УДК 519.21

О. И. Клесов, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ИЗ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

The series $\sum_{n\geq 1}\tau_n P(|S_n|\geq \varepsilon n^{\alpha})$ is studied, where S_n are the sums of independent identically distributed random variables, $\{\tau_n\}$ is a sequence of nonnegative numbers, $\alpha>0$, $\varepsilon>0$ is an arbitrary positive number. For a wide class of sequences $\{\tau_n\}$, the necessary and sufficient conditions are found for convergence of this series for any $\varepsilon>0$.

Вивчаються ряди $\sum_{n\geq 1}\tau_n P(|S_n|\geq \varepsilon n^{\alpha})$, де S_n – це суми незалежних однаково розподілених випадкових величин, $\{\tau_n\}$ – довільна послідовність додатних чисел, $\alpha>0$, $\varepsilon>0$ – довільне додатне число. Для широкого класу послідовностей $\{\tau_n\}$ знайдені необхідні та достатні умови збіжності для будь-якого $\varepsilon>0$ цього ряду.

1. Введение. Пусть $\{X_n,\ n\geq 1\}$ — независимые одинаково распределенные (н. о. р.) случайные величины (с. в.) с функцией распределения F, $X = X_1$, $S_n=\sum_{k\leq n}X_k$. Предположим, что $\{\tau_n,\ n\geq 1\}$ — последовательность неотрицательных вещественных чисел и $\varepsilon>0$, $\alpha>1/2$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n\geq 1}\tau_n P(|S_n|\geq \varepsilon n^{\alpha}). \tag{1}$$

В данной статье найдены необходимые и достаточные условия сходимости для любого $\varepsilon>0$ ряда (1). Для некоторых последовательностей $\{\tau_n\}$ сходимость ряда (1) изучалась ранее. Первый такой результат получен в работе [1] для последовательностей $\tau_n\equiv 1$ и $\alpha=1$. Позднее М. Кац [2] изучил случай $\tau_n = n^{\alpha r-2}$, $\alpha r\geq 1$. Более общий случай $\tau_n = L(n)\,n^{\alpha r-2}$, $\alpha r\geq 1$, L — медленно меняющаяся функция, рассмотрели К. К. Хейди и В. Рохатги [3].

В монографии М. У. Гафурова и С. Х. Сираждинова [4] подробно изучен случай монотонных (и близких к монотонным) τ_n. В статье [5] изучался ряд $\sum_{k\geq 1}P(|S_{n_k}|\geq \varepsilon n_k)$, где $\{n_k\}$ — некоторая подпоследовательность натуральных чисел. Этот ряд является частным случаем ряда (1), если положить $\alpha=1$, $\tau_n=1$, $n\in\{n_k\}$ и $\tau_n=0$, $n\notin\{n_k\}$. Отметим, что этот случай отличается от предыдущих, так как τ_n не являются монотонными и правильно изменяющимися.

В работах [6–8] рассмотрен аналог ряда (1) для кратных сумм с. в. Довольно часто этот случай можно свести к изучению ряда (1) для специальной последовательности $\{\tau_n\}$. И в этом случае последовательность $\{\tau_n\}$ отличается тем, что не является ни монотонной, ни правильно меняющейся.

Другое направление исследования рядов типа (1) начало развиваться после публикации статьи [9], в которой изучалась асимптотика по ε ряда (1) с $\alpha=1$, $\tau_n\equiv 1$. Это направление активно разрабатывалось другими авторами и описано в книге [4]. В настоящей статье упомянуты лишь основные направления исследования ряда (1) и пионерские работы. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в монографии [4].

Переходя к изложению результатов этой статьи, отметим, что в исследуемой задаче принципиальным является требование сходимости ряда (1) для любого $\varepsilon > 0$. Изучение сходимости этого ряда для фиксированного ε приводит в ряде случаев к методам, отличающимся от используемых в этой статье. Однако для регулярно меняющихся τ_n сходимость ряда (1) в какой-либо точке эквивалентна его сходимости для любого $\varepsilon > 0$.

Если ряд $\sum_{n\geq 1} \tau_n$ сходится, то сходится и ряд (1) для любого $\varepsilon > 0$ при любом распределении F. Если же ряд $\sum \tau_n$ расходится, то необходимо различать случаи $\alpha \leq 1$ и $\alpha > 1$. В первом из них ряд (1) расходится при любом невырожденном распределении, если τ_n растут достаточно быстро. Если же $\alpha > 1$, то ряд (1) для некоторых распределений F может сходиться при любой скорости возрастания τ_n (примером такого распределения может служить распределение ограниченной случайной величины).

Для гауссовского распределения сходимость ряда (1) при любом $\varepsilon > 0$ равносильна условию

$$\lim_{n\to\infty} \ln^+ \tau_n \Big/ n^{2\alpha-1} = 0, \tag{2}$$

где $\ln^+ z = \ln(z+2)$ для $z \geq 0$. Это же условие характеризует допустимую скорость роста τ_n и для других распределений в случае $\alpha \leq 1$ (см. теорему 1). В случае $\alpha > 1$ и гауссовского распределения сходимость ряда (1) для любого $\varepsilon > 0$ равносильна также условию

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \limsup_{n\to\infty} \tau_n^{1/n} P(|X| \geq \varepsilon n^{\alpha-1}) \leq 2, \tag{3}$$

которое является необходимым и для других распределений. Условия (2) и (3) легко проверяются для всех последовательностей $\{\tau_n\}$, описанных выше.

Достаточные условия сходимости для любого $\varepsilon > 0$ ряда (1) для изученных к настоящему времени последовательностей могут быть записаны в следующем виде:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \sum_{n\geq 1} n\tau_n P(|X| \geq \varepsilon n^{\alpha}) < \infty. \tag{4}$$

Можно показать, что условие (4) для регулярно меняющихся τ_n равносильно условию

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \sum_{n\geq 1} n\tau_n P(|X| \geq \varepsilon n^{\alpha}) < \infty.$$

Эти условия для простейших $\{\tau_n\}$ могут быть записаны более компактно. Например, если $\tau_n = n^{\alpha r-2}$, $\alpha r \geq 1$, то условие (4) эквивалентно $E|X|^r < \infty$. Во многих случаях условие (4) является также и необходимым (см. теорему 1). Отметим также, что в случае $\tau_n = 1/n$ условие (4) эквивалентно условию $E|X|^{1/\alpha} < \infty$, которое является, как известно, критерием усиленного закона больших чисел Марцинкевича – Зигмунда. Из результатов работы [2] следует, что в этом случае сходимость для любого $\varepsilon > 0$ ряда (1) равносильна условию

$$E|X|^{1/\alpha} < \infty \quad \text{и} \quad \mathrm{E}X = 0, \quad \text{если } \alpha \leq 1. \tag{5}$$

Для класса последовательностей $\tau_n = n^{\theta}$, $\sum \tau_n = \infty$, условие (5) является минимальным.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $I(M)$ — индикатор события M, $\mu(\xi)$ — медиана случайной величины ξ, ξ^s — симметризация ξ, т. е. $\xi^s = \xi - \xi'$, где ξ' — некоторая независимая копия ξ. Если задана последовательность $\{X_n\}$, то симметризацию будем образовывать с помощью копий X_n', не зависящих друг от друга и от последовательности $\{X_n\}$.

