УДК 517.47.22

Г. Г. Брайчев, канд. физ.-мат. наук (Моск. пед. ун-т)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДИКАТОРА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ЕЕ КОЭФФИЦИЕНТАМ ТЕЙЛОРА

By employing both Poujois theorem on relation between the growth of an entire exponential function and the location of its Borel transform singularities and the analogue of this resuit for entire functions of finite order, which was obtained by Macintyre, the estimates and, in some cases, the exact expressions for the indicator of increase of an entire function are obtained by using its Taylor expansion coefficients.

Спираючись на теорему Пойа про зв'язок між ростом цілої показникової функції та розташуванням особливостей її перетворення Бореля, а також на доведений А. Макінтайром аналог цього результату для цілих функцій скінченного порядку, наводяться оцінки і в деяких випадках точно обчислюється індикатор зростання цілої функції за її коеффіцієнтами Тейлора.

Пусть

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma\big((n+1)/\rho\big)} z^n$$

— целая функция порядка ρ,

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right|}{r^{\rho}}$$

— ее индикатор и

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^{n+1}}$$

— обобщенное преобразование Бореля функции $F(z)$. В силу известной теоремы [1, с. 338] функция $f(e^{i\varphi}z^{1/\rho})$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z > h(-\varphi)$ и не является таковой ни в какой полуплоскости $\operatorname{Re} z > \gamma$ с $\gamma < h(-\varphi)$.

Пользуясь этим результатом, попытаемся оценить, а в некоторых случаях и точно вычислить $h(\varphi)$ по коэффициентам f_n.

1. Пусть сначала $\rho = p \in \mathbb{N}$. Если $F(z)$ имеет тип $\sigma < \infty$, то $f(z)$ аналитична вне круга $|z| \le \sigma^{1/\rho}$. Обозначим $z^p + \tau^p = x$, $\tau \in \mathbb{R}_+$; для достаточно больших $|z|$ и $|\arg x| < \pi$ имеем, выбирая главную ветвь корня:

$$f(z^{1/p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{(x-\tau^p)^{(n+1)/p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{x^{(n+1)/p}} \frac{1}{\left(1-\tau^p/x\right)^{(n+1)/p}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau^p}{p}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{m=np}^{\infty} \frac{f_{m-np}}{x^{(m+1)/p}} (m+1-np)\ldots(m+1-p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m(\tau)}{x^{(m+1)/p}},$$

где

$$b_m(\tau) = \sum_{\substack{n=0\\ p|n}}^{m} f_{m-n}\tau^n \frac{(m+1-n)\ldots(m+1-p)}{(n/p)!\,p^{n/p}}$$

(запись $p \mid n$ означает, что p делит n, и по определению полагаем $(m+1-n)\ldots$

$\ldots (m+1-p) = 1$ при $n = 0$). Таким образом, получаем

$$f(z^{1/p}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m(\tau)}{(z+\tau^p)^{(m+1)/p}} \tag{1}$$

или

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m(\tau)}{(z^p+\tau^p)^{(m+1)/p}}. \tag{2}$$

Обозначим $B(\tau) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \, |\, b_m(\tau)\,|^{1/m}$.

Ряд (2) сходится на множестве $G_\tau = \{z \colon |\, z^p + \tau^p \,| > B^p(\tau)\}$ (если $B(\tau) < \tau$, то к G_τ добавляем разрезы $[0, \tau e^{i\pi(2n+1)/p}]$, $n = 0, 1, \ldots, p-1$, превращающие G_τ в односвязную область, содержащую ∞ внутри; см. далее свойство 3).

Нетрудно установить, что лемнискаты $L_c = \{z \colon |\, z^p + \tau^p \,| = c^p\}$, ограничивающие G_τ при $c = B(\tau)$, обладают следующими свойствами.

