УДК 519.21

В. И. Степахно, д-р физ. мат.-наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ЭМПИРИЧЕСКИЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР И МНОГОМЕРНЫЕ ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА

The action of an empiric correlation operator on the subspaces of Hermite vector polynomials of given degree is studied. The principal part of the operator is isolated.

Вивчається дія емпіричного кореляційного оператора на підпростори ермітових векторних поліномів заданого степеня і виділяється його головна частина.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые наблюдения m-мерного гауссовского случайного вектора со средним 0 и единичной корреляционной матрицей. Эмпирический корреляционный оператор A определяется равенством

$$Ax = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i, x)\xi_i, \quad x \in R^m. \tag{1}$$

Асимптотические свойства спектра оператора A при $n \to \infty$, $m \to \infty$, $m/n \to \gamma$ рассматривались в [1 – 3]. Здесь для более детального изучения асимптотических свойств оператора используются многомерные полиномы Эрмита [4, 5].

1. Обозначим через μ распределение ξ_i в R^m, плотность его через φ, совместное распределение $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в $(R^m)^n$ через μ^n; $L_2((R^m)^n, R^m, \mu^n)$ обозначает пространство симметричных интегрируемых с квадратом по мере μ^n функций из $(R^m)^n$ в R^m. Это пространство представимо в виде ортогональной суммы [4]

$$L_2((R^m)^n, R^m, \mu^n) = \bigoplus_{l=1}^{\infty} \mathcal{P}_l(n, 1). \tag{2}$$

Элементы $\mathcal{P}_l(n, 1)$ являются многочленами степени l, они и называются полиномами Эрмита. Элементарные полиномы (они векторнозначные) имеют вид

$$(a(x_1, \ldots, x_n), z) = \sum_{i_1, \ldots, i_N} (g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_N}), z) \tag{3}$$

(полином Эрмита с указанным старшим членом, его вид указан в теореме 2 из [4]), где

$$(g(x_1, \ldots, x_N), z) = (x_1, x_1)^{k_{11}} \ldots (x_i, x_j)^{k_{ij}} \ldots (x_N, x_N)^{k_{NN}} (x_s, z),$$
$$1 \le s \le N \tag{4}$$

(возможно $k_{ss} = 0$, $k_{si} = 0$, $k_{js} = 0$), $l = 1 + 2\sum k_{ij}$. Обозначим через $\hat{\mathcal{P}}_l(n)$ множество случайных векторов в R^m, имеющих вид $a(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где $a(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}_l(n, 1)$. Аналогично доказательству леммы 2 из [5] устанавливается следующая оценка.

Лемма 1. *Если a определяется формулой* (3), *где* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *определяется формулой* (4), *то существуют такие* C_1 *и* C_2, *что*

$$C_1 n^N m^{(l+1)/2} \le M\left|a(\xi_1, \ldots, \xi_n)\right|^2 \le C_2 n^N m^{(l+1)/2}.$$

Если $a(x_1, \ldots, x_n)$ задается формулой (3), через $A_2 a(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ обозначим случайный вектор $a_2 = a(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из $\hat{\mathcal{P}}_{l+2}(n)$, для которого

$$(a(x_1, \ldots, x_n), z) = \sum_{i_1, \ldots, i_N} (g_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_N}), z) + \sum_{i_1, \ldots, i_{N+1}} (g_2(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{N+1}}), z) \tag{5}$$

(здесь индексы i_k все различны), где

$$\begin{gathered}(g_1(x_1, \ldots, x_N), z) + \sum_{j=1}^{n} (g(x_1, \ldots, x_N), x_j)(x_j, z), \\ (g_2(x_1, \ldots, x_{N+1}), z) = (g(x_1, \ldots, x_N), x_{N+1})(x_{N+1}, z).\end{gathered} \tag{6}$$

2. Исследуем действие оператора A на подпространства $\hat{\mathcal{P}}_l(n)$. Обозначим через Q_l оператор проектирования на $\hat{\mathcal{P}}_l$.

Теорема 1. *Пусть $a(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}_l(n, 1)$. Тогда*

$$Aa = Q_{l+2}Aa + Q_l Aa + Q_{l-2}Aa, \tag{7}$$

при этом

$$Q_{l+2}A = A_2, \tag{8}$$

$$Q_l Aa = Q_l\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial \xi_i}\xi_i + a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{Sp}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\right)\xi_i\right), \tag{9}$$

$$Q_{l-2}Aa = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\operatorname{Sp}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\right). \tag{10}$$

Доказательство теоремы основывается на следующих двух леммах.