2. Вспомогательные результаты. В этом пункте собраны вспомогательные утверждения, которые используются далее. Некоторые из них, возможно, имеют и самостоятельный интерес. Леммы 1–3 используются только при исследовании необходимых условий сходимости ряда (1) в п. 3, леммы 4, 5 — только при исследовании достаточных условий в п. 4, а леммы 6–8 — только при изучении специальных последовательностей $\{\tau_n\}$ в п. 5.

Лемма 1. *Пусть $\{X_n,\ n \ge 1\}$ — н. о. р. с. в., имеющие симметричное распределение, и $T = \sum_{k \le n} Y_k$. Если для некоторой константы $a > 0$ выполнено неравенство $|Y_k| \le a$ почти наверное и $\alpha \le 1$, то существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, при которых*

$$P(T_n \ge \varepsilon n^{\alpha}) \ge C_1 \exp\{-C_2 \delta n^{2\alpha - 1}\} \tag{6}$$

для любого $\varepsilon > 0$, $n \ge 1$ и $\delta = \varepsilon^2 / \sigma^2(a)$, $\sigma^2(a) = \int_{-a}^{a} x^2\, dF(x)$.

Доказательство. В случае $\alpha < 1$ выполнены условия экспоненциальных неравенств А. Н. Колмогорова (см., например, [10, с. 359]) и поэтому (6) при $C_1 = C_2 = 1$ вытекает из этих неравенств. При $\alpha = 1$ условия Колмогорова не выполнены, так как $x_n M_n / B_n = \varepsilon a / \sigma^2(a)$ не стремится к 0 для $x_n = \varepsilon n$, $M_n = a$, $B_n = ET_n^2$. Тем не менее, необходимый результат можно получить и в этом случае. Для этого достаточно повторить доказательство экспоненциального неравенства Колмогорова, но в предельных переходах учитывать соотношение $x_n M_n / B_n \to \varepsilon a / \sigma^2(a)$ (см., например, упражнение 10.2.10 в [11, с. 354]).

Лемма 2. *Пусть $\{X_n,\ n \ge 1\}$ — н. о. р. с. в., имеющие симметричное распределение. Пусть $a > 0$ и $Y_n = X_n I(|X_n| < a)$, $T_n = \sum_{k \le n} Y_k$. Тогда для любого $x > 0$ $P(T_n \ge x) \le 2P(S_n \ge x)$.*

Доказательство. Используем идею доказательства неравенства П. Леви (см. например, [10], глава III, теорема 10). Положим $Z_n = X_n - Y_n$ и $\zeta_1 = Y_1$, $\zeta_{2m-1} = \sum_{k \le m-1} X_k + Y_m$, $\zeta_{2m} = \sum_{k \le m} X_k$. Понятно, что $\zeta_{2m-1} = Y_m + S_{m-1}$ и $\zeta_{2m} = S_m$. Положим также $\eta_k = \max_{i \le k} \zeta_i$, $D_1 = \{\omega\colon \zeta_1 \ge x\}$, $D_k = \{\omega\colon \eta_{k-1} < x,\ \zeta_k \ge x\}$, $k \le 2n$. Если $E_k = \{\omega\colon \zeta_{2n} - \zeta_k > 0\}$, то $P(E_k) \ge 1/2$ для $k \le 2n$. Далее, $\{\omega\colon \eta_{2n} \ge x\} = \bigcup_{k \le 2n} D_k$, $\bigcup_{k \le 2n} E_k D_k \in \{\omega\colon \zeta_{2n} \ge x\}$. Кроме того,

$$2P(E_{2m} D_{2m}) = 2P(E_{2m}) P(D_{2m}) \ge P(D_{2m}),$$

$$\begin{aligned} P(E_{2m-1} D_{2m-1}) &= P(E_{2m-1} D_{2m-1},\ Y_m \ne 0) + P(E_{2m-1} D_{2m-1},\ Y_m = 0) = \\ &= P(D_{2m-1},\ \zeta_{2n} - \zeta_{2m} \ge 0,\ |Y_m| < a) = \\ &= P(D_{2m-1},\ |Y_m| < a) P(\zeta_{2n} - \zeta_{2m} \ge 0) \ge P(D_{2m-1})/2. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $k \le 2n$ $2P(E_k D_k) \ge P(D_k)$. С учетом отмеченных неравенств имеем для $x > 0$

$$P(T_n \geq x) \leq P(\max_{k \leq 2n} \zeta_k \geq x) = \sum_{k \leq 2n} P(D_k) \leq 2 \sum_{k \leq 2n} P(E_k D_k) \leq 2P(\zeta_{2n} \geq x),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть* $\{X_n, n \geq 1\}$ — *н. о. р. с. в. Если для некоторой последовательности действительных чисел* $\{t_n, n \geq 1\}$

$$\limsup_{n \to \infty} n P(|X| \geq t_n) < 2, \tag{7}$$

то найдется константа $C > 0$, *для которой* $P(|S_n| \geq t_n) + P(|S_{n-1}| \geq t_n) \geq$ $\geq C n P(|X| \geq 2t_n)$.

Доказательство. Определим события

$$U_k = \{\omega: |X_k| \geq 2t_n\}, \ V_k = \{\omega: |S_n - X_k| < t_n\}, \ W_k = U_k \cap V_k.$$

Обозначим для любого события A через A^c его дополнение: $A^c = \Omega \backslash A$. Для любой последовательности событий $\{A_n\}$ положим $\bigcap_{1 \leq j \leq 0} A_j = \Omega$, $\bigcup_{1 \leq j \leq 0} A_j =$ $= \varnothing$. Тогда

$$P(|S_n| \geq t_n) \geq P\Big(\bigcup_{k \leq n} W_k\Big) \geq \sum_{k \leq n} P\Big(\Big(\bigcap_{j \leq k-1} W_j^c\Big) \cap W_k\Big) \geq$$

$$\geq \sum_{k \leq n} P\Big(\Big(\bigcap_{j \leq k-1} U_j^c\Big) \cap W_k\Big) \geq \sum_{k \leq n} \Big[P(W_k) - P\Big(\Big(\bigcap_{j \leq k-1} U_j\Big) \cap U_k\Big)\Big] \geq$$

$$\geq \sum_{k \leq n} P(U_k)\Big[P(V_k) - (k-1)P(U_k)\Big] = P(U_1) \sum_{k \leq n} \Big[P(V_1) - (k-1)P(U_1)\Big].$$

Поэтому $P(|S_n| \geq t_n) + nP(U_1)[1 - P(V_1)] \geq nP(U_1)[1 - nP(U_1)/2]$. В силу условия (7) $\liminf_{n \to \infty} [1 - nP(U_1)/2] > 0$, и поэтому лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\{X_n, n \geq 1\}$ — *н. о. р. с. в.* $\alpha > 1/2$, $\{\tau_n, n \geq 1\}$ — *последовательность неотрицательных чисел.*

I. *Если для любого* $\varepsilon > 0$ *сходится ряд* (1), *то*

$$\forall \varepsilon > 0 \sum_{n \geq 1} \tau_n P(|S_n^s| \geq \varepsilon n^\alpha) < \infty. \tag{8}$$

II. *Если выполнено условие* (8), *то*

$$\forall \varepsilon > 0 \sum_{n \geq 1} \tau_n P(|S_n - \mu(S_n)| \geq \varepsilon n^\alpha) < \infty.$$

