, z_2), \tag{1}$$

где $\widetilde{z_1 z_2}$ — меньшая по диаметру дуга L, выделяемая точками z_1 и z_2; $d(z_1, z_2) = \inf\limits_{\gamma} \operatorname{diam} \gamma$, γ — кривые, соединяющие точки z_1 и z_2 в области Ω (соответственно в области G).

Пусть $\omega(t)$ — функция типа модуля непрерывности, т. е. $\omega(t)$ — положительная, непрерывная, неубывающая и полуаддитивная при $t \in (0, +\infty)$ функция, $\lim\limits_{t \to +0} \omega(t) = 0$ [4]. Будем говорить, что непрерывная на компакте $\mathfrak{M}$ функция f принадлежит классу $H^{\omega}(\mathfrak{M})$, если ее модуль непрерывности удовлетворяет условию $\omega(f, \delta) \leq K\omega(\delta)$, где константа K не зависит от δ. В дальнейшем будем рассматривать следующие функции типа модуля непрерывности:

$$\omega_1(t) = \exp\left(-\pi \int_t^r \frac{ds}{s(2\pi - \theta(s))}\right),$$

$\omega_2(t)$ — функция, обратная для функции

$$t(\omega) = \exp\left(-\pi \int_{\omega}^r \frac{ds}{s\theta(s)}\right).$$

Доказательства того, что $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ являются функциями типа модуля непрерывности, будут приведены ниже.

Пусть $\mu_a(z, \zeta, G)$ — приведенный модуль семейства кривых, отделяющих точки $z, \zeta \in L$ от точки a в области G, и $\mu_\infty(z, \zeta, \Omega)$ — приведенный модуль семейства кривых, отделяющих точки z и ζ от точек на бесконечности в Ω [5].

3. Основные результаты.

Теорема 1. *Если L удовлетворяет внешнему условию клина, то $\varphi \in H^{\omega_1}(\overline{G})$ и $\Psi \in H^{\omega_2}(\overline{\Omega}')$.*

Теорема 2. *Если L удовлетворяет внутреннему условию клина, то $\Psi \in H^{\omega_2}(\overline{D})$ и $\Phi \in H^{\omega_1}(\overline{\Omega})$.*

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения, содержащиеся в леммах 1 – 6.

Лемма 1. 1) *Если L удовлетворяет внешнему условию клина, то $\forall z, \zeta \in L$: $|z - \zeta| < \delta_0$, $\exists M = M(L)$ такая, что найдется круговая дуга с центром в точке z и радиусом $M|z - \zeta|$, отделяющая точки z и ζ от точки a в области G.*

2) *Если L удовлетворяет внутреннему условию клина, то $\forall z, \zeta \in L$: $|z - \zeta| < \delta_0$, $\exists M = M(L)$ такая, что найдется круговая дуга с центром в точке z и радиусом $M|z - \zeta|$, отделяющая точки z и ζ от точки ∞ в области Ω.*

Доказательство. Доказательства утверждений 1 и 2 аналогичны, поэтому остановимся на первом из них. По замечанию 1 кривая L удовлетворяет также условию α-клина с некоторым α. Используя замечание к лемме 4 из [1], получаем, что искомая отделяющая круговая дуга существует. Отметим, что аналогичная лемма доказывалась в [5] при условии квазиконформности кривой L.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{R} = \{z: r_1 < |z| < r_2,\ -\theta_2(|z|) < \arg z < \theta_1(|z|)\}$, $\mathfrak{R}' = \{z: r_1 < |z| < r_2,\ \theta_1(|z|) < \arg z < 2\pi - \theta_2(|z|)\}$, *где* $0 < r_1 < r_2 \le r$, *тогда для модулей семейств кривых, разделяющих круговые дуги в четырехсторонниках* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{R}'$, *справедливы неравенства*

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s\theta(s)} \le m(\mathfrak{R}) \le \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s\theta(s)} + C_1, \tag{2}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s(2\pi - \theta(s))} \le m(\mathfrak{R}') \le \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s(2\pi - \theta(s))} + C_2. \tag{3}$$

Доказательство. Оценки снизу для $m(\mathfrak{R})$ и $m(\mathfrak{R}')$ легко следуют из рассмотрения модулей семейств отделяющих круговых дуг в $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ [6]. Для получения оценок сверху нужно воспользоваться вспомогательным отображением $\tau = \log(1/z)$ и оценками модулей четырехсторонников из [7].

