УДК 517.5

А. И. Степанец, д-р. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ В ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЯХ

The notion of a generalized ψ-derivative of a function of complex variable is introduced and applied to classifying the functions analytic in Jordan domains. The approximations of functions from thus introduced classes are studied by using algebraic polynomials constructed on the basis of Faber polynomials by the summation of Faber series. In the periodic case, the analogues of author's results are obtained for the classes $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Вводиться поняття узагальненої ψ-похідної функції комплексної змінної, на базі чого проводиться класифікація функцій, аналітичних в жорданових областях. Вивчаються наближення функцій з таким чином введених класів за допомогою многочленів, побудованих на основі многочленів Фабера шляхом підсумовування рядів Фабера. Одержані аналоги результатів автора для класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ в періодичному випадку.

Введение. В настоящей работе рассматриваются приближения интегралов типа Коши в областях, ограниченных замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми посредством алгебраических многочленов, построенных на базе полиномов Фабера с помощью фиксированных Λ-методов суммирования рядов Фабера.

Эта тематика имеет богатую историю, насыщенную весьма глубокими результатами, с которой можно ознакомиться по монографиям В. К. Дзядыка [1], В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева [2], П. К. Суетина [3], П. М. Тамразова [4] и др.

Интегралы типа Коши

$$\mathcal{J}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(s)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

определяются своей плотностью $f(\cdot)$ и границей ∂G области G. Если $\Psi(w)$ — функция, отображающая конформно и однолистно область $|w| > 1$, то функция $f^*(t) = f(\Psi(e^{it}))$ учитывает как свойства самой функции $f(\cdot)$, так и особенности строения границы ∂G. Поэтому аппроксимационные свойства интегралов $\mathcal{J}f(z)$ также зависят от $f^*(\cdot)$. Этот факт отмечался и неоднократно использовался многими авторами, в частности, в перечисленных выше монографиях. Однако в известных нам работах его роль чаще всего была второстепенной — результаты по приближениям формулировались в терминах областей G и самих функций $f(\cdot)$. Отличительная особенность настоящей работы, помимо прочего, состоит в том, что рассматриваемые здесь классы функций определяются условиями, налагаемыми на функции $f^*(\cdot)$, и оценки приближений функций $\mathcal{J}f(z)$ выражаются в явном виде через величины наилучших приближений обобщенных ψ-производных функций $f^*(\cdot)$ с помощью тригонометрических полиномов заданной степени.

Функции $f^*(\cdot)$ являются периодическими с периодом, равным 2π. Это позволяет определить на кривых $\Gamma = \partial G$ классы $L^{\Psi}\mathfrak{N}(\Gamma)$ функций $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, адекватные введенным автором в периодическом случае (см., например, [5]) классам $L^{\Psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Эта аналогия является определяющей во всей работе; и полученные результаты для функций $f \in L^{\Psi}\mathfrak{N}(\Gamma)$ являются аналогами соответствующих результатов автора в периодическом случае для функций из $L^{\Psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Отметим также, что основные методы, используемые в работе, — это методы, применявшиеся автором при исследовании приближений периодических функций из множеств $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$, а также функций, заданных на всей оси из множеств $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ (см., например, [5 – 8]). Специфика комплексного случая используется, главным образом, только на уровне определений, формулировок результатов и вспомогательных предложений.

В п. 1 вводятся основные обозначения, определяются множества $L^\Psi \mathfrak{N}(\Gamma)$ и находятся интегральные представления уклонений многочленов $U_n(f; z; \Lambda)$ от функций $f \in L^\Psi \mathfrak{N}(\Gamma)$.

В п. 2 получены промежуточные оценки величин $| \mathcal{J} f(z) - U_n(f; z; \Lambda) |$. Эти оценки выражаются через параметры $\psi(\cdot)$ и n, а также содержат величину $E_{-m,\infty}(f^\Psi; z)$, представляющую собой наилучшее приближение свертки $f^\Psi{*}(\cdot)$ с функцией $k(\cdot, z)$, индуцируемой на окружности ядром Коши с помощью функций $t_m(\cdot, z)$, которые являются тригонометрическими полиномами порядка m с коэффициентами — произвольными функциями переменной z. Полученные утверждения, содержащиеся в теоремах 2, 3, являются аналогами соответствующих результатов для периодического случая, изложенных в [5, 6], которые точны не только по порядку, но и в смысле входящих в них констант. Теоремы 4 – 6 также имеют свои аналоги в периодическом случае [5], которые также точны по порядку.

В п. 3 получены оценки величин $E_{-m,\infty}(h, z)$, которые используются в п. 4, где формулируются основные результаты.

Заметим, что, следуя сложившейся традиции, буквой Ψ в работе обозначается функция, отображающая внешность единичного круга на внешность области, а буквой ψ — функция, входящая в определение классов $L^\Psi \mathfrak{N}(\Gamma)$.

1. Обозначения, постановка задачи и вспомогательные факты. В дальнейшем G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная спрямляемой жордановой замкнутой кривой Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$ — замыкание области G и $G_\infty = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$; $w = \Phi(z)$ — функция, конформно и однолистно отображающая G_∞ на внешность круга $| w | \le 1$, нормированная условиями

$$\lim_{z \to \infty} z^{-1} \Phi(z) = \alpha > 0, \quad \Phi(\infty) = \infty,$$

$z = \Psi(w) = \Phi^{-1}(w)$ — функция, обратная к $\Phi(z)$.

Через $L(\Gamma)$ будем обозначать множество функций $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, суммируемых на Γ, т. е.

$$L(\Gamma) = \left\{ f(\zeta), \zeta \in \Gamma : \int_\Gamma | f(\zeta) | | d\zeta | = K < \infty \right\}. \tag{1}$$

Пусть, далее, $L_p = L_p(0, 2\pi)$, $1 \le p \le \infty$, — множество 2π-периодических функций $\varphi(\cdot)$ с конечной нормой $\| \varphi \|_p$, где при $1 \le p < \infty$

$$\| \varphi \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

и $\| \varphi \|_\infty = \| \varphi \|_M = \operatorname{ess\,sup} | \varphi(t) |$. Подмножество функций $f \in L(\Gamma)$, для которых функция $f^*(t) = f(\Psi(e^{it}))$ принадлежит к L_p, обозначаем $L_p(\Gamma)$.

$$L_p(\Gamma) = \{f\colon f \in L(\Gamma),\ \| f^* \|_p = \| f(\Psi(e^{it})) \|_p = K < \infty\}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{2}$$

Пусть при некотором $p \in [1, \infty]$ $f \in L_p(\Gamma)$ и

$$S[f^*] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} \tag{3}$$

— ряд Фурье функции $f^*(t) = f(\Psi(e^{it}))$, $c_k = c_k(f^*)$ — ее коэффициенты Фурье. Предположим, что при данном $p \in [1, \infty]$ ряды

$$\sum_{k \ge 0} c_k(f^*) e^{ikt} \quad \text{и} \quad \sum_{k < 0} c_k(f^*) e^{ikt} \tag{4}$$

являются рядами Фурье некоторых функций из L_p. Эти функции обозначим через $f_+^*(t)$ и $f_-^*(t)$ соответственно, через $f_+(\zeta)$ и $f_-(\zeta)$ — функции, заданные на Γ, такие, что

$$f_+(\Psi(e^{it})) = f_+^*(t) \quad \text{и} \quad f_-(\Psi(e^{it})) = f_-^*(t). \tag{5}$$

Подмножество удовлетворяющих этим условиям функций $f \in L_p(\Gamma)$ обозначим

$$L_p'(\Gamma) = \{f\colon f_+ \in L_p(\Gamma),\ f_- \in L_p(\Gamma)\}. \tag{6}$$

Учитывая, что оператор тригонометрического сопряжения ограничен в пространстве L_p при $p \in (1, \infty)$, легко заключить, что $L_p'(\Gamma) = L_p(\Gamma)$, $p \in (1, \infty)$. Однако при $p = 1$ и $p = \infty$ множество $L_p(\Gamma) \setminus L_p'(\Gamma)$ не пусто: оно состоит из функций $f(\cdot)$, для которых ряды, сопряженные с рядами Фурье для $f^*(\cdot)$, не являются рядами Фурье суммируемых (или ограниченных) функций соответственно.

Если $f \in L(\Gamma)$, то как известно, интеграл типа Коши

$$\mathcal{J}f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{7}$$

является функцией, аналитической в G (а также и вне $\overline{G}$).

В настоящей работе изучается приближение функций $\mathcal{J}f(z)$, $z \in G$, при условии, что $f \in L_p'(\Gamma)$, $1 \le p \le \infty$, и $\Psi'(e^{i_0}) \in L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$, посредством алгебраических многочленов, построенных на базе многочленов Фабера для области G.

Прежде всего сформулируем следующее предложение.

Предложение 1. *Если* $f \in L_p'(\Gamma)$, $1 \le p \le \infty$, *и* $\Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$, *то* $\forall\, z \in G$

$$\mathcal{J}f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_+(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{8}$$

Действительно, в силу определений почти всюду на $\Gamma(\zeta) = f_+(\zeta) + f_-(\zeta)$. Чтобы установить справедливость (8), достаточно показать, что $\forall\, z \in G$

$$\mathcal{J}f_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_-(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0. \tag{9}$$

Полагая $\zeta = \Psi(e^{it})$, имеем

$$\mathcal{J}f_{-}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{-}\left(\Psi(e^{it})\right)\frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi(e^{it})-z}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{-}^{*}(t)K(t,z)\,dt. \tag{10}$$

Известно (см., например, [1, с. 362]), что если граница Γ области G спрямляема, то $\forall\, z \in G$ функция

$$K(t,z) = \frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi(e^{it})-z} \tag{11}$$

суммируема при $t \in [0, 2\pi]$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$S[K(\cdot,z)] = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z)e^{-ikt}, \tag{12}$$

где $F_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — многочлены Фабера для $\overline{G}$.