III. *Если выполнены условия* (5) *и* (8), *то для любого* $\varepsilon > 0$ *сходится ряд* (1).

Доказательство. Утверждения I и II являются тривиальными случаями неравенств симметризации [10, с. 329]. Утверждение III вытекает из утверждения I и усиленного закона больших чисел Марцинкевича – Зигмунда

$$(5) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n / n^\alpha = 0 \text{ почти наверное} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mu(S_n) / n^\alpha = 0.$$

Лемма 5. *Пусть* $\{X_n, n \geq 1\}$ — *н. о. р. с. в., имеющие симметричное распределение,* $\alpha > 1/2$ *и* $\{\tau_n, n \geq 1\}$ — *последовательность неотрицательных чисел. Если для некоторых* $0 < t \leq 2$, $\lambda \geq 1$ *и положительных* $\varphi(n)$, $n \geq 1$, *выполнены условия* (4) *и*

$$\sum_{n\geq 1} \tau_n \Big[nP(|X| \geq \varphi(n)) \Big]^{\lambda} < \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{n\geq 1} \tau_n \Big[n^{1-\alpha t} \int\limits_{|x|<\varphi(n)} |x|^t \, dF(x) \Big]^{\lambda} < \infty, \tag{10}$$

то ряд (1) *сходится для любых* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Для симметричных с. в. справедливо неравенство Хоффман-Йоргенсена [12]: для любого $j \geq 1$ существуют константы $C_j > 0$, $D_j > 0$, при которых для любых $n \geq 1$ и $t > 0$

$$P(|S_n| \geq 3^j t) \leq C_j n P(|X| \geq t) + D_j \big(P(|S_n| \geq t)\big)^{2^j}.$$

Определим события

$$A_n^1 = \{\omega\colon \max_{k\leq n} |X_k| \geq \varepsilon n^{\alpha}/2\},$$

$$A_n^2 = \{\omega\colon \exists\, k_1 \leq n,\ k_2 \leq n\colon |X_{k_1}| \geq \varphi(n),\ |X_{k_2}| \geq \varphi(n)\},$$

$$A_n^3 = \{\omega\colon |S_{nn}| \geq \varepsilon n^{\alpha}/2\},$$

где $S_{nn} = \sum_{k\leq n} X_{kn}$, $X_{kn} = X_k I \ (|X_k| < \varphi(n))$. Понятно, что

$$\{\omega\colon |S_n| \geq \varepsilon n^{\alpha}\} \subseteq A_n^1 \cup A_n^2 \cup A_n^3,$$

$$P(A_n^1) \leq nP(|X| \geq \varepsilon n^{\alpha}/2), \quad P(A_n^2) \leq [nP(|X| \geq \varphi(n))]^2.$$

Для оценки $P(A_n^3)$ используем неравенства Чебышева и Бара – Ессеена [13]:

$$P(A_n^3) \leq n^{-\alpha t} \mathrm{E}\, |S_{nn}|^t \leq \mathrm{const}\, n^{1-\alpha t} \int\limits_{|x|<\varphi(n)} |x|^t \, dF(x).$$

Следовательно, лемма 5 вытекает из условий (4) и (9)–(10).

Лемма 6. *Пусть* L *— медленно меняющаяся на* ∞ *функция и* $\gamma > 0$. *Тогда справедливы утверждения*:

I. *Существует правильно меняющаяся монотонно возрастающая функция* w_1, *для которой*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w_1(x)}{x^{\gamma} L(x)} = 1.$$

II. *Существует правильно меняющаяся монотонно убывающая функция* w_2, *для которой*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w_2(x)}{x^{-\gamma} L(x)} = 1.$$

Доказательство. Утверждение I доказано в [14, с. 25], утверждение II содержится там же в упражнении 1.8.

Из утверждений I и II, в частности, следует, что существуют $x_{01} \geq 1$ и $x_{02} \geq 1$, при которых

$$0 < \sup_{x\geq x_{01}} \frac{w_1(x)}{x^{\gamma} L(x)} < \infty,$$

$$0 < \sup_{x\geq x_{02}} \frac{w_2(x)}{x^{-\gamma} L(x)} < \infty.$$

В тех задачах, где значения функций L, w_1 и w_2 не имеют значения при $x < x_{01}$ и $x < x_{02}$, удобно полагать $x_{01} = 1$, $x_{02} = 1$.

В следующих двух леммах пусть $d \geq 1$ — целое число, а q_k обозначает количество решений в натуральных числах уравнения $n_1 \ldots n_j = k$. Положим

$$Q_n(\rho) = \sum_{k \leq n} k^{\rho} q_k L(k).$$

Лемма 7. *Если L — медленно меняющаяся на ∞ функция и $\rho > -1$, то существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, не зависящие от n, при которых*

$$C_1 n^{\rho+1} L(n) (\log^+ n)^{d-1} \leq Q_n(\rho) \leq C_2 n^{\rho+1} L(n) (\log^+ n)^{d-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Для $\rho > 0$ и $L(x) \equiv 1$ лемма 7 совпадает с леммой 2 из работы [8]. Будем пользоваться в дальнейшем этим разультатом. Сначала рассмотрим случай $L(x) \equiv 1$ и $-1 < \rho \leq 0$. В этом случае найдется $0 < \gamma < 1$, для которой $\rho + \gamma > 0$. Поэтому $Q_n(\rho) \geq n^{\gamma} Q_n(\rho + \gamma) \geq C_1 n^{\rho+1} (\log^+ n)^{d-1}$ и левая часть (11) доказана. Для доказательства правой части (11) заметим, что в силу монотонности $Q_n(0)$

$$Q_n(\rho) = n^{\rho} Q_n(0) - \sum_{k \leq n-1} (k^{\rho} - (k+1)^{\rho}) Q_k(0) \leq 2 Q_n(0) n^{\rho}.$$

Следовательно, правая часть (11) также справедлива для $L(x) \equiv 1$, $-1 < \rho \leq 0$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $\gamma > 0$ таково, что $\rho + 1 > \gamma$. Выберем функцию w_1 в соответствии с утверждением I леммы 6 и положим $w_1(x) = x^{\gamma} L_1(x)$. Не теряя общности, можно считать, что

$$A = \sup_{x \geq 1} L(x) / L_1(x) < \infty, \quad B = \sup_{x \geq 1} L_1(x) / L(x) < \infty.$$

Имеем

$$\sum_{k \leq n} k^{\rho} L(k) q_k = \sum_{k \leq n} w_1(k) k^{\rho-\gamma} q_k \left(L(k) / L_1(k) \right) \leq A\, w_1(n) Q_n(\rho - \gamma).$$

Таким образом, из доказанной оценки для Q_n вытекает $Q_n(\rho) = O(1)\, n^{\rho+1} L(n) \times (\log^+ n)^{d-1} B$ и правая часть (11) доказана в общем случае.

При доказательстве левой части (11) выберем $\gamma > 0$ таким, чтобы $\rho - \gamma > -1$, а функцию w_2 в соответствии с утверждением II леммы 6. Положим $w_2(x) = x^{-\gamma} L_2(x)$. Не теряя общности, будем считать, что

$$\inf_{x \geq 1} L(x) / L_2(x) > 0, \quad \inf_{x \geq 1} L_2(x) / L(x) > 0.$$

Тогда

$$Q_n(\rho) = \sum_{k \leq n} w_2(k) k^{\rho-\gamma} q_k \left(L(k) / L_2(k) \right) \geq O(1)\, w_2(n) Q_n(\rho - \gamma) \geq$$

$$\geq O(1)\, n^{\rho+1} L(n) (\log^+ n)^{d-1},$$

что и доказывает левую часть (11) в общем случае.

