УДК 512. 21

М. М. Осипчук, асп. (Київ. ун-т)

ПРО ОДНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ В $\mathbb{R}^m$ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІОНАЛУ ТИПУ ЛОКАЛЬНОГО ЧАСУ НА ПОВЕРХНІ

The transformation of Wiener's process ξ_t in $\mathbb{R}^m$ is considered by using the multiplicative functional $\alpha_t = u(\xi_t) / u(\xi_0)$, where the function u is similar to a local time type functional on a surface. It is proved that such a transformation is equivalent to a successive application of absolutely continuous change of measure and killing on a surface.

Розглянуте одне перетворення вінерівського процесу ξ_t в $\mathbb{R}^m$ за допомогою мультиплікативного функціоналу $\alpha_t = u(\xi_t) / u(\xi_0)$, де функція u деяким чином влаштована за функціоналом типу локального часу на поверхні. Доведено, що таке перетворення еквівалентне послідовному застосуванню абсолютно неперервної заміни міри і вбивання на поверхні.

Нехай $(\xi_t, \mathfrak{F}_t, P_x)$ — вінерівський процес в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, з ймовірністю переходу

$$P(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma g(t, x, y)dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \Gamma \in \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m);$$

де

$$g(t, x, y) = (2\pi t)^{-m/2} \exp\left\{ -\frac{|y-x|^2}{2t} \right\},$$

S — обмежена замкнена поверхня Ляпунова [1] в $\mathbb{R}^m$. Покладемо

$$\mu_S(\Gamma) = \int_{S\cap\Gamma} v(y)d\sigma_y, \quad \Gamma \in \mathfrak{B},$$

де v — деяка неперервна невід'ємна функція на S, μ_S — W-міра, якій відповідає W-функціонал від вінерівського процесу ξ_t [2]. Такий функціонал можемо записати у вигляді

$$\eta_t = \int_0^t v(\xi_t)\delta_S(\xi_t)\, d\tau,$$

де δ_S визначається співвідношенням

$$\int_{\mathbb{R}^m} \delta_S(x)h(x)\, dx = \int_S h(x)\, d\sigma_x,$$

h — довільна неперервна фінітна функція, σ — поверхнева міра Лебега на S. Крім того, існує границя $\eta_\infty = \lim_{t\uparrow\infty} \eta_t$ і функція $u(x) = M_x e^{\eta_\infty}$, $x \in \mathbb{R}^m$, є розв'язком інтегрального рівняння

$$u(x) = 1 + C_m \int_S u(y)v(y)|x-y|^{2-m}\, d\sigma_y,$$

де $C_m = \Gamma(m/2)/(m-2)\pi^{m/2}$. Зрозуміло, що $u(x) \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in C(\mathbb{R}^m)$, $u \in C^2(\mathbb{R}^m \backslash S)$. Функція u є ексцесивною [3] і тому можливе перетворення процесу ξ_t за допомогою мультиплікативного функціоналу $\alpha_t = u(\xi_t)/u(\xi_0)$, $t \geq 0$. Ймовірність процесу після такого перетворення задається формулою

$$\tilde{P}(t, x, \Gamma) = M_x \chi_\Gamma(\xi_t)\alpha_t = \frac{1}{u(x)} \int_\Gamma g(t, x, y)u(y)dy.$$

Звідси одержуємо вираз для напівгрупи операторів $\tilde{T}_t = (1/u)T_t u$, де u означає оператор множення на функцію $u(x)$.

Позначимо

$$c(t, x) = \frac{1}{t}(1 - \tilde{P}(t, x, \mathbb{R}^m)), \quad a^i(t, x) = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^m} (y^i - x^i)\tilde{P}(t, x, dy), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$b^{ij}(t, x) = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^m} (y^i - x^i)(y^j - x^j)\tilde{P}(t, x, dy), \quad i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