Если же $\Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}$, то $\forall\, z \in G$ также $K(\cdot, z) \in L_{p'}$. В рассматриваемом случае $f_{-}^{*} \in L_p$. Поэтому для функций $f_{-}^{*}(\cdot)$ и $K(\cdot, z)$ справедливо равенство Парсеваля, в силу которого $\forall\, z \in G$

$$\int_0^{2\pi} f_{-}^{*}(t)K(t,z)dt = 0. \tag{13}$$

Таким образом, равенство (9), а также и равенство (8) доказаны.

Пусть теперь L_p^{+} — подмножество функций $f \in L_p$, для которых ряды Фурье функций $f^{*}(t) = f\left(\Psi(e^{it})\right)$ имеют вид

$$S[f^{*}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f^{*})e^{ikt}. \tag{14}$$

Если $\varphi \in L'_p(\Gamma)$, то $\varphi_{+} \in L_p^{+}(\Gamma)$. Поэтому в силу предложения 1 $\forall\, \varphi \in L'_p(\Gamma)$ найдется функция $f \in L_p^{+}(\Gamma)$ такая, что $\forall\, z \in G$ будет $\mathcal{J}\varphi(z) = \mathcal{J}f(z)$. Следовательно, при исследовании приближений функций $\mathcal{J}\varphi(z)$, $\varphi \in L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$, достаточно ограничиться изучением функций $\mathcal{J}f(z)$ (конечно, при условии, что $f \in L_p^{+}(\Gamma)$).

Для функций $f \in L_p^{+}(\Gamma)$ вводится следующее ниже определение ψ-производной.

Пусть при некотором $p \geq 1$ $f \in L_p^{+}(\Gamma)$ и $S[f^{*}]$, $f^{*}(t) = f\left(\Psi(e^{it})\right)$ имеет вид (14). Предположим, что для данной фиксированной последовательности $\psi(k)$, $k \in N$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f^{*})}{\psi(k)}\, e^{ikt} \tag{15}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции. Эту функцию обозначим через $f^{\psi,*}(t)$ и назовем ψ-производной функции $f^{*}(\cdot)$.

Функцию $\mu(\zeta)$, определенную на Γ, для которой почти всюду

$$\mu^{*}(t) = \mu\left(\Psi(e^{it})\right) = f^{\psi,*}(t),$$

назовем ψ-производной функции $f(\zeta)$ и обозначим через $f^{\psi}(\zeta)$. Множество функций $f \in L_p^+(\Gamma)$, у которых существуют ψ-производные, обозначим через $L_p^{\psi+}(\Gamma)$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций $f \in L(\Gamma)$, то $L_p^{\psi+}\mathfrak{N}(\Gamma)$ будет обозначать подмножество функций $f \in L_p^{\psi+}$, у которых $f^\psi \in \mathfrak{N}(\Gamma)$. В дальнейшем в качестве $\mathfrak{N}(\Gamma)$ будут выбираться множества $L_q^+(\Gamma)$, $q \geq 1$, а в качестве $\psi(k)$-последовательности, являющиеся следами на множестве натуральных чисел $\psi(v)$ непрерывного аргумента $v \geq 1$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функция $\psi(v)$ выпукла вниз при всех $v \geq 1$;

б) $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$.

Множество таких функций обозначим через $\mathfrak{M}$. Для функций $\psi \in \mathfrak{M}$ справедливо следующее предложение.

Предложение 2. *Если* $\psi \in \mathfrak{M}$, *то*

$$L_1^{\psi+}L_p^+(\Gamma) \subset L_p^+(\Gamma), \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{16}$$

Доказательство. Если $f \in L_1^{\psi+}L_p^+(\Gamma)$, то $f^\psi \in L_p^+(\Gamma)$ и ряды Фурье функций $f^*(\cdot)$ и $f^{\psi*}(\cdot)$ имеют вид (14) и (15) соответственно, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f^*)e^{ikt} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)c_k(f^{\psi*})e^{ikt}. \tag{15$'$}$$

Так как $\psi \in \mathfrak{M}$, то $\psi(k) \leq \psi(1)$ и $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=2^\nu}^{2^{\nu+1}} |\,\psi(i) - \psi(i+1)\,| \leq \psi(2^\nu) + \psi(2^{\nu+1}-1) \leq 2\psi(1),$$

т. е. числа $\psi(k)$ удовлетворяют условиям известной теоремы Марцинкевича (см., например, [9, с. 346]), в силу которой заключаем, что если ряд (15) есть ряд Фурье функции из L_p^+ и $1 < p < \infty$, то таким же будет и ряд (15′), т. е. (16) имеет место для $p \in (1, \infty)$.

При условиях, налагаемых на функции $\psi(\cdot)$, ряд

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos kt = \sum_{k\neq 0} \psi(|\,k\,|)e^{ikt}$$

является рядом Фурье суммируемой функции $\chi(t)$. Поэтому если производная $f^\psi(\cdot)$ принадлежит к $L_1^+(\Gamma)\left(L_\infty^+(\Gamma)\right)$ и имеет ряд Фурье (15), то свертка $(f^{\psi*} * \chi)(\cdot)$ — суммируемая (непрерывная) функция и

$$S[f^{\psi*} * \chi] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f^*)e^{ikt} = S[f^*].$$

Отсюда следует справедливость соотношения (16) и в случаях, когда $p = 1$ и $p = \infty$.

Соотношение (16) означает, что множества функций $L_p^{\psi,+}L_p^+(\Gamma)$ и $L_1^{\psi,+}L_p^+(\Gamma)$ при $\psi \in \mathfrak{M}$ совпадают. Везде в дальнейшем $\psi \in \mathfrak{M}$ и мы полагаем

$$L^\psi L_p^+(\Gamma) = L_1^{\psi,+}L_p^+(\Gamma) = L_p^{\psi,+}L_p^+(\Gamma). \tag{17}$$

Пусть

$$f \in L^{\Psi} L_p^+(\Gamma), \quad p \geq 1, \quad \Psi(e^{i\cdot}) \in L_{p'}, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Тогда, полагая $\zeta = \Psi(e^{it})$ и учитывая соотношения (14) и (12), в силу равенства Парсеваля $\forall\, z \in G$ получаем

$$\mathcal{J}f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f(\Psi(e^{it}))K(z, t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f^*(t)K(z, t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f^*)F_k(z), \tag{18}$$

где, как и раньше, $F_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots$, — многочлены Фабера для области $\overline{G}$,

$$c_k(f^*) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\Psi(e^{it}))e^{-ikt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} f(\Psi(w))w^{-k-1}\, dw \overset{\text{def}}{=} a_k(f), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

и последнее равенство в (18) понимается в смысле суммируемости методом средних арифметических. Величины $a_k(f)$ называют коэффициентами Фабера функции $f(\cdot)$. С учетом равенства (19) соотношение (18) принимает вид

$$\mathcal{J}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)F_k(z). \tag{20}$$

Последний ряд называют рядом Фабера для $\mathcal{J}f(z)$.

Пусть $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$, $n = 0, 1, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, — произвольная треугольная числовая матрица. Отправляясь от разложения (20) $\forall\, f \in L_p^+$, положим

$$U_n(f; z) = U_n(f; z; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} a_k(f)F_k(z), \tag{21}$$

$U_n(f; z; \Lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$, — алгебраические полиномы порядка $\leq n$, порожденные матрицей Λ.

Пусть, далее, $\{\lambda_n(v)\}$, $n \in N$, — последовательность непрерывных на $[0, 1]$ функций, для которых $\lambda(k/n) = \lambda_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots$, и $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geq 1$. Тогда, следуя изложению в § 2.3 [5], положим

$$\tau_n(v) = \tau_n(v; \Lambda; \psi) = \begin{cases} \left(1 - \lambda_n(v)\right)\psi(nv), & 1/n \leq v \leq 1, \\ \psi(nv), & v \geq 1. \end{cases} \tag{22}$$

На промежутке $[0, 1/n]$ функцию $\tau_n(v)$ доопределим произвольно, но так, чтобы продолженная функция (которую по-прежнему будем обозначать $\tau_n(v)$) была непрерывной для всех $v \geq 0$ и $\tau_n(0) = 0$. В этом случае

$$\tau_n\left(\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \left(1 - \lambda_k^{(n)}\right)\psi(k), & 1 \leq k \leq n, \\ \psi(k), & k \geq n. \end{cases} \tag{23}$$

Теперь получим интегральное представление для величин $\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda)$.