Лемма 8. *Пусть L — медленно меняющаяся на ∞ функция и $\rho > -1$, $\alpha > 0$. Положим $M(t) = |t|^{(\rho+1)/\alpha} L(|t|^{1/\alpha}) (\log^+ |t|)^{d-1}$. Для любой случайной величины X условие*

$$\mathrm{E} M(X) < \infty \tag{12}$$

эквивалентно каждому из следующих условий:

$$\sum_{n\geq 1} n^{\rho} L(n)\, q_n P\left(|X| \geq n^{\alpha}\right) < \infty. \tag{13}$$

$$\sum_{n\geq 1} n^{\rho} L(n)\, (\log^{+} n)^{d-1} P\left(|X| \geq n^{\alpha}\right) < \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Положим

$$\tau_n = n^{\rho} L(n)\, q_n, \quad T_n = \sum_{k\leq n} k\tau_k \quad \text{и} \quad T_n' = \sum_{k\leq n} k\tau_k',$$

где $\tau_n' = n^{\rho} L(n)(\log^{+} n)^{d-1}$. В соответствии с леммой 7 имеем $0 < C_1 \leq \leq T_n / M(n^{\alpha}) \leq C_2 < \infty$, $0 < C_1' \leq T_n' / M(n^{\alpha}) \leq C_2 < \infty$. Так как

$$\sum_{n\geq 1} n^{\rho} L(n)\, q_n P\left(|X| \geq n^{\alpha}\right) = \sum_{n\geq 1} T_n P\left(n^{\alpha} \leq |X| < (n+1)^{\alpha}\right),$$

то каждое из условий (13) и (14) эквивалентно следующему:

$$\sum_{n\geq 1} M(n^{\alpha}) P\left(n^{\alpha} \leq |X| < (n+1)^{\alpha}\right) < \infty. \tag{15}$$

В силу правильного изменения функции M для достаточно больших n имеем

$$\max_{n^{\alpha} \leq t < (n+1)^{\alpha}} M(t) = O\Big(\min_{n^{\alpha} \leq t < (n+1)^{\alpha}} M(t)\Big). \tag{16}$$

С учетом (16) легко доказать, что (15) эквивалентно (12). Лемма 8 доказана.

3. Необходимые условия сходимости ряда (1).

Теорема 1. *Пусть* $\{X_n,\ n \geq 1\}$ — *н. о. р. с. в.,* $\alpha > 1/2$ *и* $\{\tau_n,\ n \geq 1\}$ — *последовательность неотрицательных чисел. Если ряд* (1) *сходится для любого* $\varepsilon > 0$, *то:* 1) *в случае* $\alpha \leq 1$ *выполнено условие* (2), *а в случае* $\alpha > 1$ — *условие* (3); 2) *если дополнительно выполнено условие*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} n P\left(|X| \geq \varepsilon n^{\alpha}\right) = 0, \tag{17}$$

то и (4) *выполнено.*

Доказательство. Остановимся сначала на доказательстве утверждения 1. Пусть $a > 0$, X_n^s — симметризация X_n, $Y_n = X_n^s I\left(|X_n^s| < a\right)$, $T_n = \sum_{k\leq n} Y_k$. Так как $P\left(S_n^s \geq \varepsilon n^{\alpha}\right) \leq 2P\left(|S_n| \geq \varepsilon n^{\alpha}/2\right)$, то для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд $\sum_{n\geq 1} \tau_n P\left(S_n^s \geq \varepsilon n^{\alpha}\right)$. Из леммы 2 теперь вытекает сходимость для любого $\varepsilon > 0$ ряда $\sum_{n\geq 1} \tau_n P\left(T_n \geq \varepsilon n^{\alpha}\right)$. Если сначала предположить, что $\alpha \leq 1$, то из леммы 1 будет следовать, что для любого $\delta > 0$

$$\sum_{n\geq 1} \tau_n \exp\{-\delta n^{2\alpha-1}\} < \infty. \tag{18}$$

Пусть условие (2) не выполняется, т. е. для некоторого $\delta_0 > 0$ и некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$ выполняется неравенство $\ln^{+} \tau_{n_k} \geq \delta_0\, n_k^{2\alpha-1}$. В этом случае (18) не может выполняться для $\delta < \delta_0$. Таким образом, утверждение 1 для $\alpha \leq 1$ доказано.

Пусть теперь $\alpha > 1$. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ $P\left(S_n \geq \varepsilon n^{\alpha}\right) \geq P^n(X \geq$

$\geq \varepsilon n^{\alpha-1})$ и поэтому $\forall \varepsilon > 0$ $\sum_{n\geq 1} \tau_n P^n(X \geq \varepsilon n^{\alpha-1}) < \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ $\limsup_{n\to\infty} \tau_n^{1/n} P(|X| \geq \varepsilon n^{\alpha-1}) \leq 1$. Аналогично $\limsup_{n\to\infty} \tau_n^{1/n} P(|X| \geq \varepsilon n^{\alpha-1}) \leq 1$, что и доказывает условие (3) и утверждение 1 для $\alpha > 1$.

Для доказательства утверждения 2 воспользуемся неравенством П. Леви для симметричных слагаемых ([10], глава III, теорема 10): для всех $t > 0$ $P(\max_{k\leq n} |S_k - \mu(S_k - S_n)| \geq t) \leq 2P(|S_n| \geq t)$. Полагая в этом неравенстве $t = \varepsilon n^{\alpha}$, получаем

$$P(|S_{n-1}| \geq \varepsilon n^{\alpha} + |\mu(X_n)|) \leq P(|S_{n-1} - \mu(S_{n-1} - S_n)| \geq \varepsilon n^{\alpha}) \leq 2P(|S_n| \geq \varepsilon n^{\alpha}).$$

Поэтому в силу одинаковой распределенности при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n справедливо неравенство $P(|S_{n-1}| \geq \varepsilon n^{\alpha}) \leq P(|S_{n-1}| \geq \varepsilon n^{\alpha}/2 + |\mu(X_n)|)$. Утверждение 2 теперь вытекает из леммы 3.

4. Достаточные условия сходимости ряда (1).

К сожалению, между необходимыми условиями предыдущего пункта и достаточными условиями этого пункта существует разрыв, устранить который пока не удается. По-видимому, и необходимые, и достаточные условия, приведенные в этой статье, еще не оптимальны и требуются дополнительные исследования по их сближению.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_n, n \geq 1\}$ — *н. о. р. с. в.* $\alpha > 1/2$ *и* $\{\tau_n, n \geq 1\}$ — *последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n / n^{\theta} = 0 \quad \text{\textit{при некотором}} \ \theta > 0. \tag{19}$$

Предположим, что выполнены условия (4), (5) *и*

$$\mathrm{E}\,|X|^r < \infty \ \text{\textit{для некоторого}} \ r > 1/\alpha. \tag{20}$$

Тогда ряд (1) *сходится для любого* $\varepsilon > 0$.