Лемма 2. *Для $a(x_1, \ldots, x_n)$ в условиях теоремы*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a, x_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp}\frac{\partial a}{\partial x_i} \tag{11}$$

есть числовой полином Эрмита из $\mathcal{P}_{l+1}(n, 0)$.

Доказательство заключается в проверке того, что выражение (11) представимо в виде

$$\sum \left\{(\nabla_{i_1}, \nabla_{i_1})^{k_{11}} \ldots (\nabla_{i_\alpha}, \nabla_{i_\beta})^{k_{\alpha\beta}} \ldots (\nabla_{i_N}, \nabla_{i_N})^{k_{NN}} (\nabla_{i_s}, \nabla_{i_N}) \prod_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\right\} \prod_{j=1}^{n} \varphi^{-1}(x_j),$$

а затем в применении теоремы 2 из [4].

Лемма 3. *Пусть α — числовой полином Эрмита степени l. Тогда*

$$\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n)\xi_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

является векторным полиномом Эрмита.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Следствие. Оператор A *переводит* $\hat{\mathcal{P}}_l(n)$ *в* $\hat{\mathcal{P}}_{l-2}(n) \oplus \hat{\mathcal{P}}_l(n) \oplus \hat{\mathcal{P}}_{l+2}(n)$.

Оценим для $a \in \hat{\mathcal{P}}_l(n)$ $Q_{l+2}Aa$ и $Q_{l-2}Aa$.

Лемма 4. *Пусть* $a = a(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *где* a *определяется формулами* (3), (4). *Тогда*

$$M \mid Q_{l+2}Aa \mid^2 \le Cn^{N-1}m^{(l+1)/2}, \tag{12}$$

$$M \mid Q_{l-2}Aa \mid^2 \le Cn^{N-2}m^{(l+1)/2}. \tag{13}$$

Доказательство. Легко видеть, что $Q_{l+2}Aa = (1/n)a_2$, где a_2 определяется формулами (5), (6). Степень обоих слагаемых в (5) равна $l+2$, число переменных в главном члене $N-1$, значит, оценка (12) получается из леммы 1. Для доказательства (13) заметим, что $\operatorname{Sp}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_1} = m$. Поэтому $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} \operatorname{Sp} \dfrac{\partial a}{\partial \xi_i}$ имеет степень $l-2$, число переменных в старшем члене не превышает N и коэффициент при нем имеет вид $O(m/n)$. И оценка (13) опять получается из леммы 1.

***Замечания.* 1.** Используя то, что $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial a}{\partial \xi_i}\xi_i$ и $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{Sp}\dfrac{\partial a}{\partial \xi_i}\right)\xi_i$ имеют положительные коэффициенты при старших членах, и лемму 2 из [5], можем убедиться, что

$$M \mid Q_l Aa \mid^2 \ge M \mid a \mid^2 \ge C_2 n^N m^{(l-1)/2}.$$

Если m/n ограничено и для всех j $k_j = \sum_i (k_{ij} + k_{ji}) = 2$, то $M \mid Q_{l-2}Aa \mid^2 = o(M \mid Q_l Aa \mid^2)$.

2. Пусть

$$a_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum g_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_N}).$$

Тогда

$$M \mid (1/n)a_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid^2 \le C_2 n^{N-2} m^{(l+1)/2} = o(M \mid Q_l Aa \mid^2 + M \mid Q_{l+2}Aa \mid^2).$$

Используя эти замечания, можем выделить "главную" часть (при $m, n \to \infty$ и ограниченном m/n) оператора.

Положим для вектора $a \in \hat{\mathcal{P}}_l(n)$ вида $\sum\limits_{i_1, \ldots, i_N} g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_N})$

$$A^0 a = \frac{1}{n} \sum_{i_1, \ldots, i_N} g(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_N})(\xi_{i_s}, \xi_{i_{N+1}})\xi_{i_{N+1}}.$$

Этот оператор переводит $\hat{\mathcal{P}}_l(n)$ в $\hat{\mathcal{P}}_{l+2}(n)$, при этом число переменных в старшем члене увеличивается на 1. Из замечания 1 вытекает

$$M \mid A^0 a - Q_{l+2}Aa \mid^2 = o(M \mid Q_{l+2}Aa \mid^2).$$

Рассмотрим, наконец, оператор $\tilde{A}$, определяемый равенством $\tilde{A}a = Q_l Aa$, $a \in \hat{\mathcal{P}}_l(n)$. Очевидно,

$$\tilde{A}a = Q_l\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\xi_i + a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Sp}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\right)\xi_i\right).$$

