УДК 517.5

С. А. Пичугов, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В L_p

The asymptotic behavior of the ratio $E_n(f)_p / \omega(f, \alpha / n)_p$ is studied for individual periodic functions $f \in L_p$.

Досліджується асимптотична поведінка відношення $E_n(f)_p / \omega(f, \alpha / n)_p$ для індивідуальних періодичних функцій $f \in L_p$.

Все рассматриваемые функции $f(x)$ действительные, 2π-периодические; для $0 < p < \infty$

$$L_p = \left\{ f(x); \| f \|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(x) |^p \, dx \right)^{1/b} < \infty; \ b = \max(p, 1) \right\};$$

$$E_n(f)_p = \inf \{ \| f - T_n \|_p; \ T_n \in \mathcal{T}^{2n-1} \}$$

— наилучшее приближение функции f подпространством $\mathcal{T}^{2n-1}$ тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$ в метрике L_p;

$$\omega(f, h)_p = \sup \{ \| f(\cdot + t) - f(\cdot) \|_p; \ | t | \le h \}$$

— модуль непрерывности f в L_p.

Для оценки снизу точной константы в теореме Джексона в L_p в [1] показано, что для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $\eta > 0$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$ существует функция $f_{n\eta} \in L_p$ такая, что

$$E_n(f_{n\eta})_p > (c_p - \eta) \omega(f_{n\eta}, \pi / n)_p, \tag{1}$$

где $c_p = 2^{-1/r}$, $r = \max \{ p, p(p-1)^{-1} \}$.

В настоящей статье устанавливается существование в L_p функции $\bar{f}$, не зависящей от n, для которой неравенство (1) выполняется для бесконечной подпоследовательности номеров $\{ n_k \}$. Для этого используются идеи работы [2], где для точных неравенств Джексона в равномерной метрике построены такие асимптотические экстремальные функции.

Теорема. *В каждом из пространств L_p, $0 < p < \infty$, найдется функция $\bar{f}$, для которой*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} E_n(\bar{f})_p / \omega(\bar{f}, \pi / n)_p \ge 2^{-1/r}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} E_n(\bar{f})_p / \omega(\bar{f}, \pi / n)_p \ge 1, \quad 0 < p \le 1. \tag{3}$$

Доказательство. Функцию $\bar{f}$ будем искать в виде

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{n_i^{\gamma}} f_{n_i}, \tag{4}$$

где n_i — возрастающие натуральные числа, $\gamma > 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$, а f_{n_i} удовлетворяют (1) при некоторых $\eta_i \downarrow 0$ $(i \to \infty)$ и $\|f_{n_i}\|_p \le 1$.

Покажем сначала, что существуют такие $\{\varepsilon_i\}$, $\{n_i\}$, для которых при всех $k = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство:

$$\frac{E_{n_k}(\bar f)_p}{\omega(\bar f, \pi/n_k)_p} \ge \frac{(c_p - \eta_k)\,\omega(f_{n_k}, \pi/n_k)_p - 2k^{-1}}{\omega(f_{n_k}, \pi/n_k)_p + 4k^{-1} + n_k^{\gamma}\sum_{i=1}^{k-1} n_i^{-\gamma}\omega(f_{n_i}, \pi/n_k)_p}. \tag{5}$$

Для пространства $C_{2\pi}$ и $\gamma = 1/2$ это соотношение неявно содержится в [2], при этом доказательство использует только общие свойства функционалов $E_n(f)$ и $\omega(f, \cdot)$ и не зависит от специфики метрики. Поэтому мы лишь повторим соответствующие рассуждения из [2].

В силу однородности и полуаддитивности функционала $E_n(f)_p$ значения ε_i можно выбрать так [2], чтобы для всех k

$$E_{n_k}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i}{n_i^{\gamma}} f_{n_i}\right)_p \ge \frac{1}{n_k^{\gamma}} E_{n_k}\left(f_{n_k}\right)_p. \tag{6}$$

Пусть далее для n_k выполняется условие

$$n_k \ge (k-1)^{1/\gamma} n_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{7}$$

Тогда $\bar f \in L_p$ и

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{n_i^{\gamma}} \le \frac{2}{k n_k^{\gamma}}. \tag{8}$$