Замечания. **1.** Понятно, что условие (19) более ограничительно, чем условия (2) или (3). Тем не менее, условие (19) охватывает достаточно широкий круг последовательностей $\{\tau_n\}$. Например, можно положить $\tau_n = n^{\rho} L(n)$, где L — медленно меняющаяся функция. Заметим также, что (19) равносильно следующему условию:

$$\sum_{n\geq 1} \tau_n / n^{\theta} < \infty \ \text{для некоторого} \ \theta > 0.$$

Именно в таком виде это условие и будет использоваться в доказательстве теоремы 2, но при проверке, по-видимому, условие (19) все же более удобно.

2. Условие (20) не всегда оптимально. Например, для $\tau_n = (\ln n)^{\nu}/n$, $\nu \geq 0$, сходимость любого $\varepsilon > 0$ ряда (1) равносильна конечности $\mathrm{E}\,|X|^{1/\alpha} (\log^+ |X|)^{\nu}$. Частично этот недостаток устраняется в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть* $\{X_n, n \geq 1\}$ — *н. о. р. с. в.,* $\alpha > 1/2$, L — *медленно меняющаяся функция, а* $\{\tau_n, n \geq 1\}$ — *последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{n\geq 1} \left(\tau_n / (L(n))^{\theta} \right) < \infty \ \text{\textit{для некоторого}} \ \theta > 0. \tag{21}$$

Если выполнены условия (3), (4) *и*

$$\mathrm{E}|X|^{1/\alpha}(L(|X|^{1/\alpha}))^{\nu} < \infty \text{ для некоторого } \nu > 0, \tag{22}$$

то ряд (1) *сходится для любого* $\varepsilon > 0$.

***Замечание* 3.** Если предположить расходимость ряда $\sum \tau_n$ (а именно этот случай и представляет интерес), то из условия (21) вытекает, что $\limsup\limits_{t\to\infty} L(t) = \infty$. Поэтому условие (22) более ограничительное, чем условие (4). Однако для последовательности $\{\tau_n\}$ в силу замечания 2 теорема 3 определяет оптимальный результат. Вводя дополнительные ограничения на τ_n, условия на X_n можно ослабить.

Теорема 4. *Пусть* $\{X_n,\ n \ge 1\}$ — *н. о. р. с. в.,* $\alpha > 1/2$ *и* $\{\tau_n,\ n \ge 1\}$ — *последовательность неотрицательных чисел. Положим* $T_n \ge \sum_{k\le n} k\tau_k$. *Если выполнены условия* (4), (5) *и*

$$\sum_{n\ge m} \tau_n/n^{\theta} = O(T_m/m^{\theta+1}) \quad \text{для некоторого } \theta > 0, \tag{23}$$

$$\sum_{n\ge 1} T_n P((n-1)^{\alpha} < |X| < n^{\alpha}) < \infty, \tag{24}$$

то ряд (1) *сходится для любого* $\varepsilon > 0$.

***Замечания.* 4.** Условие (23) более ограничительное, чем условие (19). При $\theta = 2$ условие (23) близко к условию Феллера, которое используется в усиленном законе больших чисел. Важно отметить, что если (23) выполняется при $\theta = \theta_0$, то оно же выполняется и при $\theta > \theta_0$.

5. Условие (24) при $T_n = O(T_{n-1})$ вытекает из (3).

Наиболее просто изложенные результаты выглядят для монотонных τ_n.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\{X_n,\ n \ge 1\}$ — *н. о. р. с. в.,* $\alpha > 1/2$ *и* $\{\tau_n,\ n \ge 1\}$ — *последовательность неотрицательных монотонно возрастающих чисел, удовлетворяющих условию* (19). *Если выполнено условие* (4), *то ряд* (1) *сходится для любого* $\varepsilon > 0$.

***Следствие* 2.** *Пусть* $\{X_n,\ n \ge 1\}$ — *н. о. р. с. в.,* $\alpha > 1/2$ *и* $\{\tau_n,\ n \ge 1\}$ — *последовательность неотрицательных монотонно убывающих чисел. Если выполнены условия* (4) *и* (5), *то ряд* (1) *сходится для любого* $\varepsilon > 0$.

***Доказательство теоремы* 2.** Выберем t: $1/\alpha < t < \min(r, 2)$ и положим $\lambda = \max(1, \theta/(1-\alpha t))$, $\varphi(n) = n^{\alpha}$. Предположим сначала, что X_n имеет симметричное распределение. В этом случае условие (9) является непосредственным следствием условия (4), а условие (10) в силу

$$\int\limits_{|x|<\varphi(n)} |x|^r \, dF(x) \le \mathrm{E}|X|^r < \infty$$

вытекает из (19). Таким образом, для симметричных X_n теорема 2 вытекает из леммы 5. Переходя к общему случаю, обозначим симметризацию X_n через X_n^s. Легко видеть, что все условия теоремы 2 остаются справедливыми и для X_n^s. Поэтому из доказанной части вытекает справедливость условия (8). Воспользовавшись теперь утверждением III леммы 4, мы докажем теорему 2 и в общем случае.

***Доказательство теоремы* 3.** Положим $t = 2$, $\lambda = \theta/\nu$, $\varphi(n) = n^{\alpha}$. Покажем справедливость соотношений (9) и (10). Для доказательства (9) запишем оценку $nP(|X|\geq\varphi(n)) \leq \mathrm{E}\,|X|^{1/a}(L(|X|^{1/a}))^{\nu}/(L(n))^{\nu}$, из которой в силу (21) вытекает соотношение (9).

Пусть теперь $l(x) = (L(|x|^{1/a}))^{-\nu}$ и $\gamma = 2-1/\alpha$; l — медленно меняющаяся функция, а $\gamma>0$. Для такой функции l и такого γ выберем функцию w_1 в соответствии с утверждением I леммы 6. Справедливо неравенство

$$n^{1-2\alpha}\int\limits_{|x|<\varphi(n)}|x|^t\,dF \leq \Big[\int\limits_{|x|<\varphi(n)}|x|^{1/a}(L_2(|x|^{1/a}))^{\nu}dF\Big]\Big/\big(L_2(n)\big)^{\nu}.$$

Так как $L(x)/L_2(x)\to 1$, $x\to\infty$, то отсюда и из (21), (22) вытекает (10). Таким образом, условия теоремы гарантируют в силу леммы 5 выполнение условия (8). Применяя утверждение III леммы 4, заканчиваем доказательство теоремы 3.