Для оценок модулей непрерывности конформных отображений необходимо оценить приведенные модули семейств кривых, отделяющих точки $z, \zeta \in L$ от точки a в области G и от точки ∞ в области Ω.

Лемма 3. *Пусть* L *удовлетворяет внешнему условию клина. Тогда* $\forall\ z, \zeta \in L: |z - \zeta| < \delta_0$

$$\mu_a(z, \zeta, G) \ge \int_{|z-\zeta|}^{r} \frac{dt}{t(2\pi - \theta(t))} + C_3, \tag{4}$$

$$\mu_\infty(z, \zeta, \Omega) \le \int_{|z-\zeta|}^{r} \frac{dt}{t\theta(t)} + C_4. \tag{5}$$

Лемма 4. *Пусть* L *удовлетворяет внутреннему условию клина. Тогда* $\forall\ z, \zeta \in L: |z - \zeta| < \delta_0$

$$\mu_a(z, \zeta, G) \le \int_{|z-\zeta|}^{r} \frac{dt}{t\theta(t)} + C_5, \tag{6}$$

$$\mu_\infty(z, \zeta, \Omega) \ge \int_{|z-\zeta|}^{r} \frac{dt}{t(2\pi - \theta(t))} + C_6. \tag{7}$$

Доказательство. Доказательства лемм 3 и 4 однотипны, поэтому докажем лишь лемму 3. Пусть $z, \zeta \in L$, $|z - \zeta| < \delta_0$.

1) Для получения оценки (4) рассмотрим подсемейство кривых, отделяющих точки z и ζ от границы круга $D_\rho = \{\tau: |\tau - a| < \rho\}$, состоящее из семейства Γ_1 круговых дуг с радиусами от $M|z - \zeta|$ до r и центром в точке z (которые по лемме 1 отделяют точки z и ζ в области G от границы D_ρ при достаточно малом ρ) и семейства окружностей Γ_2 с центром в точке a и радиусами от ρ до ρ_0. Пусть $m(z, \zeta, D_\rho)$ — модуль семейства кривых, отделяющих

точки z и ζ от границы D_ρ в области G [5]. Тогда $m(z, \zeta, D_\rho) \geq m(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = m(\Gamma_1) + m(\Gamma_2)$. Последнее равенство выполняется в силу того, что семейства кривых Γ_1 и Γ_2 лежат в непересекающихся множествах [6].

Замечая, что в точке z можно "вставить" извне клин, и продолжая кривые семейства Γ_1 до границы этого клина, с учетом леммы 2 получаем [6]

$$m(\Gamma_1) \geq \int\limits_{M|z-\zeta|}^{r} \frac{ds}{s(2\pi - \theta(s))} \geq \int\limits_{|z-\zeta|}^{r} \frac{ds}{s(2\pi - \theta(s))} + C_7.$$

Известно, что $m(\Gamma_2) = \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{\rho_0}{\rho}$; поэтому, используя последнее неравенство, имеем

$$m(z, \zeta, D_\rho) \geq \int\limits_{|z-\zeta|}^{r} \frac{ds}{s(2\pi - \theta(s))} + \frac{1}{2\pi}\log\frac{\rho_0}{\rho} + C_7,$$

$$m(z, \zeta, D_\rho) + \frac{1}{2\pi}\log\rho \geq \int\limits_{|z-\zeta|}^{r} \frac{ds}{s(2\pi - \theta(s))} + C_3.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\rho \to 0$, по определению $\mu_a(z, \zeta, G)$ получаем неравенство (4).