Теорема 1. *Пусть при некотором* $p \geq 1$

$$f \in L^{\Psi}L_p^+(\Gamma), \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}, \quad 1/p + 1/p' = 1,$$

и функция

$$\tau_n(v) = \tau_n(v; \Lambda; \psi)$$

такова, что ее преобразование

$$\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_n(t; \Lambda; \psi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \tau_n(v) \cos vt\, dv \tag{24}$$

суммируемо на R:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_n(t)|\, dt \leq K < \infty, \tag{25}$$

и, кроме того, функция

$$\tau_n^*(t) = \begin{cases} \sup\limits_{x \geq t} |\hat{\tau}_n(x)|, & t > 0, \\ \sup\limits_{x \leq t} |\hat{\tau}_n(x)|, & t < 0, \end{cases} \tag{26}$$

при некотором $A > 0$ *суммируема на множестве* $|t| \geq A$. *Тогда* $\forall z \in G$ *при любых* $n \in N$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t) \int_{\Gamma} \frac{f^{\Psi}\Big(\Psi\Big(\Phi(\zeta)e^{it/n}\Big)\Big)}{\zeta - z}\, d\zeta dt. \tag{27}$$

Доказательство. Сначала убедимся в том, что в правой части (27) можно поменять порядок интегрирования. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tau}_n(t)\right| \int_{\Gamma} \left|\frac{f^{\Psi}\Big(\Psi\Big(\Phi(\zeta)e^{it/n}\Big)\Big)}{\zeta - z}\right| |d\zeta|\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tau}_n(t)\right| \int_0^{2\pi} |f^{\Psi,*}(\theta + t/n)|\, |K(\theta, z)|\, d\theta\, dt. \tag{28}$$

По условиям $f^{\Psi,*} \in L_p$ и $K(\cdot, z) \in L_{p'}$. Следовательно, свертка в правой части (28) — непрерывная $2n\pi$-периодическая функция. Отсюда, учитывая соотношение (25), заключаем, что величины в (28) конечны. И значит, к интегралам в (27) применима теорема Фубини, в силу которой

$$\Delta_n(f; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \mathcal{J}_n^{\Psi}(f; \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{29}$$

где $\Delta_n(f; z)$ — правая часть в равенстве (27) и

$$\mathcal{J}_n^{\Psi}(f; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t) f^{\Psi}(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n}))dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t) f^{\Psi}(\theta + t/n) dt, \quad \Phi(\zeta) = e^{i\theta}. \tag{30}$$

В [5, с. 56], показано, что при условиях теоремы почти для всех $\theta \in R$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{\Psi,*}(\theta + t/n)\hat{\tau}_n(t)dt = f(\Psi(e^{i\theta})) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} a_k(f) e^{ik\theta} =$$

$$= f(\zeta) - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} a_k(f) \Phi^k(\zeta). \tag{31}$$

Объединяя соотношения (29) – (31), получаем

$$\Delta_n(f; z) = \mathcal{J}f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} a_k(f) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{32}$$

Но (см., например, [1, с. 358])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = F_k(z), \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{33}$$

Поэтому $\forall\, z \in G$ величина $\Delta_n(f; z)$ в точности равна левой части (27), т. е.

$$\Delta_n(f; z) = \mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda). \tag{34}$$

Рассмотрим формулу (27) в случае, когда

$$\Lambda = \Lambda_a = \{\lambda_n(v)\} = \{\lambda_n(a, v)\},$$

где a — любое число из промежутка $[0, 1)$,

$$\lambda_n(v) = \lambda_n(a, v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le a, \\ 1 - \dfrac{v - a}{1 - a} \dfrac{\psi(n)}{\psi(nv)}, & a \le v \le 1, \\ 0, & v \ge 1, \end{cases} \tag{35}$$

а $\psi(v)$ — некоторая функция, непрерывная при всех $v \ge 0$. В этом случае согласно (22)

$$\tau_n(v) = \tau_n(v; \psi; a) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le a, \\ \dfrac{v - c}{1 - c} \psi(n), & a \le v \le 1, \\ \psi(nv), & v \ge 1, \end{cases} \tag{36}$$

В [5, с. 58] показано, что если $\psi \in \mathfrak{M}$, то преобразование $\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_n(t; \psi; a)$ вида (24) функции $\tau_n(v; \psi; a)$ удовлетворяет условиям (25), (26) при всех $n \in N$ и $a \in [0, 1)$. Поэтому из теоремы 1 вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть при некотором* $p \ge 1$ $f \in L^{\Psi}L_p^+(\Gamma)$, $\Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}$ *и* $\psi \in \mathfrak{M}$. *Тогда при любых* $n \in N$ *в каждой точке* $z \in G$ *выполняется равенство*

$$\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_a) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_n(t; \psi; a) \int_{\Gamma} \frac{f^{\Psi}\Big(\Psi\big(\Phi(\zeta) e^{it/n}\big)\Big)}{\zeta - z} d\zeta dt. \tag{37}$$

Выше использовалось понятие ψ-производной для периодических функций, имеющих ряд Фурье так называемого степенного типа. Однако в [5] аналогичное понятие вводится также и для функций с произвольными рядами Фурье следующим образом.

Пусть $\varphi \in L_1$ и

$$S[\varphi] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\varphi) e^{ikt} \tag{38}$$

— ряд Фурье $\varphi(\cdot)$. Если для данных функции $\psi(\cdot)$ и числа $\beta \in R$ ряд

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{\psi(|k|)} e^{i(\beta\pi/2)\operatorname{sign} k} e^{ikt} \tag{39}$$

является рядом Фурье некоторой функции из L_1, то эту функцию обозначают через $\varphi_\beta^\psi(\cdot)$ и называют (ψ, β)-производной функции $\varphi(\cdot)$.

Если функция $\varphi(\cdot)$ имеет (ψ, β)-производную, а функция $\tau_n(v)$ вида (22) удовлетворяет условиям (25) и (26), то, как показано в [5, с. 56],

$$S\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\beta^\psi(x + t/n)\hat{\tau}_n(t)\,dt\right] \doteq S[\varphi(x) - U_n(\varphi; x; \Lambda)], \tag{40}$$

где

$$U_n(\varphi; x; \Lambda) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \lambda_{|k|}^{(n)} c_k(\varphi) e^{ikx}. \tag{41}$$

В качестве $\tau_n(v)$ возьмем функцию $\tau_n(v; \psi; a)$, определяемую равенством (36), а в качестве $\varphi(\cdot)$ — произвольный тригонометрический полином порядка $[an] - 1$:

$$\varphi(t) = \varphi_{[an]}(t) = \sum_{|k| \le [an]-1} \varphi_k e^{ikt}. \tag{42}$$

Тогда в силу (21) и (35)

$$U_{[an]}(\varphi_{[an]}; x; \Lambda_a) \equiv \varphi_{[an]}(x).$$

И значит, вследствие (40)

$$S\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi_{[an]}\right)_0^\psi (x + t/n)\hat{\tau}_n(t; \psi; a)\,dt\right] \equiv 0. \tag{43}$$

функция $\left(\varphi_{[an]}\right)_0^\psi(\cdot)$ также является тригонометрическим полиномом порядка $\le [an] - 1$. Отсюда ввиду произвольности полинома $\varphi_{[an]}(\cdot)$ заключаем, что для любого тригонометрического полинома $t_m(\cdot)$ степени $m \le [an] - 1$ почти для всех x

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_m(x + t/n)\hat{\tau}_n(t; \psi; a)dt = 0. \tag{44}$$

Поэтому если обозначить через $\mathrm{T}_{m,\infty}$ множество функций $T_m(t, z)$, которые являются тригонометрическими полиномами по переменной t порядка $m - 1$, коэффициенты которых произвольным образом могут зависеть от z, вида

$$T_m(t, z) = \sum_{|k| \leq m-1} c_k(z) e^{ikt}, \tag{45}$$

то из (44) $\forall T_m \in \mathrm{T}_{m,\infty}$, $m \leq [an]$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t; \psi; a) T_m(t, z) dt = 0. \tag{46}$$

Учитывая эти факты и полагая

$$F^{\psi}(z, t/n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f^{\psi}\left(\Psi\left(\Phi(\zeta) e^{it/n}\right)\right)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{47}$$

$$\delta_{[an]}(z, t/n) = \delta_{[an]}(f^{\psi}; z, t/n) =$$

$$= F^{\psi}(z, t/n) - T_{[an]}(z, t/n), \quad T_{[an]} \in \mathrm{T}_{[an],\infty}, \tag{48}$$

видим, что следствие 1 может быть переформулировано следующим образом.

Следствие 1′. *Пусть при некотором* $p \geq 1$ $f \in L^{\psi} L_p^{+}(\Gamma)$ и $\Psi(e^{i\cdot}) \in L_{p'}$. *Тогда если* $\psi \in \mathfrak{M}$, то $\forall a \in [0, 1)$ *при любых* $n \in N$ *в каждой точке* $z \in G$ *выполняется равенство*

$$\mathcal{J} f(z) - U_n(f; z; \Lambda_a) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t; \psi; a) \delta_{[an]}(z, t/n) dt. \tag{49}$$

Таким образом, исследование величин

$$\Delta_n(f; z) = \mathcal{J} f(z) - U_n(f; z; \Lambda_a)$$

сводится к изучению интегралов в (49). Подобные интегралы неоднократно рассматривались автором при исследовании приближений периодических функций и функций, задаваемых на всей оси (см., например, [5 – 8]). Схема последующих рассуждений также совпадает со схемой рассуждений в этих работах. Принципиальное отличие, однако, здесь состоит в том, что в рассматриваемом случае величина $\delta_{[an]}(z, t/n)$ не является функцией от $z + t/n$, как это предполагалось в [5 – 8], а зависит от переменных z и t более сложным образом.