і для довільної $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ розглянемо

$$C(\varphi) = \lim_{t\downarrow\infty} \int_{\mathbb{R}^m} c(t, x)\varphi(x)dx,$$

$$A^i(\varphi) = \lim_{t\downarrow\infty} \int_{\mathbb{R}^m} a^i(t, x)\varphi(x)dx, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$B^{ij}(\varphi) = \lim_{t\downarrow\infty} \int_{\mathbb{R}^m} b^{ij}(t, x)\varphi(x)dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Оскільки, як легко побачити, для кожного $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ справедливі рівності

$$\lim_{t\downarrow\infty} \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^m} (u(x) - u(y))g(t, x, y)dydx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m} u(y)\Delta\varphi(y)dy,$$

$$\lim_{t\downarrow\infty} \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^m} u(y)(y^i - x^i)g(t, x, y)dydx = -\int_{\mathbb{R}^m} u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}dx,$$

$$\lim_{t\downarrow\infty} \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^m} u(y)(y^i - x^i)(y^j - x^j)g(t, x, y)dydx = \delta_{ij}\int_{\mathbb{R}^m} u(x)\varphi(x)dx,$$

то, використовуючи теорему Банаха — Штейнгауза, критерій слабкої збіжності послідовності лінійних неперервних функціоналів і всюди щільність C_0^∞ в C_0, одержуємо $\forall\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$

$$C(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} v(x)\delta_S(x)\varphi(x)dx = \int_S v(x)\varphi(x)d\sigma_x,$$

$$A^i(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{u(x)}\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}\varphi(x)dx, \quad B^{ij}(\varphi) = \delta_{ij}\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)dx.$$

Зауважимо, що добуток узагальненої функції f із C_0' на довільну неперервну функцію g визначається як такий функціонал над C_0, що $\forall\varphi \in C_0$ $(fg, \varphi) = (f, g\varphi)$.

Отже, одержаний процес є узагальненим дифузійним процесом в $\mathbb{R}^m$ [4] з вектором переносу $\nabla u(x)/u(x)$, одиничною матрицею дифузії і коефіцієнтом обриву $v(x)\delta_S(x)$. Покажемо, що такий же процес можна одержати, відправляючись від вінерівського процесу, за два кроки: абсолютно неперервна заміна міри і убивання на поверхні S.

З теорії потенціалів [1] випливає, що функція $r(x) = \nabla u(x)/u(x)$ обмежена

Используя лемму 1 убеждаемся, что

$$M\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{Sp}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\right)-\frac{m}{n}a\right|^2 = O\left(\sum k_{\alpha\beta}^2 n^{N-2} m^{(l+1)/2}\right).$$

Отсюда и следует доказательство леммы.

Введем оператор A^{0*}, сопряженный к A^0. Он переводит подпространство $\hat{\mathcal{P}}_l(n)$ на $\hat{\mathcal{P}}_{l-2}(n)$ по следующему правилу: если для a в представлении (3), (4) $\sum(k_{is}+k_{si})=1$, т. е. $a=\sum_{i=1}^{n}(b_i,\xi_i)\xi_i$, где b_i не зависит от ξ_i, то $A^{0*}a = =\sum_{i=1}^{n} b_i$, а если a вида (3), (4) такого представления не допускает, то $A^{0*}a=0$.

В силу изложенного справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть l_n таково, что $l_n^2/n\to 0$, m/n ограничено. Тогда для $a\in \bigoplus_{i=1}^{l_n}\hat{\mathcal{P}}_i(n)$*

$$\left\| Aa - A^0a - A^{0*}a - \left(1+\frac{m}{n}\right)a \right\| = o(\|a\|).$$

Таким образом, на указанном подпространстве оператор $A^0 + A^{0*} + \left(1+\frac{m}{n}\right)I$ является "главной" частью оператора A.

1. *Yin Y. Q., Bai Z. D., Krishnaiah P. R.* On limit of the largest eigenvalue of the large dimensional sample covariance matrix // Jech. Rep. – 1984. – № 84 – 44. – P. 14.
2. *Yin Y. Q., Bai Z. D., Krishnaiah P. R.* On limit of the largest eigenvalue of the large dimensional sample covariance matrix // Probab. Theory and Related Fields. – 1988. – **78**, № 4. – P. 509 – 521.
3. *Yin Y. Q., Krishnaiah P. R.* Limit theorem for the eigenvalues of the sample covariance matrix when the underlying distribution is isotropic // Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – **30**, № 4. – С. 810 – 816.
4. *Скороход А. В., Степахно В. И.* Об одном обобщении полиномов Эрмита // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1524 – 1528.
5. *Скороход А. В., Степахно В. И.* Центральная предельная теорема для полиномов Эрмита от независимых гауссовых величин // Там же. – № 12. – С. 1681 – 1686.

Получено 16. 05. 91