1. L_c инварианта относительно поворотов на угол $2\pi/p$.

2. L_c симметрична относительно каждого луча $\arg z = \pi n/p$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Множество $\{z \colon |\, z^p + \tau^p \,| < c^p\}$ является односвязной областью при $c > \tau$, p — лепестковой розой при $c = \tau$ и состоит из p односвязных компонент при $c < \tau$.

4. $L_{B(\tau)}$ содержит хотя бы одну особую точку $f(z)$.

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_0 = \{z \colon |\arg z| < \pi/2p\};$$

$$\Delta_n = e^{i\pi n/p}\Delta_0, \quad n = 1, 2, \ldots, p-1;$$

$$C_\nu = \{z \colon \operatorname{Re} z^p = \nu\}.$$

Если $\nu = 0$, то C_ν состоит из p непересекающихся кривых, лежащих в углах $\Delta_0, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2(p-1)}$. При $\nu < 0$ кривые, образующие C_ν, лежат в углах $\Delta_1, \Delta_3, \ldots$ $\ldots, \Delta_{2p-1}$. И, наконец, C_0 образует стороны этих углов; C_ν обладают свойствами 1, 2 кривых L_c. Обозначим далее

$$D_\nu = \{z \colon \operatorname{Re} z^p > \nu\}.$$

Легко видеть, что при $\nu \ge 0$ D_ν состоит из p компонент, лежащих в тех же углах, что и C_ν, а при $\nu < 0$ D_ν содержит углы Δ_{2i}, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, и часть углов Δ_{2i-1}, $i = 1, 2, \ldots, p$, находящуюся между сторонами углов и $D_\nu = \mathbb{C} \setminus e^{i\pi/p} D_{-\nu}$.

Обозначим через $a(\tau)$ наибольшую абсциссу точек пересечения окружности $|\, z + \tau^p \,| = B^p(\tau)$ с $\mathbb{R}$. В следующем утверждении содержится важное свойство кривых L_c, $c = B(\tau)$.

Теорема 1. *Пусть* $F(z)$ *имеет порядок* $p \in \mathbb{N}$ *и тип* $\sigma < \infty$, а $\nu = \max\{h(2\pi n/p),\ n = 0, \ldots, p-1\}$. *Тогда для* $\forall\, \tau > \sigma^{1/p}$ *выполняются нера-*

венства

$$\nu \le a(\tau) < \nu + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\tau^p - \sigma}.$$

Доказательство. Левое неравенство доказывается просто. Предположим, что $\nu = h(0)$ (этого всегда можно добиться поворотом плоскости). Если бы выполнялось $a(\tau) < \nu$, то $f(z^{1/p})$, будучи аналитической на множестве

$$\{z : |z + \tau^p| > B^p(\tau),\ z \notin (-\infty, -\tau^p]\},$$

была бы аналитической и для $z : \operatorname{Re} z > a(\tau)$, что противоречит свойству $f(z^{1/p})$ не быть аналитической ни в одной полуплоскости $\operatorname{Re} z > \gamma$, $\gamma < h(0)$. (Если $B(\tau) < \tau$, то для $z \in (a(\tau); 0]\, f(z^{1/p}))$ определяется посредством ряда (1).)

Таким образом, $a(\tau) \ge \nu$ и, следовательно, кривая $L_{B(\tau)}$ пересекает C_ν. Для доказательства правого неравенства необходимо показать, что точки пересечения лежат в круге $|z| \le \sigma^{1/p}$. Пусть $z_0 \in L_{B(\tau)} \cap C_\nu$ и $|z_0| > \sigma^{1/p}$. Так как $f(z)$ аналитична вне круга $|z| \le \sigma^{1/p}$, то на части $L_{B(\tau)}$, лежащей вне этого круга, нет особых точек $f(z)$. Но их нет и на оставшейся части $L_{B(\tau)}$, поскольку эта часть лежит в D_ν, где $f(z)$ также аналитична. Для угла $|\arg z| < \pi / p$ последнее утверждение следует из аналитичности $f(z^{1/p})$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \nu$, а в углах $|\arg z - 2\pi n / p| < \pi / p$ — еще и из того, что $h(2\pi n / p) \le \nu$. Таким образом, предположение, что точка пересечения $L_{B(\tau)}$ с C_ν лежит вне круга $|z| \le \sigma^{1/p}$, приводит к отсутствию особых точек $f(z)$ на $L_{B(\tau)}$, что противоречит свойству 4 кривых L_c, $c = B(\tau)$.