Величина $\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}(t; \psi; a)$ в силу (24) и (36) имеет вид

$$\hat{\tau}_n(t; \psi; a) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_a^1 \frac{v - a}{1 - a} \cos vt \, dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \psi(nv) \cos vt \, dv = \mathcal{J}_1(\psi; t; a) + \mathcal{J}_2(\psi; t). \tag{50}$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими ниже формулами, получаемыми интегрированием по частям:

$$\mathcal{J}_1(\psi; t; a) = \mathcal{J}_1(\psi; t; a; n) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi} \left(\frac{\sin t}{t} - \frac{2 \sin (1 + a)t/2 \sin (1 - a)t/2}{(1 - a)t^2} \right) = \tag{51}$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi} \left(\frac{(1 - a)t - \sin (1 - a)t}{(1 - a)t^2} \sin t + \frac{1 - \cos (1 - a)t}{(1 - a)t^2} \cos t \right), \tag{51′}$$

$$\mathcal{I}_2(\psi;t) = \mathcal{I}_2(\psi;t;n) = -\frac{\psi(n)}{\pi}\frac{\sin t}{t} - \frac{n}{\pi}\mathcal{I}_3(\psi;t), \tag{52}$$

$$\mathcal{I}_3(\psi;t) = \mathcal{I}_3(\psi;t;n) = \frac{1}{t}\int_1^{\infty}\psi'(nv)\sin vt\,dv. \tag{53}$$

В частности, при $a = 1 - 1/n$

$$\mathcal{I}_1\left(\psi;t;1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{t - n\sin t/n}{t^2}\sin t + \frac{n(1-\cos t/n)}{t^2}\cos t\right). \tag{54}$$

2. Предварительная оценка величин $\Delta_n(f;z)$. Пусть сначала $a = 1 - 1/n$. Тогда вследствие (21) и (35)

$$U_n(f;z;\Lambda_a) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)F_k(z) = S_{n-1}(f;z), \tag{55}$$

т. е. $U_n(f;z;\Lambda_{1-1/n})$ совпадает с частной суммой $S_{n-1}(f;z)$ ряда Фабера функции $f(\cdot)$ для области $\overline{G}$. В этом случае полагаем

$$\Delta_n(f;z) = \mathcal{I}f(z) - S_{n-1}(f;z) = \rho_n(f;z). \tag{56}$$

В дальнейшем важную роль играет величина $E_{m,\infty}(\varphi;z)$, которая определяется для любой функции $\varphi \in L(\Gamma)$ равенством

$$E_{m,\infty}(\varphi;z) = \inf_{T_m \in \mathrm{T}_{m,\infty}}\left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi\left(\Psi\left(\Phi(\zeta)e^{it/n}\right)\right)}{\zeta - z}d\zeta - T_m(t,z)\right\|_{M_t}, \tag{57}$$

где

$$\| f(\cdot,z)\|_{M_t} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,2\pi]} | f(t,z)|. \tag{58}$$

Обозначим, кроме того, через F_0 подмножество функций $\varphi \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\int_1^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}dt < \infty. \tag{59}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$f \in L^{\psi}L_p^{+}(\Gamma), \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'} \quad \text{и} \quad \psi \in F_0.$$

Тогда какова бы ни была последовательность $a = a(n)$, *для которой* $a(n) \ge \ge a_0 > 0$, *при любых* $n \in N$ *в каждой точке* $z \in G$

$$|\rho_n(f;z)| \le \frac{4}{\pi^2}\psi(n)E_{n,\infty}(f^{\psi};z)\ln^{+}\frac{n}{a(n)} + b_n^{\psi}(f;a;z), \tag{60}$$

где $\ln^{+}t = \max\{\ln t, 0\}$ *и*

$$|b_n^{\psi}(f;a;z)| \le AE_{n,\infty}(f^{\psi};z)\big(\psi(n) + P_n(a;\psi) + R_n(a;\psi)\big), \tag{61}$$

$$P_n(a;\psi) = \int_{1/a(n)}^{\infty}\frac{\psi(nt+n)}{t}dt, \quad R_n(a;\psi) = \int_{a(n)}^{\infty}\frac{\psi(n) - \psi(n+n/t)}{t}dt, \tag{62}$$

A — величина, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

Эта теорема является аналогом теоремы 1 из работы автора [6].

Доказательство ее получается практически повторением соответствующих рассуждений из работы [6]. Поэтому остановимся здесь только на его узловых моментах.

В силу равенства (49)

$$\rho_n(t; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(\psi; t, 1-1/n)\delta_{n-1}(z, t/n)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n-1}(z, t/n)\mathcal{J}_1(\psi; t, 1-1/n)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n-1}(z, t/n)\mathcal{J}_2(\psi; t; n)dt. \tag{63}$$

Повторяя рассуждения, с помощью которых получается равенство (4.31) из [5, с. 61], приходим к выводу, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n-1}(z, t/n)\mathcal{J}_1(\psi; t, 1-1/t)dt = \frac{\psi(n)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n-1}(z, t/n)\cos nt\, dt, \tag{64}$$

и тогда равенство (63) можно переписать в виде

$$\rho_n(f; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n-1}(z, t/n)\mathcal{J}_2(\psi; t, n)dt + \frac{\psi(n)}{2\pi}\delta_{n-1}(z, t/n)\cos nt\, dt. \tag{65}$$

Это равенство является аналогом равенства (21) из [6]. Поэтому, поступая так же, как и при доказательстве леммы 1 из [6], убеждаемся, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда при любых* $n \in N$ *в каждой точке* $z \in G$

$$\rho_n(f; z) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{|t|\geq a(n)} \delta_{n-1}(z, t/n)\frac{\sin t}{t}dt + d_n^{\psi}(f; a; z), \tag{66}$$

где

$$|\, d_n^{\psi}(f; a; z)\,| \leq A\,\|\,\delta_{n-1}(z, t/n)\,\|_{M_t}\,(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi)). \tag{67}$$

Повторяя рассуждения, с помощью которых в [6] было получено неравенство (28), получаем неравенство

$$\left|\int_{|t|\geq a(n)} \delta_{n-1}(z, t/n)\frac{\sin t}{t}dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{4}{\pi}\psi(n)\,\|\,\delta_{n-1}(z, t/n)\,\|_{M_t}\left[\ln^{+}\frac{n}{a(n)} + O(1)\right]. \tag{68}$$

Объединяя соотношения (60) – (68), находим

$$|\,\rho_n(f; z)\,| \leq \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\,\|\,\delta_{n-1}(z, t/n)\,\|_{M_t} + b_n^{\psi}(f; a; z), \tag{69}$$

причем величина $|\, b_n^{\psi}(f; a; z)\,|$ не превышает правой части (67), возможно, с другой константой A. Отсюда, рассматривая нижнюю грань при $T_{n-1} \in \mathrm{T}_{n-1,\infty}$, получаем утверждение теоремы.

Множество $\mathfrak{M}$ выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности функций $\psi(\cdot)$ разбивается на подмножества $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$ следующим образом

[5, с. 93]. Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ сопоставим пару функций

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}((1/2)\psi(t)).$$

и

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t)$$

и положим

$$\mathfrak{M}_c = \{\psi \in \mathfrak{M}: K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2,\ K_1, K_2 > 0\},$$

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}: K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2,\ K_1, K_2 > 0\}, \tag{70}$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}: \mu(\psi; t)\uparrow\infty,\ t \to \infty\},$$

где K, K_1 и K_2 — величины, которые могут зависеть от функции $\psi(\cdot)$.

В [5] показано, что

$$\mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{M}_{c,\infty} \subset F_0,$$

и, кроме того, установлено, что если $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$ и

$$a(n) = \mu(n) = \mu(\psi; n),$$

то

$$P_n(\mu; \psi) \le K\psi(n), \quad R_n(\mu; \psi) \le K\psi(n). \tag{71}$$

Учитывая эти факты, из теоремы 2 получаем следующий аналог теоремы 2 из [6].

Теорема 3. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma),\ \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'} \quad \text{и} \quad \psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}.$$

Тогда при любых $n \in N$ *в каждой точке* $z \in G$

$$|\rho_n(f; z)| \le \frac{4\psi(n)}{\pi^2}[\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)]E_{n,\infty}(f^\Psi; z), \tag{72}$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n, *по*

$$f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma) \quad \text{и} \quad \eta(n) = \eta(\psi; n) = \psi^{-1}((1/2)\psi(n)).$$

Из соотношений (70) следует, что $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_c$. Кроме функций $\psi \in \mathfrak{M}_c$ множество $\mathfrak{M}_0$ содержит функции $\psi(t)$, которые могут как угодно медленно стремиться к нулю при $t \to \infty$, и для них условие (59) может не выполняться. Для всех функций $\psi \in \mathfrak{M}_0$ справедлива следующая теорема.

Теорема 3′. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma), \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'} \quad и \quad \psi \in \mathfrak{M}_0.$$

Тогда при любом $n \in N$ *в каждой точке* $z \in G$

$$|\rho_n(f; z)| \le \frac{4}{\pi^2}\psi(n)[\ln n + O(1)]E_{n,\infty}(f^\Psi; z), \tag{73}$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n *и по* $f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma)$.

Доказательство этой теоремы проводится на основании равенства (49) с помощью понятных модификаций доказательства аналогичной теоремы 3 в [6].