2) Обозначим через D_R круг радиуса R (где R достаточно велико) с центром в точке a. Пусть $m(z, \zeta, D_R)$ — модуль семейства кривых Γ, отделяющих точки z и ζ от границы круга D_R в области Ω [5]. Необходимо оценить величину $m(z, \zeta, D_R)$ сверху, для этого представим семейство Γ в виде объединения подсемейств кривых.

Пусть $\gamma(\rho)$ — максимальная дуга окружности радиуса ρ с центром в точке z, которая лежит в области Ω и пересекает клин, "вставленный" в точке z. Пусть M' то же, что и в соотношении (1). Тогда:

Γ_3 — подсемейство Γ, состоящее из кривых с концами на L, которые пересекают дугу окружности $\gamma(e^{-2\pi}|z-\zeta|/(2M'))$;

Γ_4 — подсемейство Γ, состоящее из кривых, которые лежат между $\gamma(e^{-2\pi} \times |z-\zeta|/(2M'))$ и $\gamma(r)$;

Γ_5 — подсемейство Γ, состоящее из кривых с концами на L, которые пересекают $\gamma(e^{-2\pi}r)$ и $\gamma(r)$;

Γ_6 — подсемейство Γ, состоящее из кривых с концами на L, которые не пересекают $\gamma(e^{-2\pi}r)$ и лежат вне компоненты области Ω, отсекаемой $\gamma(e^{-2\pi}r)$ и содержащей на границе точку z;

Γ_7 — подсемейство Γ, состоящее из замкнутых кривых.

Очевидно, что $\Gamma = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7$. Пользуясь полуаддитивностью модуля семейства кривых, имеем $m(\Gamma) \leq \sum_{i=3}^{7} m(\Gamma_i)$. Оценим сверху модули семейств Γ_i. Используя соотношение (1), видим, что кривые семейства Γ_3 должны пересекать также дугу $\gamma(|z-\zeta|/(2M'))$. Учитывая известную величину модуля семейства кривых, соединяющих круговые компоненты кольца, по свойствам модуля получаем

$$m(\Gamma_3) \le \frac{2\pi}{\log\left(\dfrac{|z-\zeta|2M'}{2M'e^{-2\pi}|z-\zeta|}\right)} = 1.$$

Рассуждая аналогично, оцениваем $m(\Gamma_5)$:

$$m(\Gamma_5) \le \frac{2\pi}{\log\left(\dfrac{r}{re^{-2\pi}}\right)} = 1.$$

Каждая кривая семейства Γ_4 содержит подкривую, разделяющую круговые дуги в четырехстороннике, отсекаемом от клина дугами $\gamma(e^{-2\pi}|z-\zeta|/(2M'))$ и $\gamma(r)$. Используя лемму 2, имеем

$$m(\Gamma_4) \le \int\limits_{e^{-2\pi}|z-\zeta|/(2M')}^{r} \frac{ds}{s\theta(s)} + C_1 \le \int\limits_{|z-\zeta|}^{r} \frac{ds}{s\theta(s)} + C_8.$$

Семейство Γ_7 является подсемейством семейства кривых, разделяющих окружности $|\tau - a| = \rho_0$ и $|\tau - a| = R$, поэтому $m(\Gamma_7) \le \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{R}{\rho_0}$. Для оценки $m(\Gamma_6)$ представим Γ_6 в виде $\Gamma_6 = \Gamma_6' \cup \Gamma_6''$, где Γ_6' — подсемейство кривых, пересекающих окружность радиуса $e^{2\pi}\operatorname{diam} L$ с центром в точке a, а Γ_6'' — подсемейство кривых, лежащих внутри нее;

$$m(\Gamma_6') \le \frac{2\pi}{\log\left(\dfrac{e^{2\pi}\operatorname{diam} L}{\operatorname{diam} L}\right)} = 1.$$

