УДК 517.98

А. А. Ковалевский, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О G-СХОДИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧЕЙ ДИРИХЛЕ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ*

A notion of G-convergence of operators A_s: $W_s \to W_s^*$ to the operator $A: W \to W^*$ is introduced and studied under certain connection conditions for the Banach spaces W_s, $s = 1, 2, \ldots$, and the Banach space W. It has been established that the connection conditions for abstract space are satisfied by the Sobolev spaces $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ ($\{\Omega_s\}$ is a sequence of perforated domains contained in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Hence, the results obtained for abstract operators can be applied to the operators of Dirichlet problems in the domains Ω_s.

При певних умовах зв'язку банахових просторів W_s, $s = 1, 2, \ldots$, з банаховим простором W вводиться і вивчається поняття G-збіжності операторів A_s: $W_s \to W_s^*$ до оператора $A: W \to W^*$. Встановлюється, що розглядувані умови зв'язку абстрактних просторів задовольняють соболевські простори $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ ($\{\Omega_s\}$ — послідовність перфорованих областей, що містяться в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$), внаслідок чого результати, одержані для абстрактних операторів, можна перенести на оператори задачі Діріхле в областях Ω_s.

К настоящему времени имеется достаточно большое число исследований по вопросу о сходимости решений задач Дирихле для эллиптических уравнений в переменных (в частности, перфорированных) областях. Для линейных уравнений, в том числе высшего порядка, этот вопрос подробно рассмотрен в [1, 2]. Вариационный подход к изучению асимптотики решений задач Дирихле в переменных областях, предложенный в работе [2], развивался в [3] применительно к квазилинейным вариационным уравнениям второго порядка. Сходимость решений задач Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений дивергентного вида второго порядка в последовательности перфорированных областей исследована в работах [4–7]. Развитые в них методы усреднения задач Дирихле использовались в [8, 9] для квазилинейных уравнений произвольного порядка с линейной главной частью. Вместе с тем не были получены какие-либо результаты относительно задачи Дирихле в переменных областях для квазилинейных эллиптических уравнений общего дивергентного вида произвольного порядка. Отчасти этот пробел устраняется в данной работе, связанной в отличие от указанных работ, с идеей G-сходимости операторов.

Статья состоит из двух пунктов. В п. 1 при определенных условиях связи банаховых пространств W_s, $s = 1, 2, \ldots$, с банаховым пространством W вводится и изучается понятие G-сходимости операторов $A_s: W_s \to W_s^*$ к оператору $A: W \to W^*$. Для последовательности равномерно монотонных операторов A_s: $W_s \to W_s^*$ доказывается теорема о выборе G-сходящейся подпоследовательности, описывается связь G-сходимости со сходимостью решений операторных уравнений и вариационных неравенств. В п. 2 устанавливается, что введенным в первом пункте условиям связи абстрактных пространств удовлетворяют соболевские пространства $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ ($\{\Omega_s\}$ — последовательность перфорированных областей, содержащихся в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$), вследствие чего результаты, полученные для абстрактных операторов, могут быть перенесены на операторы задачи Дирихле в областях Ω_s.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

1. G-сходимость абстрактных операторов. Исходные предположения таковы: для любого $s \in \mathbb{N}$ W_s — вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_s$; если $s \in \mathbb{N}$, то θ_s — нуль в W_s, W_s^* — пространство, сопряженное с W_s, $\|\cdot\|_{*,s}$ — норма в W_s^*; W — вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, θ — нуль в W, W^* — пространство, сопряженное с W, $\|\cdot\|_*$ — норма в W^*, $\kappa, \nu \geq 1$; для любого $s \in \mathbb{N}$ p_s — линейное отображение W_s в W; выполняются следующие условия:

I. Если $s \in \mathbb{N}, u \in W_s$, то $\kappa^{-1}\| u \|_s \leq \| p_s u \| \leq \kappa \| u \|_s$.

II. Если $u \in W$, то существует последовательность $u_s \in W_s$ такая, что $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \| u_s \|_s \leq \nu \| u \|$ и $p_s u_s \to u$ слабо в W.