Покажем теперь, что для функций $f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma)$ можно построить многочлены $U_n(f; z; \Lambda_a)$, для которых

$$|\Delta_n(f; z)| = |\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_a)| \le K\psi(n)E_{m,\infty}(f^\Psi; z), \tag{74}$$

где K — величина, равномерно ограниченная по n, по $f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma)$, а m — некоторое число, определенным образом связанное с n.

Оказывается, что для этой цели число a, определяющее матрицу Λ_a, следует выбрать в зависимости от скорости стремления к нулю функции $\psi(v)$ при $v \to \infty$, т. е. в зависимости от того, к какому из множеств (70) эта функция принадлежит. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma), \quad \Psi(e^{i\cdot}) \in L_{p'} \quad \text{и} \quad \psi \in \mathfrak{M}_0.$$

Тогда при любом $n \in N$ *в каждой точке*

$$|\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_0)| \le K\psi(n)E_{0,\infty}(f^\Psi; z), \tag{75}$$

где k *— величина, равномерно ограниченная по* n *и по* $f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma)$.

Теорема 5. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma), \quad \Psi(e^{i\cdot}) \in L_{p'} \quad \text{и} \quad \psi \in \mathfrak{M}_c.$$

Тогда $\forall\, a \in (0, 1)$ *при любых* $n \in N$ *в каждой точке*

$$|\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_{[an]})| \le K\psi(n)E_{[an],\infty}(f^\Psi; z). \tag{76}$$

В частности, при $a = 1/2$

$$|\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_{[n/2]})| \le K\psi(n)E_{[n/2],\infty}(f^\Psi; z), \tag{77}$$

где K *— величина, равномерно ограниченная по* n *и по* $f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma)$.

Оценки (75) – (77) имеют вид неравенства (74) для $\psi \in \mathfrak{M}_0$ и $\psi \in \mathfrak{M}_c$ соответственно. Как показывает опыт приближения периодических функций, принадлежащих классам, определяющимся функциями $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, чтобы получить оценку вида (74) для $f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma)$ при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, есть веские основания для того, чтобы в качестве приближающих агрегатов выбирать многочлены $U_n(f; z; \Lambda_a)$, в которых значение a зависит от номера n, $a = a(n)$, причем $a(n) \to 1$ при $n \to \infty$, скорость этого стремления определяется функцией $\psi(\cdot)$. Учитывая это, положим

$$a = a(n) = \left(1 - \frac{\eta(n) - n}{n}\right)_+ = (2 - \eta(n)/n)_+,$$

$$\eta(n) = \eta(\psi; n) = \psi^{-1}((1/2)\psi(n)), \tag{78}$$

где $(\cdot)_+ = \max(\cdot, 0)$.

Теорема 6. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$f \in L^\Psi L_p^+(\Gamma), \quad \Psi(e^{i\cdot}) \in L_{p'} \quad \text{и} \quad \psi \in \mathfrak{M}_\infty.$$

Тогда при любых $n \in N$ *в каждой точке*

$$|\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_{[na(n)]})| \le K\psi(n)E_{[na(n)],\infty}(f^\Psi; z), \tag{79}$$

где K — *величина, равномерно ограниченная по* n *и по* $f \in L^{\psi}L_p^{+}(\Gamma)$, *а* $a = a(n)$ *определяется равенством* (78).

Теоремы 4 – 6 являются аналогами теоремы 6 при $\beta = 0$ из [8] и доказываются подобно этой теореме. Докажем сначала теорему 4.

***Доказательство теоремы* 4.** Поскольку $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, то согласно следствию 1′ $\forall f \in L^{\psi}L_p^{+}(\Gamma)$, $\forall a \in [0, 1)$ при любом $n \in N$ в каждой точке $z \in G$ выполняется равенство (49). В частности, при $a = 0$ имеем

$$\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t; \psi)\delta_0(z, t/n)dt, \tag{80}$$

где

$$\hat{\tau}_n(t; \psi) = \hat{\tau}_n(t; \psi; 0)$$

и

$$\delta_0(z, t/n) = F_0^{\psi}(z, t/n) - T_0(z, t/n), \quad T_0 \in \mathrm{T}_{0,\infty}. \tag{81}$$

Согласно (50) – (53) при $a = 0$

$$\hat{\tau}_n(t; \psi) = \mathcal{J}_1(\psi; t; 0; n) + \mathcal{J}_2(\psi; t; n) = -\frac{2\psi(n)}{\pi}\frac{\sin^2 t/2}{t^2} - \frac{n}{\pi}\mathcal{J}_3(\psi; t; n). \tag{82}$$

Следовательно, $\forall z \in G$

$$\Delta_n(f; z) = -\frac{2\psi(n)}{n\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(z, t)\frac{\sin^2 nt/2}{t^2}\,dt - \frac{n^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(z, t)\mathcal{J}_3(\psi; t; 0)dt, \tag{83}$$

и поэтому, $\forall z \in G$

$$|\Delta_n(f; z)| \le \frac{2\psi(n)}{\pi}\|\delta_0(z, t)\|_{M_t}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt + \frac{2n^2}{\pi}\|\delta_0(z, t)\|_{M_t}\int_0^{\infty}|\mathcal{J}_3(\psi; nt; n)|\,dt. \tag{84}$$

Принимая во внимание оценку (10.7) из [5, с. 133], $\forall \psi \in \mathfrak{M}_0$ получаем

$$n^2\int_0^{\infty}|\mathcal{J}_3(\psi; nt; n)|\,dt = n^2\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{nt}\int_1^{\infty}\psi'(nv)\sin vnt\,dv\right|dt = n\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{t}\int_1^{\infty}\psi'(nv)\sin vt\,dv\right|dt \le K\psi(n). \tag{85}$$

Поэтому $\forall z \in G$

$$|\Delta_n(f; z)| \le K\psi(n)\,\|\delta_0(z; t)\|_{M_t}. \tag{86}$$

Отсюда, рассматривая нижнюю грань при $T_0 \in \mathrm{T}_{0,\infty}$, получаем оценку (75).

***Доказательство теоремы* 5** при любом фиксированном $a \in [0, 1)$ по существу ничем не отличается от ее доказательства при $a = 1/2$. Поэтому остановимся только на доказательстве неравенства (76) — в этом случае идейная сторона рассуждений более прозрачна.

Как отмечалось, $\mathfrak{M}_{c,\infty} \in F_0$. Поэтому если выполнены условия теоремы 5, то в силу следствия 1′ имеем

$$\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_{1/2}) = n \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(nt; \psi; 1/2) \delta_{[n/2]}(z; t)\, dt, \tag{87}$$

при этом согласно (50), (51) и (51′)

$$n\hat{\tau}(nt, \psi; 1/2) = n\mathcal{J}_1(\psi; nt; 1/2) + n\mathcal{J}_2(\psi; nt), \tag{88}$$

$$n\mathcal{J}_1(\psi; nt; 1/2) = \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{\sin nt}{t} - \frac{4\sin 3nt/4 \sin nt/4}{nt^2}\right) = \tag{89}$$

$$= \frac{2\psi(n)}{\pi}\left(\frac{nt/2 - \sin nt/2}{nt^2} + \frac{1-\cos nt/2}{nt^2}\cos nt\right). \tag{89′}$$

Далее, отправляясь от формулы (87) и следуя рассуждениям из [8, с. 219], полагаем

$$\gamma_n^{(1)}(f; z) = \int_{-1/n}^{1/n} \delta_{[n/2]}(z; t)\, n\mathcal{J}_1(\psi; nt; 1/2) dt,$$

$$\gamma_n^{(2)}(f; z) = -\frac{4\psi(n)}{n\pi} \int_{|t|\ge 1/n} \delta_{[n/2]}(z; t) \frac{\sin 3nt/4 \sin nt/4}{t^2}\, dt,$$

$$P_n^{\psi}(t; z) = \int_{-1/n}^{1/n} \delta_{[n/2]}(z; t)\, n\mathcal{J}_2(\psi; nt) dt,$$

$$R_n^{\psi}(f; z) = -\frac{1}{\pi} \int_{|t|\ge 1/n} \delta_{[n/2]}(z; t)\, n\mathcal{J}_3(\psi; nt) dt,$$

$$n\,\mathcal{J}_3(\psi; nt) = \frac{1}{t} \int_{n}^{\infty} \psi'(v) \sin vt\, dv.$$

В таких обозначениях имеем

$$|\,\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_{1/2})\,| =$$

$$= \left|\gamma_n^{(1)}(f; z) + \gamma_n^{(2)}(f; z) + P_n^{\psi}(f; z) + R_n^{\psi}(f; z)\right|, \tag{90}$$

причем

$$|\,\gamma_n^{(1)}(f; z)\,| \le \|\,\delta_{[n/2]}(z; t)\,\|_{M_t} \int_{-1/n}^{1/n} n\,|\,\mathcal{J}_1(\psi; nt; 1/2)|\, dt, \tag{91}$$

$$|\,\gamma_n^{(2)}(f; z)\,| \le \|\,\delta_{[n/2]}(z; t)\,\|_{M_t} \frac{4\psi(n)}{n\pi} \int_{|t|\ge 1/n} \frac{\sin 3nt/4 \sin nt/4}{t^2}\, dt, \tag{92}$$

$$|\,P_n^{\psi}(f; z)\,| \le \|\,\delta_{[n/2]}(z; t)\,\|_{M_t} \int_{-1/n}^{1/n} n|\,\mathcal{J}_2(\psi; nt)\,|\, dt, \tag{93}$$

$$\|\,R_n^{\psi}(f; z)\,\| \le \|\,\delta_{[n/2]}(z; t)\,\|_{M_t} \frac{1}{\pi} \int_{|t|\ge 1/n} |\,\mathcal{J}_3(\psi; nt)\,|\, dt. \tag{94}$$

Подставляя в (91) – (94) оценки интегралов, полученные в [8, с. 220], и учитывая равенство (90), приходим к неравенству

$$|\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_{1/2})| \le K\psi(n)\, \| \delta_{[n/2]}(z; t) \|_{M_t},$$

рассматривая нижнюю грань обеих частей которого при $T_{[n/2]} \in \mathrm{T}_{[n/2],\infty}$ получаем оценку (76).