Из соотношения (1) следует, что если $\gamma \in \Gamma_6$, то $\operatorname{mes}\gamma \ge C_9$, поэтому для оценки $m(\Gamma_6'')$ можно взять допустимую метрику

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 1/C_9, & |\tau - a| < e^{2\pi}\operatorname{diam} L, \\ 0, & |\tau - a| \ge e^{2\pi}\operatorname{diam} L. \end{cases}$$

Значит,

$$m(\Gamma_6'') \le \iint\limits_{|\tau-a|<e^{2\pi}\operatorname{diam} L} \frac{1}{(C_9)^2}dxdy = \pi\left(\frac{e^{2\pi}\operatorname{diam} L}{C_9}\right)^2 = C_{10},$$

$$m(\Gamma_6) \le m(\Gamma_6') + m(\Gamma_6'') \le C_{10} + 1.$$

Используя все полученные выше оценки, имеем

$$m(\Gamma) \le \int\limits_{|z-\zeta|}^{r} \frac{ds}{s\theta(s)} + C_8 + C_{10} + 3 + \frac{1}{2\pi}\log\frac{R}{\rho_0}.$$

Таким образом,

$$m(z, \zeta, D_R) - \frac{1}{2\pi}\log R \le \int\limits_{|z-\zeta|}^{r} \frac{ds}{s\theta(s)} + C_4.$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$, получаем неравенство (5) и тем самым доказываем лемму 3.

Лемма 5. *Функция* $\omega_1(t) = \exp\left(-\pi\int\limits_t^r \frac{ds}{s(2\pi-\theta(s))}\right)$ *является функцией типа модуля непрерывности.*

Доказательство. Очевидно, что $\omega_1(t)$ является положительной, непрерывной, монотонно возрастающей функцией на $(0, r)$. Учитывая, что $\lim\limits_{t\to+0}\omega_1(t) = 0$, мы можем положить по непрерывности $\omega_1(0) = 0$.

Для проверки полуаддитивности $\omega_1(t)$ достаточно доказать, что $\omega_1(t)/t$ не возрастает [4]. Прямым дифференцированием можно показать, что $(\omega_1(t)/t)' \le \le 0$ при $t \in [0, r]$ за исключением счетного множества точек, поэтому с учетом непрерывности функции $\omega_1(t)/t$ получаем, что она не возрастает на $[0, r]$.

Лемма 6. *Пусть* $\omega_2(t)$ — *функция, обратная для*

$$t(\omega) = \exp\left(-\pi\int\limits_\omega^r \frac{ds}{s\theta(s)}\right),$$

тогда $\omega_2(t)$ *является функцией типа модуля непрерывности.*

Доказательство. Рассуждая по аналогии с доказательством леммы 5 и применяя теорему об обратной функции, получаем, что $\omega_2(t)$ является положительной, непрерывной, монотонно возрастающей функцией на $[0, 1]$. Кроме того, $(\omega_2(t)/t)' \le 0$ для всех $t \in [0, 1]$, за исключением счетного числа точек. Последнее утверждение доказывется с помощью дифференцирования и перехода к производной функции $t(\omega)$. Таким образом, $\omega_2(t)/t$ не возрастает и $\omega_2(t)$ полуаддитивна.

Доказательства теорем 1 и 2.

1. Пользуясь теоремами 2 и 5 из [2] и учитывая лемму 3, получаем утверждение теоремы 1.
2. Из теорем 3 и 4 работы [2] и оценки леммы 4 вытекает утверждение теоремы 2.

Замечания. **2.** Если мы рассмотрим в качестве частного случая α-клин, т. е. $\theta_1(t) + \theta_2(t) = \alpha\pi$, то из теорем 1 и 2 легко получаются результаты работы [1]. Показатели гельдеровости прямого и обратного конформных отображений, полученные в [1], неулучшаемы.

3. Отметим, что условия ограниченности вариаций функций $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ можно заменить менее жестким условием ограниченности вариаций степени $2/3$ для этих функций [8].