Используя условие I, устанавливаем следующее:

III. Если $f \in W^*, s \in \mathbb{N}$, то $\| f \circ p_s \|_{*,s} \leq \kappa \| f \|_*$.

Используя условие II, покажем, что для любого $f \in W^*$

$$\underline{\lim\limits_{s\to\infty}} \|f \circ p_s\|_{*,s} \geq \nu^{-1} \|f\|_*. \tag{1}$$

Действительно, пусть $f \in W^*$. Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$ и пусть $u \in W$, $\| u \| \leq 1$, причем

$$\|f\|_* \leq \langle f, u\rangle + t^{-1}. \tag{2}$$

В силу условия II существует последовательность $u_s \in W_s$ такая, что $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \| u_s \|_s \leq \nu$ и $p_s u_s \to u$ слабо в W. Тогда $\langle f, u\rangle \leq \nu \underline{\lim\limits_{s\to\infty}} \|f \circ p_s\|_{*,s}$. Отсюда и из (2) следует

$$\underline{\lim\limits_{s\to\infty}} \|f \circ p_s\|_{*,s} \geq \nu^{-1}(\|f\|_* - t^{-1}).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to \infty$, получаем (1).

Определение. *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ A_s — обратимый оператор из W_s в W_s^*, A — обратимый оператор из W в W^*. Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A, если для любого $f \in W^*$ $p_s A_s^{-1}(f \circ p_s) \to A^{-1} f$ слабо в W.*

Данное определение является аналогом определения G-сходимости операторов с единой областью задания [10].

Далее получим ряд результатов о G-сходимости для некоторой последовательности монотонных, вообще говоря, нелинейных операторов.

Пусть $m > 1$, $m' = m/(m-1)$, $0 < m_1 \leq \min(m, m')$, $m_2 \geq \max(m, 2)$, $\lambda \geq 1$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ A_s — оператор из W_s в W_s^*, причем для любых $s \in \mathbb{N}$ u, $v \in W_s$

$$\| A_s \theta_s \|_{*,s} = 0, \tag{3}$$

$$\| A_s u - A_s v \|_{*,s}^{m'} \leq \lambda(1 + \| u \|_s + \| v \|_s)^{m-m_1} \| u - v \|_s^{m_1}, \tag{4}$$

$$\langle A_s u - A_s v,\ u - v\rangle \geq \lambda^{-1}(1 + \| u \|_s + \| v \|_s)^{m-m_2} \| u - v \|_s^{m_2}. \tag{5}$$

Положим $\mu = 2^{m_2}\lambda$. Из соотношений (3) – (5) вытекает, что для любых $s \in$

$\in \mathbb{N}$ и $u \in W_s$

$$\| A_s u \|_{*,s}^{m'} \le \mu(\| u \|_s^m + 1), \tag{6}$$

$$\langle A_s u, u \rangle \ge \mu^{-1}(\| u \|_s^m - 1). \tag{7}$$

В силу неравенств (4) – (7) операторы A_s обратимы [11]. Используя (7) и неравенство Юнга, устанавливаем, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $f \in W_s^*$

$$\| A_s^{-1} f \|_s^m \le \mu^{m'} \| f \|_{*,s}^{m'} + m'. \tag{8}$$

Отсюда и из (5) выводим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $f, g \in W_s^*$

$$\| A_s^{-1} f - A_s^{-1} g \|_s \le m' \mu^{m'} (1 + \| f \|_{*,s} + \| g \|_{*,s})^{1/(m-1)} \| f - g \|_{*,s}^{1/(m_2 - 1)}. \tag{9}$$

Установим один вспомогательный результат, который будет использован при доказательстве теоремы о выборе из последовательности $\{A_s\}$ G-сходящейся подпоследовательности. Положим

$$\lambda_0 = (\kappa \nu \mu)^{(2m+5)m' m_2}, \ m_0 = m' m_1 (m' m_2 - m_1)^{-1}.$$