***Доказательство теоремы* 4.** Выберем $t=2$, $\varphi(n)=n^{\alpha}$ и целое λ таким, чтобы $\lambda(2\alpha-1)>\theta$. Как указано в замечании 4, справедливо соотношение

$$\sum_{n\geq m}\tau_n/n^{\lambda(2\alpha-1)} = O(T_m/m^{\lambda(2\alpha-1)+1}).$$

При таком выборе φ условие (9) вытекает из (4). Для доказательства (10) положим

$$\sigma^2(n) = \int\limits_{|x|<\varphi(n)}x^2dF,\quad \Delta(n) = \sigma^{2\lambda}(n)-\sigma^{2\lambda}(n-1).$$

Ясно, что

$$\sum_{n\geq 1}\tau_n[n^{1-2\alpha}\sigma^2(n)]^{\lambda} = \sum_{n\geq 1}(\tau_n/n^{\lambda(2\alpha-1)})\sum_{m\leq n}\Delta(m) =$$

$$= \sum_{m\geq 1}\Delta(m)\sum_{n\geq m}\tau_n/n^{\lambda(2\alpha-1)} = O(1)\sum_{m\geq 1}\Delta(m)\,T_m/m^{\lambda(2\alpha-1)+1}.$$

Так как $\Delta(m)\leq\lambda(\sigma^2(m)-\sigma^2(m-1))\,\sigma^{2(\lambda-1)}(m)$, то

$$\sum_{m\geq 1}\tau_n[n^{1-2\alpha}\sigma^2(n)]^{\lambda} = O(1)\sum_{m\geq 1}(\sigma^2(m)-\sigma^2(m-1))\,\sigma^{2(\lambda-1)}(m)\,T_m/m^{\lambda(2\alpha-1)+1}.$$

Из условия (5) вытекает, что $A = \sup\limits_{m\geq 1}\sigma^2(m)/m^{2\alpha-1}<\infty$. Поэтому

$$\sum_{n\geq 1}\tau_n[n^{1-2\alpha}\sigma^2(n)]^{\lambda} = A^{\lambda-1}O(1)\sum_{m\geq 1}T_mP(m-1\leq|X|^{1/\alpha}<m)$$

и условие (10) вытекает из (24). Заключительные рассуждения с использованием лемм 4 и 5 теперь можно провести так же, как и при доказательстве теоремы 2.

***Доказательство следствия* 1.** В силу теоремы 2 достаточно доказать справедливость условий (5) и (20). В силу монотонности τ_n ряд $\sum P(|S_n|\geq\varepsilon n^{\alpha})$ сходится для любого $\varepsilon>0$. Поэтому в силу теоремы Каца [2] $\mathrm{E}\,|X|^{2/a}<\infty$ и $\mathrm{E}\,X=0$, если $\alpha\leq 1$. Отсюда и вытекают условия (5), (20) и следствие 1.

***Доказательство следствия* 2.** В силу теоремы 4 достаточно доказать справедливость условий (23) и (24). Ввиду монотонности τ_n при любом $\theta>1$

$$\sum_{n\geq m}\tau_n/n^{\theta} \leq \tau_m\sum_{n\geq m}n^{-\theta} \leq O(\tau_m/m^{\theta-1}) = O(T_m/m^{\theta+1})$$

и условие (23) доказано. А так как $T_m = O(T_{m-1})$, то условие (24) вытекает из (4). Следствие 2 доказано.

5. Частные случаи. В этом пункте содержатся утверждения о сходимости ряда (1) для двух специальных последовательностей $\{\tau_n\}$. В первом примере выберем строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k, k \geq 1\}$, $\alpha > 1/2$, $t > 0$: $\alpha t \geq 1$ и положим $\tau_n = n^{\alpha t - 2}$ для $n \in \{n_k\}$ и $\tau_n = 0$ для $n \notin \{n_k\}$. В работе [5] аналогичная последовательность $\{\tau_n\}$ изучалась для $\alpha = 1$, $t = 2$. В статье [5] предполагалось, что $n_k = \psi(t_k)$ для некоторой монотонно возрастающей функции ψ и подпоследовательности действительных чисел $\{t_k, k \geq 1\}$. На ψ и $\{t_k\}$ в [5] накладывались ограничения, ни одно из которых, как показывает теорема 5, не является существенным. Правда, это достигается ценой введения более жесткого моментного условия. В то же время можно показать, что основной результат [5] вытекает из теорем п. 4.

Теорема 5. *Пусть* $\{X_n, n \geq 1\}$ — *н. о. р. с. в. и* $\{n_k, k \geq 1\}$ — *строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что* $\alpha > 1/2$, $\alpha t \geq 1$ *и* $\mathrm{E}\,|X|^r < \infty$ *для некоторого* $r > 1/\alpha$ *и* $\mathrm{E}\,X = 0$, *если* $\alpha \leq 1$. *Тогда сходимость для любого* $\varepsilon > 0$ *ряда*

$$\sum_{k \geq 1} n_k^{\alpha t - 2} P(|S_{n_k}| \geq \varepsilon n_k^{\alpha}) \tag{25}$$

эквивалентна условию

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \sum_{k \geq 1} n_k^{\alpha t - 1} P(|X| \geq \varepsilon n_k^{\alpha}) < \infty. \tag{26}$$

***Следствие* 3.** *Пусть* $\{X_n, n \geq 1\}$ — *н. о. р. с. в. и* $\{n_k, k \geq 1\}$ — *строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Если* $\mathrm{E}\,|X|^r < \infty$ *для некоторого* $r > 1$, *то два условия эквивалентны:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \sum_{k \geq 1} P(|S_{n_k}| \geq \varepsilon n_k) < \infty$$

и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \sum_{k \geq 1} n_k P(|X| \geq \varepsilon n_k) < \infty.$$

***Доказательство теоремы* 5.** Предположим сначала, что выполнено условие (26). Тогда для τ_n, определенных в начале пункта, условие (19) выполняется при $\theta > \max(0, \alpha t - 2)$. Поэтому сходимость ряда (25) для любого $\varepsilon > 0$ вытекает из теоремы 2.

Обратная импликация справедлива в силу утверждения 2 теоремы 1.

В качестве второго примера рассмотрим кратные суммы н. о. р. с. в. Пусть $d \geq 1$ и $\{X(\bar{k}), \bar{k} \in N^d\}$ — поле н. о. р. с. в. с мультииндексами $\bar{k} = \{k_1, \ldots, k_d\}$, а N^d — пространство всех таких мультииндексов с натуральными координатами. Положим

$$S(\bar{n}) = \sum_{\bar{k} \in \Pi(\bar{n})} X(\bar{k}),$$

где $\Pi(\bar{n})$ — прямоугольник: $\Pi(\bar{n}) = \{\bar{k}: k_1 \leq n_1, \ldots, k_d \leq n_d\}$. Для любого конечного $A \subset N^d$ обозначим через $\operatorname{card}(A)$ количество элементов A. Если положить $|\bar{n}| = n_1 \dots n_d$, то $\operatorname{card}(\Pi(\bar{n})) = |\bar{n}|$.

Пусть $w(x)$ — правильно меняющаяся функция порядка $\rho \geq -1$: $w(x) = x^\rho L(x)$ и L — медленно меняющаяся функция. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\bar{n} \in N^d} w(|\bar{n}|) P(|S(\bar{n})| \geq \varepsilon |\bar{n}|^\alpha), \tag{27}$$

в котором суммирование проводится по всем $n_1 \geq 1, \dots, n_d \geq 1$. Если q_k — это количество решений в натуральных числах уравнения $|\bar{n}| = k$, то, положив $\tau_k = w(k)\, q_k$, сведем ряд (27) к ряду (1). Последовательность $\{q_k\}$, а вместе с ней и $\{\tau_n\}$, ведет себя очень нерегулярно. Например, q_p для простых p ограничены, а $q_{2^k} \to \infty$. Это обстоятельство создает некоторые технические трудности при изучении ряда (27). Случай $L(x) \equiv 1$ был изучен ранее: в работе [6] для $\rho = 0$, $\alpha = 1$ и в работе [7] для произвольных ρ и α. Более общие результаты в этой схеме получены в [8]. Другие коэффициенты w в (27) были рассмотрены М. Холмурадовым [15].