***Доказательство теоремы* 6.** Сначала заметим, что если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то в силу определения величина

$$\mu(t) = t/(\eta(\psi; t) - t)$$

монотонно и неограниченно возрастает при $t \to \infty$. Значит, величина $2 - \eta(n)/n$, возрастая, стремится к единице. Поэтому, начиная с некоторого $n_0 = n_0(\psi)$ будет $a(n) > 0$. При $n < n_0$ неравенство (79) можно получить подбором входящей в него величины K. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что при всех $n \in N$ $a(n) > 0$, т. е. $a(n) = 2 - \eta(n)/n$. Приняв во внимание это замечание, согласно следствию 1′ имеем

$$\mathcal{J}f(z) = U_n(f; z; \Lambda_{a(n)}) =$$

$$= n\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}(nt; \psi; a(n))\delta_{[na(n)]}(z; t)dt, \tag{95}$$

где вследствие (50) и (51)

$$n\hat{\tau}(nt; \psi; a(n)) = n\mathcal{J}_1(\psi; nt; a(n)) + n\mathcal{J}_2(\psi; nt),$$

$$n\mathcal{J}_1(\psi; nt; a(n)) = \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{\sin nt}{t} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\sin(n + na(n))(t/2)\sin(n - na(n))(t/2)}{(n - na(n))t^2}\right) = \tag{96}$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{(n - na(n))t - \sin(n - na(n))t}{(n - na(n))t^2}\sin nt + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \cos(n - na(n))t}{(n - na(n))t^2}\cos nt\right), \tag{96′}$$

$$n\mathcal{J}_2(\psi; nt) = \frac{n}{\pi}\int_1^\infty \psi(nv)\cos vnt\,dv = \frac{1}{\pi}\int_n^\infty \psi(v)\cos vt\,dv. \tag{97}$$

Теперь, отправляясь от этих равенств и следуя рассуждениям из [8, с. 221], полагаем

$$\gamma_n^{(1)}(f; z) = \int\limits_{|t| \le 1/(\eta(n) - n)} \delta_{[na(n)]}(z; t)n\mathcal{J}_1(\psi; nt; a(n))dt,$$

$$\gamma_n^{(2)}(f; z) =$$

$$= \frac{2\psi(n)}{\pi(n - na(n))}\int\limits_{|t| \ge 1/(\eta(n) - n)} \delta_{[na(n)]}(z; t)\frac{\sin(n + na(n))(t/2)\sin(n - na(n))(t/2)}{t^2}dt,$$

$$P_n^{\psi}(f; z) = \int\limits_{|t| \le 1/(\eta(n) - n)} \delta_{[na(n)]}(z; t)n\mathcal{J}_2(\psi; nt)dt,$$

$$R_n^{\psi}(f;z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1/(\eta(n)-n)} \delta_{[na(n)]}(z;t) n \mathcal{J}_3(\psi; nt) dt.$$

В таких обозначениях имеем

$$|\mathcal{J}f(z) - U_n(f;z;a(n))| =$$
$$= \left|\gamma_n^{(1)}(f;z) + \gamma_n^{(2)}(f;z) + P_n^{\psi}(f;z) + R_n^{\psi}(f;z)\right|, \tag{98}$$

причем, в силу (95) – (97) [6, с. 221] $\forall z \in G$

$$|\gamma_n^{(1)}(f;z)| \leq \|\delta_{[na(n)]}(z;t)\|_{M_t} \frac{2\psi(n)}{\pi(n-na(n))} \times$$
$$\times \int\limits_0^{1/(\eta(n)-n)} \frac{\left|(n-na(n))t - \sin(n-na(n))t + 1 - \cos(n-na(n))t\right|}{t^2} dt \leq$$
$$\leq K\psi(n) \|\delta_{[na(n)]}(z;t)\|_{M_t}. \tag{99}$$

Аналогично получаем

$$|\gamma_n^{(2)}(f;z)| \leq \|\delta_{[na(n)]}(z;t)\|_{M_t} \frac{4\psi(n)}{\pi(n-na(n))} \int\limits_{|t|\geq 1/(\eta(n)-n)} \frac{dt}{t^2} \leq$$
$$\leq K\psi(n) \|\delta_{[na(n)]}(z;t)\|_{M_t}, \tag{100}$$

а также

$$\left|P_n^{\psi}(f;z)\right| + \left|R_n^{\psi}(f;z)\right| \leq K\psi(n) \|\delta_{[na(n)]}(z;t)\|_{M_t}. \tag{101}$$

Объединяя соотношения (99) – (101) и рассматривая нижнюю грань для $T_{[na(n)]} \in \mathrm{T}_{[na(n)],\infty}$, получаем неравенство (79).

3. Оценки величин $E_{m,\infty}(h;z)$. В доказанных теоремах 2 – 6 оценки уклонений $\Delta_n(f;z)$ выражаются через величины

$$E_{m,\infty}(h;z) = \inf_{T_m \in \mathrm{T}_{m,\infty}} \|\mathcal{J}h(t;z) - T_m(t;z)\|_{M_t}, \tag{102}$$

где

$$\mathcal{J}h(t;z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{h\left(\Psi\left(\Phi(\zeta)e^{it}\right)\right)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{103}$$

при условии, что $h \in L_p^+(\Gamma)$, $p \geq 1$, и $\Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$. Поэтому целесообразно более детально исследовать эти величины.

Прежде всего заметим, что в интеграле (103) можно существенно изменять ядро Коши, не меняя значений самого интеграла. Именно: справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* G *— область со спрямляемой замкнутой жордановой границей* Γ *и* P_G *— множество функций* $P(\zeta, z)$, $\zeta \in \Gamma$, $z \in G$, *удовлетворяющих условиям:*

а) при каждом $z \in G$ *функция*

$$\tilde{P}(t;z) = P(\Psi e^{it}, z)\Psi'(e^{it})\, i\, e^{it}$$

суммируема на $[0, 2\pi]$:

$$\int_{\Gamma} | P(\zeta, z) | | d\zeta | = \int_{0}^{2\pi} | \tilde{P}(t, z) | \, dt < \infty; \tag{104}$$

б) *при каждом* $z \in G$

$$S[\tilde{P}(\cdot, z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(z) e^{ikt}, \tag{105}$$

где $\mu_k(z)$ — *некоторые (вообще говоря, произвольные) функции переменной* z.

Тогда $\forall h \in L_1^+$ *и* $P \in P_G$ *при любом* $z \in G$ *почти всюду (по переменной* t*)*

$$\mathcal{J} h(t; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\Psi(\Phi(\zeta) e^{it})) Q_p(\zeta, z) d\zeta \overset{\text{def}}{=} \tilde{\mathcal{J}} h(t, z), \tag{106}$$

где

$$Q_p(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta - z} - P(\zeta, z). \tag{107}$$

Доказательство. Полагая $\Phi(\zeta) = e^{i\theta}$, имеем

$$\tilde{\mathcal{J}} h(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{\infty} h^* (\theta + t) \left(\frac{\Psi'(e^{i\theta}) i e^{i\theta}}{\Psi(e^{i\theta}) - z} - \tilde{P}(\theta; z) \right) d\theta,$$

откуда видим, что для доказательства (106) достаточно показать, что почти при всех t

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{2\pi} h^*(\theta + t) \tilde{P}(\theta, z) d\theta = 0. \tag{108}$$

Поскольку $h \in L_1^+(\Gamma)$, то функция $h^*(x) = h(\Psi(e^{it}))$ суммируема на $[0, 2\pi]$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$S[h^*] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{ikx}. \tag{109}$$

Поэтому интеграл в (108), представляющий собой в силу условия а) свертку суммируемых функций, является суммируемой функцией, ряд Фурье которой в силу условия б) и теоремы о свертке имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} 0 \cdot \mu_{-k}(z) \, e^{ikt} + \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot h_k \, e^{ikt}.$$

Отсюда заключаем, что почти при всех $t \in [0, 2\pi]$ действительно справедливо равенство (108), а значит, лемма 2 доказана.