Предложение 1. *Пусть* $\{s_t\}$ *— возрастающая последовательность из* $\mathbb{N}$, B *— оператор из* W^* *в* W *и выполняется условие*:

$$\forall f \in W^* \ p_{s_t} A_{s_t}^{-1} (f \circ p_{s_t}) \to Bf \ \textit{слабо в} \ W. \tag{10}$$

Тогда оператор B *обратим,* $\| B^{-1} \theta \|_* = 0$ *и для любых* $f, g \in W^*$

$$\| f - g \|_*^{m'} \le \lambda_0 (1 + \| Bf \| + \| Bg \|)^{m - m_0} \| Bf - Bg \|^{m_0}, \tag{11}$$

$$\langle f - g, Bf - Bg \rangle \ge \lambda_0^{-1} (1 + \| Bf \| + \| Bg \|)^{m - m_2} \| Bf - Bg \|^{m_2}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $f, g \in W^*$. Применяя к $f \circ p_s$ и $g \circ p_s$ неравенство (9), затем используя условия I, III и (10), получаем

$$\| Bf - Bg \| \le m' \kappa (\kappa \mu)^{m'} (1 + \| f \|_* + \| g \|_*)^{1/(m-1)} \| f - g \|_*^{1/(m_2 - 1)}. \tag{13}$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1}(f \circ p_s)$, $v_s = A_s^{-1}(g \circ p_s)$. Из (4) и (5) вытекает, что для произвольного $s \in \mathbb{N}$

$$\| (f - g) \circ p_s \|_{*,s}^{m' m_2 / m_1} \le \lambda^{1 + m_2 / m_1} (1 + \| u_s \|_s +$$

$$+ \| v_s \|_s)^{m(m_2 / m_1 - 1)} \langle f - g, p_s u_s - p_s v_s \rangle.$$

Отсюда, используя (8), (1) и условия III и (10), имеем

$$\| f - g \|_*^{m''} \le (\kappa \nu \mu^3)^{m''} (1 + \| f \|_* + \| g \|_*)^{m'' - m'} \langle f - g, Bf - Bg \rangle, \tag{14}$$

где $m'' = m' m_2 / m_1$.

Оценим сверху $\| f \|_*$ через $\| Bf \|$. Из неравенств (6) и (7) следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $\| f \circ p_s \|_{*,s}^{m'} \le \mu^2 \langle f, p_s u_s \rangle + 2\mu$. Отсюда, используя (1) и условие (10), выводим $\| f \|_*^{m'} \le \mu^2 \nu^{m'} \langle f, Bf \rangle + 2\mu \nu^{m'}$. Из последнего неравенства, оценивая первое слагаемое в его правой части надлежащим образом с помощью неравенства Юнга, получаем

$$\| f \|_* \le \nu^m \mu^{2(m-1)} \| Bf \|^{m-1} + 2m \nu \mu. \tag{15}$$

Используя это неравенство и аналогичное неравенство для g, из (14) выводим неравенство (11).

Далее, в силу (5), (8), условий I и III для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\| p_s u_s - p_s v_s \|^{m_2} \le (\kappa\mu^2)^{m' m_2} (1 + \|f\|_* + \|g\|_*)^{(m_2-m)/(m-1)} \langle f - g, p_s u_s - p_s v_s \rangle.$$

Отсюда, используя условие (10), получаем

$$\| Bf - Bg \|^{m_2} \le (\kappa\mu^2)^{m' m_2} (1 + \|f\|_* + \|g\|_*)^{(m_2-m)/(m-1)} \langle f - g, Bf - Bg \rangle.$$

Из этого неравенства, неравенства (15) и аналогичного неравенства для g следует (12).