Определим функцию $M(t) = |t|^{(\rho+2)/\alpha} L(|t|^{1/a}) (\log^+|t|)^{d-1}$.

Теорема 6. *Пусть $\{X(\bar{n})\}$ и $\{S(\bar{n})\}$ такие же, как и выше, а w — неотрицательная правильно меняющаяся функция порядка $\rho \geq -1$ и $\alpha > 1/2$.*

I. *Если $\rho > -1$, то сходимость для любого $\varepsilon > 0$ кратного ряда* (27) *эквивалентна условиям*

$$\mathrm{E}\, M(X) < \infty \tag{28}$$

и

$$\mathrm{E}\, X = 0, \text{ если } \alpha \leq 1. \tag{29}$$

II. *Если же $\rho = -1$, то из условия* (28) *вытекает*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \sum_{\bar{n} \in N^d} w(|\bar{n}|) P(|S(\bar{n}) - \mu(S(\bar{n}))| \geq \varepsilon |\bar{n}|^\alpha) < \infty. \tag{30}$$

С другой стороны, условия (17) *и* (30) *влекут условие* (28).

***Следствие* 4.** *Пусть $\{X(\bar{n})\}$, $\{S(\bar{n})\}$, w, ρ и α такие же, как и в теореме* 6. *Если для некоторого $x_0 > 0$*

$$\inf_{x > x_0} L(x) (\log^+ x)^{d-1} > 0, \tag{31}$$

то условия (28), (29) *эквивалентны сходимости для любого $\varepsilon > 0$ ряда* (27).

***Следствие* 5.** *Пусть $\{X(\bar{n})\}$, $\{S(\bar{n})\}$ такие же, как и в теореме* 6, *и $\alpha > 1/2$, $\alpha t \geq 1$. Сходимость для любого $\varepsilon > 0$ ряда*

$$\sum_{\bar{n} \in N^d} |\bar{n}|^{\alpha t - 2} P(|S(\bar{n})| \geq \varepsilon |\bar{n}|^\alpha)$$

эквивалентна условиям $\mathrm{E}|X|^t (\log^+|X|)^{d-1} < \infty$ и $\mathrm{E}\, X = 0$, если $\alpha \leq 1$.

***Доказательство теоремы* 6.** Пусть, как и раньше, $\tau_n = w(n)\, q_n$. Прежде всего покажем, что из условий (17) и (30) вытекает условие (28). Действительно, утверждение 2 теоремы 1 влечет сходимость для любого $\varepsilon > 0$ ряда

$$\sum_{n \geq 1} n^{\rho+1} L(n)\, q_n P(|X| \geq \varepsilon\, n^\alpha).$$

Отсюда и из леммы 8 вытекает искомое утверждение. Чтобы закончить доказательство импликации (28), (29) $\Rightarrow$ сходимость ряда (27), покажем, что в случае $\rho > -1$ условие (17) вытекает из (30). Выберем $0 < \gamma < 1 + \rho$. Из (30) и медленного изменения функции L вытекает

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \sum_{\bar{n} \in N^d} |\,\bar{n}\,|^{\rho-\gamma} P(|S(\bar{n})| \geq \varepsilon |\,\bar{n}\,|^{\alpha}) < \infty.$$

Поэтому из следствия 7 работы [8] (см. также [7]) получаем $\mathrm{E}|X|^{(\rho-\gamma+2)/\alpha} \times (\log^+|X|)^{d-1} < \infty$ и $\mathrm{E}\,X = 0$, если $\alpha \leq 1$. А так как по неравенству Чебышева – Маркова $\varepsilon^{(\rho-\gamma+2)/\alpha}\, n P(|X| \geq \varepsilon n^{\alpha}) \leq \mathrm{E}|X|^{(\rho-\gamma+2)/\alpha} / n^{\rho-\gamma+1}$, то условие (17) выполнено. Заметим, что попутно мы доказали, что в случае $\rho > -1$ из (30) вытекает условие (29). Таким образом, для доказательства теоремы 6 остается показать, что условия (28), (29) достаточны для сходимости соответствующих рядов.

Выберем $\gamma > 0$ таким, чтобы $\theta > 3 + \rho + \gamma$, и положим $T_n = \sum_{k \leq n} k\tau_k$. Подберем функцию w_2 в соответствии с утверждением II леммы 6. В силу леммы 7 имеем

$$\sum_{n \geq m} T_n / n^{\theta} = O(1) \sum_{n \geq m} n^{\rho+2-\theta} L(n) (\log n)^{d-1} = O(1)\, w_2(m) \sum_{n \geq m} n^{\rho+2+\gamma-\theta} (\log n)^{d-1} =$$

$$= O(1)\, w_2(m)\, m^{\rho+1+\gamma-\theta} (\log^+ n)^{d-1} = O(1)\, T_m / m^{\theta-1}.$$

Применив теперь преобразование Абеля, докажем, что

$$\sum_{n \geq m} \tau_n / n^{\theta-2} = -T_{m-1} / m^{\theta-1} + \sum_{n \geq m} T_n (n^{1-\theta} - (n+1)^{1-\theta}) = O(1) \sum_{n \geq m} T_n / n^{\theta},$$

откуда заключаем, что условие (23) выполнено для любого $\rho \geq -1$. Дальнейшее доказательство проведем раздельно для случаев $\rho = -1$ и $\rho > -1$.

Пусть сначала $\rho > -1$. Из леммы 7 вытекает, что $T_n = O(T_{n-1})$ и поэтому условие (24) выполнено. Далее, из (28) и (29) следует условие (5), так как $\rho + 2 > 1$. Пусть, наконец, $\varepsilon > 0$ и $Y = X/\varepsilon$. Условие (4) в силу леммы 8 при $\tau_n = n^{\rho+1} L(n)\, q_n$ эквивалентно условию $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \mathrm{E}M(Y) < \infty$, которое, в свою очередь, эквивалентно условию (28) в силу правильного изменения функции M. Таким образом, выполнены все условия теоремы 4, и поэтому ряд (27) сходится для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь $\rho = -1$. Для доказательства соотношения (30) в силу утверждения II леммы 4 достаточно, чтобы выполнялось условие (8) при $\tau_n = L(n)\, q_n / n$. Согласно лемме 5 при $t = 2$, $\lambda = 1$, $\varphi(n) = n^{\alpha}$ для этого достаточно показать, что

$$\sum_{n \geq 1} L(n)\, q_n P(|X^s| \geq n^{\alpha}) < \infty, \tag{32}$$

$$\sum_{n \geq 1} n^{-2\alpha} L(n)\, q_n \int_{|x| < n^{\alpha}} x^2\, dF^s(x) < \infty, \tag{33}$$

где F^s — функция распределения с. в. X^s. Неравенство (32) в соответствии с леммой 8 вытекает из условия (28). Для доказательства неравенства (33) преобразуем его левую часть:

$$\sum_{n\geq 1} n^{-2\alpha} L(n) q_n \int_{|x|<n^\alpha} x^2\, dF^s(x) =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \int_{(n-1)^\alpha \leq |x| < n^\alpha} x^2\, dF^s(x) \sum_{k\geq n} k^{-2\alpha} L(k) q_k .$$

Пусть $Q_n = \sum_{k\leq n} L(k)q_k$. Тогда из леммы 7 вытекает, что $Q_n = O(nL(n)\times \times (\log^+ n)^{d-1})$. Поэтому, применив преобразование Абеля, докажем, что

$$\sum_{k\geq n} k^{-2\alpha} L(k) q_k \leq \sum_{k\geq n} Q_k (k^{-2\alpha} - (k+1)^{-2\alpha}) =$$

$$= O(1) \sum_{k\geq n} k^{-2\alpha} L(k) (\log^+ k)^{d-1} = O(n^{1-2\alpha} L(n) (\log^+ n)^{d-1}).$$

Следовательно, левая часть неравенства (33) имеет вид

$$O\Big(\sum_{n\geq 1} nL(n)(\log^+ n)^{d-1} P\left((n-1)^\alpha \leq |X^s| < n^\alpha\right) \Big).$$

Это выражение, в свою очередь, есть $O(\mathrm{E}\, M(X^s))$. Конечность последнего выражения вытекает из условия (28) и правильного изменения функции M. Теорема 6 доказана.