Лемма 5. *Для* $a \in \hat{\mathcal{P}}_l(n)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\xi_i = \frac{l}{n}a.$$

Доказательство. Пусть $a = a(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где a определяется формулой (3), (4). Тогда при $i \le N$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \theta(x_1, \ldots, x_N)\left[\delta_{is}I + \sum_{j=1}^{N}(k_{ij} + k_{ji})\frac{\langle x_j \circ x_s\rangle}{(x_i, x_j)}\right], \tag{14}$$

где $\theta(x_1, \ldots, x_N) = \prod\limits_{1 \le i \le j \le N}(x_i, x_j)^{k_{ij}}$, $\langle a \circ b\rangle$, $a, b \in R^m$, — оператор в R^m, для которого $\langle a \circ b\rangle x = (a, x)b$. Поэтому

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}x_i = \theta(x_1, \ldots, x_N)\left[\delta_{is}x_i + \sum_{j=1}^{N}(k_{ij} + k_{ji})x_s\right] =$$

$$= \theta(x_1, \ldots, x_N)\left[\delta_{is} + \sum_{j=1}^{N}(k_{ij} + k_{ji})\right]x_s,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}x_i = l\theta(x_1, \ldots, x_N)x_s.$$

Отсюда и вытекает доказательство леммы.

Лемма 6. *При* $l/n \to 0$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Sp}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\right)\xi_i = \frac{m}{n}a + o(\|a\|).$$

Доказательство. Из (14) вытекает

$$\mathrm{Sp}\frac{\partial g}{\partial x_i} = \theta(x_1, \ldots, x_N)\left[\delta_{is}m + \sum_{j=1}^{N}(k_{ij} + k_{ji})\frac{(x_j, x_s)}{(x_i, x_j)}\right].$$

Положим $\dfrac{\theta(x_1, \ldots, x_N)}{(x_i, x_j)}(x_j, x_s) = \theta_{ij}(x_1, \ldots, x_N)$. Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Sp}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\right)\xi_i = \frac{m}{n}a +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i_1, \ldots, i_N}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}(k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha})\theta_{\alpha\beta}\left(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_N}\right)\xi_{i_\alpha}.$$

Используя лемму 1 убеждаемся, что

$$M\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Sp}\frac{\partial a}{\partial \xi_i}\right)-\frac{m}{n}a\right|^2 = O\left(\sum k_{\alpha\beta}^2 n^{N-2} m^{(l+1)/2}\right).$$

Отсюда и следует доказательство леммы.

Введем оператор A^{0*}, сопряженный к A^0. Он переводит подпространство $\hat{\mathcal{P}}_l(n)$ на $\hat{\mathcal{P}}_{l-2}(n)$ по следующему правилу: если для a в представлении (3), (4) $\sum(k_{is}+k_{si})=1$, т. е. $a=\sum_{i=1}^{n}(b_i,\xi_i)\xi_i$, где b_i не зависит от ξ_i, то $A^{0*}a = =\sum_{i=1}^{n} b_i$, а если a вида (3), (4) такого представления не допускает, то $A^{0*}a=0$.

В силу изложенного справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* l_n *таково, что* $l_n^2/n\to 0$, m/n *ограничено. Тогда для* $a\in \bigoplus_{i=1}^{l_n}\hat{\mathcal{P}}_i(n)$

$$\left\| Aa - A^0a - A^{0*}a - \left(1+\frac{m}{n}\right)a \right\| = o(\|a\|).$$

Таким образом, на указанном подпространстве оператор $A^0 + A^{0*} + \left(1+\dfrac{m}{n}\right)I$ *является "главной" частью оператора* A.

1. *Yin Y. Q., Bai Z. D., Krishnaiah P. R.* On limit of the largest eigenvalue of the large dimensional sample covariance matrix // Jech. Rep. – 1984. – № 84 – 44. – P. 14.
2. *Yin Y. Q., Bai Z. D., Krishnaiah P. R.* On limit of the largest eigenvalue of the large dimensional sample covariance matrix // Probab. Theory and Related Fields. – 1988. – **78**, № 4. – P. 509 – 521.
3. *Yin Y. Q., Krishnaiah P. R.* Limit theorem for the eigenvalues of the sample covariance matrix when the underlying distribution is isotropic // Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – **30**, № 4. – С. 810 – 816.
4. *Скороход А. В., Степахно В. И.* Об одном обобщении полиномов Эрмита // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1524 – 1528.
5. *Скороход А. В., Степахно В. И.* Центральная предельная теорема для полиномов Эрмита от независимых гауссовых величин // Там же. – № 12. – С. 1681 – 1686.

Получено 16. 05. 91