Пусть, как и прежде, $z_0 \in L_{B(\tau)} \cap C_\nu$, тогда $\operatorname{Re} z_0^p = \nu$. Обозначим $b = \operatorname{Im} z_0^p$, тогда $|b| \le |z_0|^p \le \sigma$ и

$$a(\tau) + \tau^p = B^p(\tau) = |\nu + ib + \tau^p| = (\nu + \tau^p)\left(1 + \left(\frac{b}{\nu + \tau^p}\right)^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le (\nu + \tau^p)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\tau^p + \nu}\right)^2\right) \le \nu + \tau^p + \frac{1}{2}\frac{b^2}{\tau^p - \sigma}.$$

Отсюда и получаем искомое неравенство.

Замечание. Можно получить и более точные оценки, используя разложение $(1 + x)^{1/2}$ в ряд.

Следствие. *В условиях теоремы* 1 *имеем* $\nu = \lim\limits_{\tau \to \infty} (B^p(\tau) - \tau^p)$.

Применив предыдущий результат к функции $f(z^{i\varphi})$, для величины

$$H(\varphi) := \max\{h(\varphi + 2\pi n / p) : n = 0, \ldots, p - 1\}$$

получим равномерные по $\varphi \in [0, 2\pi]$ оценки $(\tau > \sigma^{1/p})$

$$B^p(\tau e^{-i\varphi}) - \tau^p - \frac{1}{2}\frac{b^2}{\tau^p - \sigma} < H(\varphi) \le B^p(\tau e^{-i\varphi}) - \tau^p.$$

Отсюда вытекает

$$H(\varphi) = \lim_{\tau \to \infty} \{B^p(\tau e^{-i\varphi}) - \tau^p\}.$$

Сформулируем этот результат в другом виде. Для этого обозначим

$$a(re^{i\varphi}) = r^p B^p(\tau e^{-i\varphi}/r) \quad \text{и} \quad \left(D_\varphi^{(p)}a\right)(0) := \lim_{h\to 0+} \frac{a(he^{i\varphi}) - a(0)}{h^p},$$

$\left(D_\varphi^{(1)}a\right)(0) := \left(D_\varphi a\right)(0)$ — производная по направлению $\arg\zeta = 0$ от функции $a(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$.

Теорема 2. *Пусть целая функция*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma\left((n+1)/p\right)} z^n$$

имеет порядок $p \in \mathbb{N}$ и тип $\sigma < \infty$, индикатор $h(\varphi)$ и $F(0) \neq 0$. Тогда для $\forall\, \varphi \in [0, 2\pi)$ справедливо равенство

$$H(\varphi) = \left(D_\varphi^{(p)}a\right)(0).$$

Доказательство. Из условия $F(0) \neq 0$ следует, что $a(0) = 1$ и для $h = 1/\tau$ имеем

$$B^p(\tau e^{-i\varphi}) - \tau^p = h^{-p}\left(a(he^{i\varphi}) - a(0)\right).$$

Теперь, применяя теорему 1, завершаем доказательство.

Следствие. *В условиях теоремы $\forall\, \varphi \in [0, 2\pi)$ выполняется неравенство*

$$h(\varphi) \le \left(D_\varphi^{(p)}a\right)(0). \tag{3}$$

2. Случаи точного вычисления индикатора.