Из (6), (1) и (8) следуют соотношения

$$E_{n_k}(\bar f)_p \ge E_{n_k}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i}{n_i^{\gamma}} f_{n_i}\right)_p - E_{n_k}\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{n_i^{\gamma}} f_{n_i}\right)_p \ge$$

$$\ge \frac{1}{n_k^{\gamma}} E_{n_k}\left(f_{n_k}\right)_p - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\|f_{n_i}\|_p}{n_k^{\gamma}} \ge \frac{1}{n_k^{\gamma}}(c_p - \eta_k)\,\omega\left(f_{n_k}, \pi/n_k\right)_p - \frac{2}{k n_k^{\gamma}}; \tag{9}$$

$$\omega\left(\bar f, \pi/n_k\right)_p \le \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n_i^{\gamma}}\,\omega\left(f_{n_i}, \pi/n_k\right)_p + \frac{1}{n_k^{\gamma}}\,\omega\left(f_{n_k}, \pi/n_k\right)_p +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2\|f_{n_i}\|_p}{n_i^{\gamma}} \le \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n_i^{\gamma}}\,\omega\left(f_{n_i}, \pi/n_k\right)_p + \frac{1}{n_k^{\gamma}}\,\omega\left(f_{n_k}, \pi/n_k\right)_p + \frac{4}{k n_k^{\gamma}}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем (5). Отсюда будет следовать (2), если мы сумеем выбрать γ, $\{f_{n_i}\}$, $\{\eta_i\}$, $\{n_i\}$ так, чтобы удовлетворить дополнительным условиям

$$\omega\left(f_{n_k}, \pi/n_k\right)_p = \mathrm{const}; \quad n_k^{\gamma} \sum_{i=1}^{k-1} n_i^{-\gamma}\,\omega\left(f_{n_i}, \pi/n_k\right)_p \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{11}$$

Будем различать случаи $p > 2$ и $p \le 2$.

В случае $p \in (2, \infty)$ рассмотрим следующую δ-образную функцию. Для малого $\delta > 0$ пусть $f_{1\delta}(x) = (\pi/\delta)^{1/p}$ для $0 \le x \le 2\delta$ и $f_{1\delta}(x) = 0$ для $2\delta < x < 2\pi$. Тогда $\| f_{1\delta} \|_p = 1$ и $\omega(f_{1\delta}, h)_p = (h/\delta)^{1/p}$ при $0 \le h \le 2\delta$ и $\omega(f_{1\delta}, h)_p = 2^{1/p}$ при $2\delta \le h \le \pi$.

Пользуясь критерием элемента наилучшего L_p-приближения (см., например, [3, с. 28]), вычисляем, что константа $a = a(f_{1\delta})$ и значение наилучшего приближения соответственно равны

$$a(f_{1\delta}) = \frac{(\pi/\delta)^{1/p}}{1 + ((\pi - \delta)/\delta)^{1/(p-1)}},$$

$$E_1(f_{1\delta})_p = \| f_{1\delta} - a(f_{1\delta}) \|_p = \left(1 + \left(\frac{\delta}{\pi - \delta}\right)^{1/(p-1)}\right)^{-(p-1)/p} = 1 - \eta(\delta),$$

где $\eta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть теперь $\delta_n = 1/2n$ и в качестве f_n в (4) положим $f_n(x) = f_{1\delta_n}(nx)$. Ввиду $2\pi/n$-периодичности f_n

$$E_n(f_n)_p = E_1(f_{1\delta_n})_p = 1 - \eta(1/2n).$$

Далее, $\omega(f_n, h)_p = (2n^2 h)^{1/p}$ при $0 \le h \le n^{-2}$ и $\omega(f_n, h)_p = 2^{1/p}$ при $n^{-2} \le h \le \pi$. В частности, $\omega(f_n, \pi/n)_p = 2^{1/p}$.