Если выполнены условия леммы 2, то согласно равенствам (102) и (106) $\forall z \in G$

$$E_{m,\infty}(h; z) = \inf_{\substack{T_n \in \mathrm{T}_{m,\infty} \\ P \in P_G}} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} h^*(\theta + t) q(\theta, z) \, d\theta - T_m(t, z) \right\|_{M_t}, \tag{110}$$

где

$$q(\theta; z) = \theta_p(\Psi(e^{i\theta}); z) \psi'(e^{i\theta}) \, e^{i\theta} = \frac{\Psi^1(e^{i\theta}) e^{i\theta}}{\Psi(e^{i\theta}) - z} - \tilde{P}(\theta; z). \tag{111}$$

Пусть теперь $\tau_m(u)$ — произвольный тригонометрический полином порядка $m-1$ вида

$$\tau_m(u) = \sum_{|k| \le m-1} \tau_k e^{iku} \tag{112}$$

($\tau_m \in \mathrm{T}_m$) и $t_m(u, z)$ — любая функция из $\mathrm{T}_{m,\infty}$:

$$t_m(u, z) = \sum_{|k| \le m-1} t_k(z) e^{iku}. \tag{113}$$

Тогда, учитывая равенства (105), (109), (112) и (113), имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(h^*(\theta + t) - \tau_m(\theta + t)\big)\big(q(\theta; z) - t_m(\theta; z)\big)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^*(\theta + t) q(\theta; z)\, d\theta - T_m(t, z), \tag{114}$$

где $T_m(t; z) = T_m(t; z, \tau_m; q)$ — некоторая функция из $\mathrm{T}_{m,\infty}$. Поэтому вследствие равенств (110) и (114) заключаем, что в условиях леммы 2

$$E_{m,\infty}(h; z) \le \inf \left\{ \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(h^*(\theta + t) - \tau_m(\theta + t)\big)\big((\theta, z) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - t_m(\theta; z)\big)\, d\theta \right\|_{M_t} : \tau_m \in \mathrm{T}_m,\, t_m \in \mathrm{T}_{m,\infty},\, p \in P_G \right\}. \tag{115}$$

Если $t_m \in \mathrm{T}_{m,\infty}$ и $p \in P_G$, то согласно равенствам (45) и (114)

$$S[t_m(\cdot, z) + \tilde{P}(\cdot, z)] = \sum_{k > m} \mu_k(z)\, e^{ikt},$$

где $\mu_k(z)$ — некоторые функции от $z \in G$. Следовательно, неравенство (115) может быть записано в виде

$$E_{m,\infty}(h; z) \le \inf_{\tau_k, \mu_k(z)} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(h^*(\theta + t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{|k| \le m-1} \tau_k e^{ik(\theta + t)}\Big) \Big(K(\theta, z) - \sum_{k > -m} \mu_k(z) e^{ik\theta}\Big) d\theta \right\|_{M_t}, \tag{116}$$

где $K(\theta, z)$ — функция, определяемая равенством (11).

Предположим, что при некотором $p \ge 1$

$$h \in L_p^+(\Gamma) \quad \text{и} \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}.$$

Тогда $h^* \in L_p$ и при каждом $z \in G$ $K(\cdot, z) \in L_{p'}$. В этом случае, применяя неравенство для нормы сверток, в силу (116) находим

$$E_{m,\infty}(h; z) \le \frac{1}{2\pi} \inf_{\tau_k} \left\| h^*(t) - \sum_{|k| \le m-1} \tau_k e^{ikt} \right\|_p \times$$

$$\times \inf_{\mu_k(z)} \left\| K(t, z) - \sum_{k > -m+1} \mu_k(z) e^{ikt} \right\|_{p'}. \tag{117}$$

Отсюда, полагая

$$E_m(\varphi)_p = \inf_{\tau_k} \left\| \varphi(t) - \sum_{|k| \le m-1} \tau_k e^{ikt} \right\|_p, \tag{118}$$

где τ_k — произвольное число, и, таким образом, $E_m(\varphi)_p$ — величина наилучшего приближения функции $\varphi(\cdot)$ тригонометрическими полиномами порядка $m-1$ в пространстве L_p и

$$\mathcal{E}_{-m,\infty}(\Gamma, z)_{p'} = \inf_{\mu_k(z)} \left\| K(t, z) - \sum_{k \ge -m+1} \mu_k(z) e^{ikt} \right\|_{p'}, \tag{119}$$

где $\mu_k(z)$ —произвольные функции переменной z, приходим к следующему утверждению.

Теорема 7. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$h \in L_p^+(\Gamma), \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}.$$

Тогда $\forall\, m \in N$ *в каждой точке* $z \in G$ *справедлива оценка*

$$E_{m,\infty}(h; z) \le \frac{1}{2\pi} E_m(h^*)_p \mathcal{E}_{-m,\infty}(\Gamma, z)_{p'}. \tag{120}$$

В лемме 2 показано, что в интеграле (103) можно изменять ядро Коши таким образом, что значение самого интеграла остается прежним. Но в этом интеграле можно изменять и функцию $h(\cdot)$, не изменяя самого интеграла. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* G *— область со спрямляемой замкнутой жордановой границей* Γ *и* $L_1^-(\Gamma)$ *— множество функций* $\varphi(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, *таких, что функции* $\varphi^*(t) = \varphi(\Psi(e^{it}))$ *суммируемы на* $[0, 2\pi]$ *и их ряды Фурье имеют вид*

$$S[\varphi^*] = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-ikt}. \tag{121}$$

Тогда $\forall\, h \in L_1(\Gamma)$ *при любом* $z \in G$ *почти всюду (по переменной* t)

$$\mathcal{J}h(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h\big(\Psi\big(\Phi(\zeta)e^{it}\big)\big) - \varphi\big(\Psi\big(\Phi(\zeta)e^{it}\big)\big)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{122}$$

Действительно, учитывая (121), *в силу теоремы о свертке имеем*

$$\mathcal{J}\varphi(t; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi\big(\Psi\big(\Phi(\zeta)e^{it}\big)\big)}{\zeta - z} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\theta + t) \frac{\Psi'(e^{it}) i e^{it}}{\Psi(e^{it}) - z} dt. \tag{123}$$

Отсюда получаем равенство (122).

Если выполнены условия леммы 3, *то в силу* (110) *и* (111) $\forall\, z \in G$

$$E_{m,\infty}(h, z) = \inf_{\substack{T_m \in \mathrm{T}_{m,\infty} \\ \varphi \in L_1^-(\Gamma)}} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{h,\varphi}(\theta + t) K(\theta, z) d\theta - T_m(t, z) \right\|_{M_t}, \tag{124}$$

где

$$\Delta_{h,\varphi}(u) = h^*(u) - \varphi^*(u), \quad K(\theta; z) = \frac{\Psi'(e^{i\theta})ie^{i\theta}}{\Psi(e^{i\theta}) - z}. \tag{125}$$

Пусть теперь $\tau_m(u)$ *и* $t_m(u, z)$ — *функция вида* (112) *и* (113) *соответственно. Тогда вследствие равенств* (124), (121), (112) *и* (113) *будем иметь*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h^*(\theta+t) - \varphi^*(\theta+t) - \tau_m(\theta+t))(K(\theta; z) - t_m(\theta; z))d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta_{h,\varphi}(\theta+t)K(\theta; z)d\theta - T_m(t, z),$$

где $T_m(t, z)$ — *некоторая функция из* $\mathrm{T}_{m,\infty}$. *Поэтому* $\forall\, z \in G$

$$\mathrm{E}_{m,\infty}(f; z) \le$$

$$\le \inf_{\substack{t_m \in \mathrm{T}_{m,\infty} \\ \varphi \in L_1^-(\Gamma)}} \left\| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(h^*(\theta+t) - (\varphi^*(\theta+t) + \tau_m(\theta+t))\big)\big(K(\theta, z) - t_m(\theta; z)\big)d\theta \right\|_{M_t} =$$

$$= \inf_{\tau_k, t_k(z)} \left\| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(h^*(\theta+t) - \sum_{k \le m-1}\tau_k e^{ik(\theta+t)}\right)\left(K(\theta, z) - \sum_{|k| \le m-1}\mu_k(z)e^{ik\theta}\right)d\theta \right\|_{M_t}, \tag{126}$$

где τ_k — *произвольные числа*, а $\mu_k(z)$ — *произвольные функции переменной* z.

Если теперь предположить, что при некотором $p \ge 1$

$$h \in L_p^+(\Gamma) \quad \text{и} \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'},$$

и к правой части (126) применить неравенство для нормы сверток, то будем иметь аналог неравенства (117):

$$\mathrm{E}_{m,\infty}(h; z) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\inf_{\tau_k}\left\| h^*(t) - \sum_{k \le m-1}\tau_k e^{ikt}\right\|_p \inf_{\mu_k(z)}\left\| K(t, z) - \sum_{|k| \le m-1}\mu_k(z)e^{ikt}\right\|_{p'} \tag{127}$$

и, полагая

$$e_m(\varphi)_p = \inf_{\tau_k}\left\| \varphi(t) - \sum_{k \le m-1}\tau_k e^{ikt}\right\|_p, \tag{128}$$

$$\mathcal{E}_{|m|,\infty}(\Gamma, z)_{p'} = \inf_{\mu_k(z)}\left\| K(t, z) - \sum_{|k| \le m-1}\mu_k(z)e^{ikt}\right\|_{p'} \tag{129}$$

получаем следующий аналог теоремы 7.