1. $F(z)$ — функция экспоненциального роста

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} z^n (f_0 \neq 0).$$

При $p = 1$ имеем $H(\varphi) \equiv h(\varphi)$ и, следовательно, для $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$a(\zeta) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} f_m \zeta^m \right|^{1/n}; \quad ..(\varphi) = (D_\varphi a)(0). \tag{4}$$

Замечание. В работе [2] А. Данжуа устанавливается следующее асимптотическое равенство:

$$B(\tau e^{-i\varphi}) \approx \tau + h(\varphi) + \frac{1}{2\tau} \max\{h'(\varphi \pm 0)\}.$$

Некоторая детализация доказательства теорем 1 и 2 может привести к такому же результату.

2. $F(z)$ — целая функция порядка $\rho = 1/p$, $p \in \mathbb{N}$. Заметим, что в этом случае функция $F_1(z) = F(z^p)$ имеет экспоненциальный рост, причем $h_{F_1}(\varphi) = h_F(p\varphi)$. Таким образом, $h_F(\varphi) = (D_{\rho\varphi}a)(0)$.

3. Если $F(z)$ — целая функция порядка $p \in \mathbb{N}$ такая, что ее индикатор $h(\varphi)$ имеет период $2\pi/p$, то $H(\varphi) \equiv h(\varphi)$, и теоремы 1 и 2 определяют способ вычисления $h(\varphi)$. Такие свойства имеют функции вида $F(z^p)$, где $F(z)$ — целая функция экспоненциального роста.

4. Произвольная целая функция порядка $p \geq 2$ может быть представлена в

виде

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \sum_{j=0}^{p-1} z^j F_j(z^p),$$

где

$$F_j(z) = \sum_{m=0}^{\infty} F_{pm+j} z^m$$

— целые функции не выше экспоненциального роста. Очевидно, что

$$h_F(\varphi) \le \max\{h_{F_i}(\varphi) \colon i = 0, 1, \dots, p-1\},$$

и знак равенства имеет место для данного значения φ, если максимум достигается только на одной из функций $h_{F_i}(\varphi)$. Таким образом, вычислив $h_{F_i}(\varphi)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$, по формуле (4), мы для всех таких значений φ можем точно вычислить индикатор $h_F(\varphi)$.

Для остальных значений φ имеем оценку сверху индикатора (3). Для оценки снизу можно использовать свойство 4 индикаторных диаграмм работы [3, с. 112]. Именно: находим по формуле (4) индикаторные диаграммы G_i функций $F_i(z)$ (их опорные функции), обозначаем через $k(-\varphi)$ опорную функцию множества крайних точек выпуклой оболочки $\bigcup G_i$, принадлежащих только одной из индикаторных диаграмм. Тогда $h_F(\varphi) \ge k(p\varphi)$.

В заключение рассмотрим случай, когда целая функция $F(z)$ имеет рациональный порядок: $\rho = p/q$, $(p; q) = 1$. Этот случай сводится к предыдущему двумя путями. Можно рассмотреть функцию $F_1(z) = F(z^q)$ целого порядка p и применить результат примера 4, а можно сразу воспользоваться приведенным в этом примере разложением функции

$$F(z) = \sum_{i=0}^{p-1} z^i F_i(z^p),$$

только в этом случае $F_i(z)$ будут иметь порядок не выше $1/q$, и хотя бы одна из них — порядок, равный $1/q$. Используя результат примера 2, посчитаем индикаторы $h_{F_i}(\varphi)$ при порядке $1/q$, и, как и ранее, имеем оценку

$$h_F(\varphi) \le \max\{h_{F_i}(\varphi p); i = 0, 1, \dots, p-1\}$$

со знаком равенства, если один из индикаторов больше других для данного значения φ.

Отметим, что в случае иррационального порядка ρ свойство 4 кривых L_c, на которое мы существенно опирались в доказательстве теоремы 1, может не выполняться. Поэтому этот случай требует отдельного рассмотрения.

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 671 с.
2. *Denjoy A.* Sur les singularités d'une fonction analitique définie par un élément // C. R. Acad. Sci. – 1938. – **206**. – P. 737.
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.

Получено 19. 04. 91