Теперь выберем произвольно γ с условием $\gamma \in (0, 1/p)$ и потребуем для $\{n_k\}$ дополнительно к (7), чтобы для $k = 2, 3, \ldots$

$$n_k > \max\left\{\pi n_{k-1}^2; \left(k \sum_{i=1}^{k-1} n_i^{2/p-\gamma}\right)^{1/(1/p-\gamma)}\right\}. \tag{12}$$

Тогда для $i \le k-1$

$$\omega(f_{n_i}, \pi/n_k)_p = (2n_i^2 \pi/n_k)^{1/p},$$

поэтому

$$n_k^\gamma \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n_i^\gamma} \omega\left(f_{n_i}, \pi/n_k\right)_p = \frac{(2\pi)^{1/p}}{n_k^{1/p-\gamma}} \sum_{i=1}^{k-1} n_i^{2/p-\gamma} \le \frac{(2\pi)^{1/p}}{k}$$

и условия (11) выполнены. Мы доказали (2) в случае $p \in (2, \infty)$.

Пусть теперь $1 \le p \le 2$. Рассмотрим удовлетворяющие (1) функции, построенные В. А. Юдиным [4].

Для простого числа q $(q > 2)$ с помощью равноотстоящих точек $x_k = k2\pi/q$, $k = 0, 1, \ldots, q-1$, получим разбиение периода $(0, 2\pi]$ и определим 2π-периодическую функцию $f_{1q}(x)$:

$$f_{1q}(x) = (k/q), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \ldots, q-1;$$
$$f_{1q}(x) = 0, \qquad x \in [x_{q-1}, 2\pi],$$

где (k/q) — символ Лежандра [5, с. 70]. Тогда [4]

$$
\begin{gathered}
E_1(f_{1q})_p = \|f_{1q}\|_p = (1-1/q)^{1/p}, \\
\omega(f_{1q}, h)_p \le (2^{p-1}qh/2\pi)^{1/p} \quad \text{при} \quad 0 \le h \le 2\pi/q, \\
\omega(f_{1q}, h)_p = 2^{(p-1)/p} \quad \text{при} \quad 2\pi/q \le h \le 2\pi.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Теперь для $n > 2$ в качестве q_n выберем какое-либо простое число из $[n, 2n]$ и положим в (4) $f_n(x) = f_{1q_n}(nx)$. Для произвольного $\gamma \in (0, 1/p)$ возьмем n_k $(k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие условиям

$$
n_k \ge \max\left\{(k-1)^{1/\gamma} n_{k-1};\, 2n_{k-1}^2;\, \left(k\sum_{i=1}^{k-1} n_i^{2/p-\gamma}\right)^{1/(1/p-\gamma)}\right\}.
$$

Тогда рассуждения, аналогичные случаю $p > 2$, показывают, что выполняются условия (11), и с учетом (13) получаем (2).

Теперь рассмотрим случай $p \in (0, 1)$. Необходимо получить аналоги соотношений (1), (5).

Известно [4], что для построенных выше функций f_{1q}

$$
\begin{gathered}
E_1(f_{1q})_p = \|f_{1q} - 1\|_p = 2^{p-1}(1-1/q) + 1/q, \\
\omega(f_{1q}, h)_p \le 2^{p-1}qh/2\pi \quad \text{при} \quad 0 \le h \le 2\pi/q, \\
\omega(f_{1q}, h)_p = 2^{p-1} \quad \text{при} \quad 2\pi/q \le h \le 2\pi.
\end{gathered}
$$

Значит, при достаточно больших q справедливо (1) с константой $c_p = 1$.

Функционалы $E_n(f)_p$ и $\omega(f, \cdot)_p$ теперь являются p-однородными. Внося соответствующие изменения в выкладки, получаем, что для функции (4) выполняется неравенство (5) с заменой в правой части γ на γp. Теперь доказательство (3) завершается рассуждениями, аналогичными случаю $p \in [1, 2]$. Теорема доказана.

Замечание. Из определения функций $f_n(x)$ видно, что утверждение теоремы остается в силе при замене в (2), (3) величины $\omega(\bar{f}, \pi/n)_p$ на $\omega(\bar{f}, \alpha/n)_p$ при любом фиксированном $\alpha > 0$. Для этого в доказательстве нужны лишь очевидные изменения в выборе $\{n_k\}$.

1. *Бердышев В. И.* О теореме Джексона в L_p // Тр. Мат. ин-та АН СССР.– 1967.– 88. – С. 3–16.
2. *Давыдов О. В.* О точности неравенства Джексона для индивидуальных функций // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1469 – 1475.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
4. *Пичугов С. А.* Константа Юнга пространства L_p // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 5. – С. 604 – 614.
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. – М.: Наука, 1965. – 172 с.

Получено 04. 09. 91