Теорема 7′. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$h \in L_p^+(\Gamma), \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}.$$

Тогда $\forall\, m \in N$ *в каждой точке* $z \in G$

$$\mathrm{E}_{m,\infty}(h; z) \le \frac{1}{2\pi}e_m(h^*)_p\,\mathcal{E}_{|m|,\infty}(\Gamma, z)_{p'}. \tag{130}$$

4. Основные результаты. Пусть

$$\hat{L}^{\Psi} L_p^+(\Gamma) = \{f: f \in L_p(\Gamma),\ f_+ \in L^{\Psi} L_p^+(\Gamma)\}. \tag{131}$$

Если $f \in \hat{L}^{\Psi} L_p^+(\Gamma)$, то при условиях на функции $\psi(\cdot)$, числа p, а также кривую Γ, принятых в теоремах 2 – 7, $f_+ \in L_p(\Gamma)$, а значит, и $\hat{L}^{\Psi} L_p^+(\Gamma) \subset L_p'(\Gamma)$. Учитывая это замечание и объединяя утверждения предложений 1 и 2, а также теорем 3 – 7, получаем следующие утверждения.

Теорема 8. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$f \in \hat{L}^{\Psi} L_p^+(\Gamma), \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}, \quad 1/p + 1/p' = 1 \quad \text{и} \quad \psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}.$$

Тогда при любых $n \in N$ *в каждой точке* $z \in G$

$$|\rho_n(f; z)| = |\mathcal{J}f(z) - S_{n-1}(f; z)| \le (2/\pi^3)\psi(n)[\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)] \times$$
$$\times E_n(f_+^{\psi,*})_p \mathcal{E}_{-n,\infty}(\Gamma, z)_{p'}, \quad \eta(n) = \psi((1/2)\psi(n)), \tag{132}$$

$$|\rho_n(f; z)| = (2/\pi^3)\psi(n)[\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)] e_n(f_+^{\psi,*})_p \mathcal{E}_{|m|,\infty}(\Gamma, z), \tag{132'}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n *и по*

$$f \in \hat{L}^{\Psi} L_p^+(\Gamma); \quad f_+^{\psi,*}(t) = f_+^{\psi}(\Psi e^{it}).$$

Теорема 8′. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$f \in \hat{L}^{\Psi} L_p^+(\Gamma), \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'} \quad \text{и} \quad \psi \in \mathfrak{M}_0.$$

Тогда при любом $n \in N$ *в каждой точке* $z \in G$

$$|\rho_n(f; z)| \le (2/\pi^3)\psi(n)[\ln n + O(1)] E_n(f_+^{\psi,*})_p \mathcal{E}_{-n,\infty}(\Gamma, z)_{p'}, \tag{133}$$

$$|\rho_n(f; z)| \le (2/\pi^3)\psi(n)[\ln n + O(1)] e_n(f_+^{\psi,*})_p \mathcal{E}_{|n|,\infty}(\Gamma, z)_{p'}. \tag{133'}$$

Теорема 9. *Пусть при некотором* $p \ge 1$

$$f \in \hat{L}^{\Psi} L_p^+(\Gamma), \quad \Psi'(e^{i\cdot}) \in L_{p'}.$$

Тогда при любом $n \in N$ *в каждой точке* $z \in G$ *неравенства*

$$|\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_a)| \le K\psi(n) E_m(f_+^{\psi,*})_p \mathcal{E}_{-m,\infty}(\Gamma, z)_{p'}, \tag{134}$$

$$|\mathcal{J}f(z) - U_n(f; z; \Lambda_a)| \le K\psi(n) e_m(f_+^{\psi,*})_p \mathcal{E}_{|m|,\infty}(\Gamma, z)_{p'} \tag{134'}$$

справедливы при следующих условиях:

а) $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $a = m$;

б) $\psi \in \mathfrak{M}_c$, a — *любое число из промежутка* $(0, 1)$, $m = an$;

в) $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, $a = a(n) = (2 - (\eta(n) - n)/n)_+$, $\eta(n) = \psi^{-1}((1/2)\psi(n))$, $m = na(n)$.

Величина K *равномерно ограничена по* n *и по* $f \in \hat{L}^{\Psi} L_p^+(\Gamma)$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда G — внутренность круга $|z| < 1$. Тогда

$$\Phi(z) = z, \quad \Psi(w) = w, \quad F_k(z) = z^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$f^*(t) = f(\Psi(e^{it})) = f(e^{it})$$

и

$$\mathcal{E}_{-m,\infty}(\Gamma; z)_1 = \inf_{\mu_k(z)} \left\| \frac{e^{it}}{e^{it}-z} - \sum_{k\geq m-1} \mu_k(z) e^{ikt} \right\|_1. \tag{135}$$

Для любого $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, имеем

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-z} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{-ik(t-\theta)}. \tag{136}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(z) e^{ikt} = -\sum_{k=1}^{\infty} (re^{-i\theta})^k e^{ikt} = -\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik(t-\theta)}. \tag{137}$$

Ясно, что при каждом $z = re^{-i\theta}$, $r \in [0, 1)$, этот ряд равномерно сходится к некоторой функции $T_1 \in \mathrm{T}_{1,\infty}$ и

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-z} - T_1(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(e^{-ik(t-\theta)} + e^{ik(t-\theta)} \right) =$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos k(t-\theta) = 2P(r, t-\theta), \tag{138}$$

где

$$P(r, t) = (1-r^2)/2(1-2r\cos t + r^2)$$

— ядро Пуассона.

Объединяя соотношения (135) – (138), видим, что $\forall\, z = re^{i\theta}$, $r < 1$,

$$\mathcal{E}_{-m,\infty}(\Gamma; z)_1 = \inf_{\mu_k(z)} \left\| 2P(r, t-\theta) - \sum_{|k|<m} \mu_k(z) e^{ikt} \right\|_1 =$$

$$= \inf_{\mu_k(r,\theta)} \left\| 2P(r, t-\theta) - \sum_{|k|<m} \mu_k(z) e^{ikt} \right\|_1 =$$

$$= 2 \inf_{\mu_k(r,\theta)} \left\| P(r, \theta) - \sum_{|k|<m} \mu_k(r,\theta) e^{ikt} \right\|_1 \leq$$

$$\leq 2 \inf_{\mu_k(r)} \left\| 2P(r, t) - \sum_{|k|<m} \mu_k(r) e^{ikt} \right\|_1 = 2E_m\big(P(r; \cdot)\big)_1, \tag{139}$$

где $E_m(P(r; \cdot))_1$ — величина наилучшего приближения в пространстве L_1 ядра Пуассона тригонометрическими полиномами степени $m-1$. Таким образом, если Γ — единичная окружность, то $\forall\, z$, $|z| < 1$,

$$\mathcal{E}_{-m,\infty}(\Gamma; z)_1 \leq 2E_m(P(r; \cdot))_1. \tag{140}$$

Величина $E_m(P(r; \cdot))_1$ известна (см., например, [5, с. 257], равенство (6.29)):

$$E_m(P(r; \cdot))_1 = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{(2k+1)m}}{2k+1} = 4r^m(1-\gamma_m), \tag{141}$$

где

$$\gamma_m = r^{2m}(1/3 - r^{2m}/5 - r^{4m}/7 + \ldots),$$

так что

$$r^{2m}/8 < \gamma_m < r^{2m}/3.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае согласно (140) и (141) при $|z| = r < 1$

$$\mathcal{E}_{-m,\infty}(\Gamma; z)_1 \le 8r^m(1-\gamma_m), \quad r^{2m}/8 < \gamma_m < r^{2m}/3. \tag{142}$$

Подставляя оценку (142) в соотношения (132) – (134), из теорем 8 – 9 в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть* Γ — *единичная окружность и* $f \in \hat{L}^{\psi} L^{+}_{\infty}(\Gamma)$. *Тогда если* $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty} = \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_{\infty}$, *то при любых* $n \in N$ *в каждой точке* z, $|z| = r < 1$,

$$|\rho_n(f; z)| \le \frac{16r^n}{\pi^3}\psi(n)[\ln^{+}(\eta(n) - n) + O(1)]E_n(f_+^{\psi,*})_{\infty}(1-\gamma_n),$$

$$r^{2n}/8 < \gamma_n < r^{2n}/3, \quad \eta(n) = \psi^{-1}((1/2)\psi(n)).$$

Если же $\psi \in \mathfrak{M}_0$, *то при любых* $n \in N$ *в каждой точке* z, $|z| = r < 1$,

$$|\rho_n(f; z)| \le \frac{16r^n}{\pi^3}\psi(n)[\ln n + O(1)]E_n(f_+^{\psi,*})_{\infty}(1-\gamma_n),$$

$$r^{2n}/8 < \gamma_n < r^{2n}/3,$$

где $O(1)$ — *величина, ограниченная по* n *и по* $f \in \hat{L}^{\psi} L^{+}_{\infty}(\Gamma)$.

Функция $K(t, z)$ при каждом $z \in G$ является суммируемой функцией переменной t, поэтому величина $\mathcal{E}_{-m,\infty}(\Gamma; z)_1$, определяющаяся равенством (119), $\forall z \in G$ стремится к нулю при $m \to \infty$. Как показывает приведенный пример круга и другие примеры так называемых фаберовых областей, эта величина может быть равномерно ограниченной $\forall z \in \overline{G}$. В связи с этим возникает задача об описании множества M спрямляемых границ областей G, для которых величина $\mathcal{E}_{-m,\infty}(\Gamma; z)_1$ равномерно ограничена $\forall z \in \overline{G}$. Гипотеза состоит в том, что любая спрямляемая жорданова замкнутая кривая принадлежит к M.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и техники.

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
3. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
4. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 271 с.
5. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
6. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 499 – 510.
7. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
8. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210 – 222.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 537 с.

Получено 14. 05. 92