4. Легко построить пример области G, граница которой не удовлетворяет внутреннему условию α-клина, но отображающая функция $\Psi \in H^\alpha(\overline{D})$. В качестве такой области можно взять "клиновидную" область $G = \{z\colon 0 < |z| < 1, -\frac{\alpha}{2}\pi + c|z| < \arg z < \frac{\alpha}{2}\pi - c|z|\}$; где $c > 0$ — некоторая константа. По теореме 2 получаем $\Psi \in H^\alpha(\overline{D})$.

Аналогичный пример можно построить для функции φ и внешнего условия клина.

4. Условие остроконечного клина. Рассмотрим условие клина, имеющего нулевой угол в вершине с заданным порядком касания. Пусть $K = \{z = x + iy\colon 0 < x < 1,\ -C_{11}x^p < y < C_{12}x^p\}$, где $C_{11}, C_{12} > 0$, $p > 1$. Порядок касания в вершине клина равен p.

Для дальнейшего рассмотрения нам потребуется легко проверяемый факт, что $\omega(t) = (\log 1/t)^{-1/(p-1)}$ является функцией типа модуля непрерывности.

Теорема 3. *Если L удовлетворяет внешнему условию остроконечного клина, то $\Psi \in H^{\omega}(\overline{\Omega}')$, где*

$$\omega(t) = \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-1/(p-1)}$$

Теорема 4. *Если L удовлетворяет внутреннему условию остроконечного клина, то $\Psi \in H^{\omega}(\overline{D})$, где*

$$\omega(t) = \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-1/(p-1)}$$

Доказательство теорем 3 и 4 проводится по той же схеме, что и для теорем 1 и 2. Для этого необходимы оценки приведенных модулей семейств кривых, отделяющих точки $z, \zeta \in L$ $(|z-\zeta| < \delta_0)$ от ∞ в Ω и от точки a в G.

Лемма 7. *Если L удовлетворяет внешнему условию остроконечного клина, то*

$$\mu_{\infty}(z, \zeta, \Omega) \le \frac{C_{13}}{|z-\zeta|^{p-1}} + C_{14}.$$

Лемма 8. *Если L удовлетворяет внутреннему условию остроконечного клина, то*

$$\mu_a(z, \zeta, G) \le \frac{C_{15}}{|z-\zeta|^{p-1}} + C_{16}.$$

Оценки лемм 7 и 8 следуют из теоремы 2 работы [9]. Доказательство теорем 3 и 4, очевидно, следует из лемм 7, 8 и результатов работы [2].

Отметим, что теоремы 3 и 4 точны, если в качестве области G взять сам остроконечный клин K, а в качестве области Ω рассмотреть неограниченную область $\mathbb{C} \setminus (\overline{D} \setminus K)$.

1. *Lesley F. D.* Conformal mappings of domains satisfying a wedge condition // Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – 93, № 3. – P. 483 – 488.
2. *Белый В. И.* О модулях непрерывности внешнего и внутреннего конформных отображений единичного круга // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 469 – 475.
3. *Fitzgerald C. H., Lesley F. D.* Boundary regularity of domains satisfying a wedge condition // Complex Variab. – 1986. – **5**. – P. 141 – 154.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 508 с.
5. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение в областях с квазиконформной границей // Мат. сб. – 1977. – **102**, № 3. – С. 331 – 361.
6. *Ohtsuka M.* Dirichlet problem, extremal length and prime ends. – New York: Van Nostrand, 1970. – 326 p.
7. *Jenkins J. A., Oikawa K.* On results of Ahlfors and Hayman // Ill. J. Math. – 1971. – **15**, № 4. – P. 664 – 671.
8. *Jenkins J. A., Oikawa K.* On Ahlfors' "second fundamental inequality" // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – **62**, № 2. – P. 166 – 270.
9. *Маймескул В. В.* Оценки роста сопряженных гармонических полиномов в областях комплексной плоскости // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 772 – 777.

Получено 04. 06. 91