***Доказательство следствия* 4.** С учетом теоремы 6 необходимо доказать лишь случай $\rho = -1$. Пусть сначала выполнены условия (28) и (29). Из (31) и (28) вытекает, что $\mathrm{E}\,|X|^{1/\alpha} < \infty$, и поэтому условие (5) выполнено. Из утверждения II теоремы 6 для симметричных слагаемых следует условие (8) при $\tau_n = L(n) q_n / n$. Из утверждения III леммы 4 теперь следует сходимость ряда (27) для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд (27). Докажем, что это влечет условия (28) и (29). Прежде всего, из утверждения I леммы 4 вытекает неравенство

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \sum_{n\geq 1} (L(n) q_n / n) P\left(|S_n^s| \geq \varepsilon n^\alpha\right) < \infty,$$

откуда, применяя неравенство П. Леви, заключаем, что

$$\infty > 2 \sum_{n\geq 1} (L(n) q_n / n) P\left(|S_n^s| \geq \varepsilon n^\alpha\right) \geq$$

$$\geq \sum_{m\geq 0} 2^{-(m+1)} P\left(|S^s_{2^m}| \geq \varepsilon 2^{(m+1)\alpha}\right) \sum_{2^m \leq k < 2^{m+1}} L(k) q_k.$$

Далее, $q_{2k} \geq q_k$ и $2 \min_{2^m \leq k < 2^{m+1}} L(k) \geq L(2^m)$ для достаточно больших m. Следовательно, для достаточно больших m

$$\sum_{2^m \leq k < 2^{m+1}} L(k) q_k = O(1) \sum_{k < 2^m} q_k = O(1) m^{d-1} L(2^m) \tag{34}$$

в соответствии с леммой 7. Учитывая условие (31), мы теперь легко доказываем, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \sum_{m\geq 0} P\left(|S^s_{2^m}| \geq \varepsilon 2^{m\alpha}\right) < \infty.$$

А так как

$$\sum_{2^m \le k < 2^{m+1}} P\left(|S_k^s| \ge \varepsilon k^\alpha\right) \le 2P\left(|S_{2^{m+1}}^s| \ge \varepsilon 2^{m\alpha}\right),$$

то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \sum_{n \ge 1} P\left(|S_n^s| \ge \varepsilon n^\alpha\right)/n < \infty,$$

что в силу теоремы Спицера – Каца [2] влечет условие $\mathrm{E}|X^s|^{1/\alpha} < \infty$, из которого вытекает конечность $\mathrm{E}|X^s|^{1/\alpha}$ и условие (17). Кроме этого, на основании утверждений I и II леммы 4 заключаем, что из сходимости для любого $\varepsilon > 0$ ряда (27) следует условие (30). Применяя те же рассуждения, что и в начале доказательства теоремы 6, теперь доказываем справедливость (28). Если бы при этом условие (29) не выполнялось, т. е. $\mathrm{E}X \ne 0$, то, воспользовавшись доказанной частью следствия, мы получили бы

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \sum_{n \ge 1} (L(n)q_n/n) P\left(|S_n - n\mathrm{E}X| \ge \varepsilon n^\alpha\right) < \infty.$$

Отсюда и из сходимости для любого $\varepsilon > 0$ ряда (27) вытекало бы

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \sum_{n \ge 1} (L(n)q_n/n) P\left(|n\mathrm{E}X| \ge \varepsilon n^\alpha\right) < \infty.$$

Это условие вследствие $\alpha \le 1$, $\mathrm{E}X \ne 0$ и $P\left(|\mathrm{E}X| \ge \varepsilon n^{\alpha-1}\right) = 1$ для $\varepsilon < |\mathrm{E}X|$ влекло бы, что $\sum_{n \ge 1} L(n)q_n/n < \infty$. Последнее неравенство не может быть выполнено ввиду условия (30). Действительно, используя (34), получаем

$$\sum_{n \ge 1} L(n)q_n/n \ge \sum_{m \ge 0} 2^{-m} \sum_{2^m \le n < 2^{m+1}} L(n)q_n = O(1) \sum_{m \ge 0} L(2^m) m^{d-1} = \infty.$$

Следствие 4 доказано.

Работа частично финансировалась по программе 1/848 Государственного фонда фундаментальных исследований ГКНТ Украины.

1 *Hsu P. L., Robbins H.* Complete convergence and the law of large numbers // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. – 1947. – **33**, № 2. – P. 25–31.
2. *Katz M.* The probability in the tail of a distribution // Ann. Math. Statist. – 1963. – **34**, № 1. – P. 312–318.
3. *Heyde C. C., Rohatgi V. K.* A pair of complementary theorems on convergence in the law of large numbers // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1967. – **63**, № 1. – P. 73–82.
4. *Сиражðинов С. Х., Гафуров М. У.* Метод рядов в граничных задачах для случайных блужданий. – Ташкент: Фан, 1987. – 139 с.
5 *Asmussen S., Kurtz T. G.* Necessary and sufficient conditions for complete convergence in the law of large numbers // Ann. Probab. – 1980. – **8**, № 1. – P. 176–182.
6. *Smythe R. T.* The sums of independent random variables on the partially ordered sets // Ann. Probab. – 1974. – **2**, № 5. – P. 902–917.
7 *Gut A.* Marcinkiewicz laws and convergence rates in the law of large numbers for random variables with multidimensional indices // Ann. Probab. – 1978. – **6**, № 3. – P. 469–482.
8. *Клесов О. И.* Усиленный закон больших чисел для кратных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин // Мат. заметки. – 1985. – **38**, № 6. – С. 915–930.
9. *Neyde C. C.* A supplement to the strong law of large numbers // J. Appl. Probab. – 1975. – **12**. – P. 173–175.
10. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 414 с.
11. *Chow Y. S., Teicher H.* Probability theory. – New York.: Springer-Verlag, 1978. – 455 p.
12. *Hoffman-Jorgensen J.* Sums of independent Banach space valued random variables // Studia Math. – 1974. – **54**. – P. 159–186.
13. *von Bahr B., Esseen C.-G.* Inequalities for the r-th absolute moment of a sum of random variables, $1 \le r \le 2$ // Ann. Math. Statist. – 1965. – **36**, № 1. – P. 299–303.
14. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 141 с.
15. *Холмурадов М. К.* О законе повторного логарифма для сумм случайных величин с многомерными индексами // Докл. АН УзССР. – 1985. – № 7. – С. 3,4.

Получено 29.07.91