Итак, для любых $f, g \in W^*$ справедливы неравенства (11) и (12). Попутно установлены неравенства (13) и (14), из которых вытекает обратимость оператора B. Обозначая через θ_* нуль в W^* и полагая для любого $s \in \mathbb{N}$ $w_s = p_s A_s^{-1} (\theta_* \circ p_s)$, в силу условия (10) имеем $w_{s_t} \to B\theta_*$ слабо в W и, следовательно, $\| B\theta_* \| \le \varliminf_{t\to\infty} \| w_{s_t} \|$. Это неравенство и равенство (3) позволяют заключить, что $B\theta_* = \theta$. Отсюда получаем $\| B^{-1}\theta \|_* = 0$. Предложение доказано.

***Замечание* 1.** Из предложения 1 вытекает, что если последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A\colon W \to W^*$, то $\| A\theta \|_* = 0$ и для любых $u, v \in W$

$$\| Au - Av \|_*^{m'} \le \lambda_0 (1 + \| u \| + \| v \|)^{m-m_0} \| u - v \|^{m_0}, \tag{16}$$

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \ge \lambda_0^{-1} (1 + \| u \| + \| v \|)^{m-m_2} \| u - v \|^{m_2}. \tag{17}$$

Теорема 1. *Из последовательности $\{A_s\}$ можно извлечь подпоследовательность, G-сходящуюся к обратимому оператору $A\colon W \to W^*$, удовлетворяющему равенству $\| A\theta_* \| = \theta$ и при любых $u, v \in W$ неравенствам* (16), (17).

Доказательство. Положим для любых $f \in W^*$ и $s \in \mathbb{N}$ $u_s^f = p_s A_s^{-1} (f \circ p_s)$. В силу (8), (9), условий I, III для произвольных $f, g \in W^*$ и $s \in \mathbb{N}$

$$\| u_s^f \| \le m' (\kappa\mu)^{m'} (1 + \|f\|_*)^{1/(m-1)}, \tag{18}$$

$$\| u_s^f - u_s^g \| \le m' \kappa (\kappa\mu)^{m'} (1 + \|f\|_* + \|g\|_*)^{1/(m-1)} \|f - g\|_*^{1/(m_2-1)}. \tag{19}$$

Пусть H — счетное всюду плотное множество в W^*. В силу (18) и рефлексивности W существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbb{N}$ и оператор $B_0\colon H \to W$ такие, что

$$\forall f \in H \; u_{s_t}^f \to B_0 f \text{ слабо в } W. \tag{20}$$

Из (19), (20) вытекает, что для любых $f, g \in H$

$$\| B_0 f - B_0 g \| \le M(f, g), \tag{21}$$

где $M(f, g)$ — правая часть неравенства (19). Тогда если $f \in W^*$, $\{f_i\} \subset H$, $f_i \to f$ сильно в W^*, то последовательность $\{B_0 f_i\}$ сильно сходится в W к некоторому элементу, причем этот элемент в силу (21) не зависит от самого выбора последовательности $\{f_i\} \subset H$, сильно сходящейся к f в W^*. Поэтому можно определить оператор B из W^* в W, полагая для любого $f \in W^*$ $Bf = \lim_{i\to\infty} B_0 f_i$, где $\{f_i\} \subset H$, $f_i \to f$ сильно в W^*. Ясно, что B является продолжением оператора B_0. С помощью (19) и (20) устанавливаем, что

$$\forall f \in W^* \ u^f_{s_t} \to Bf \ \text{ слабо в } W. \tag{22}$$

Тогда согласно предложению 1 оператор B обратим, $\| B^{-1}\theta \|_* = 0$ и для любых $f, g \in W^*$ справедливы неравенства (11), (12). Положим $A = B^{-1}$. Тогда A — обратимый оператор из W в W^*, $A^{-1} = B$ и в силу (22) последовательность $\{A_{s_t}\}$ G-сходится к оператору A. Ясно, что $\| A\theta \|_* = 0$. Наконец, взяв произвольные $u, v \in W$ и подставив в (11), (12) $f = Au$, $g = Av$, получим неравенства (16), (17). Теорема доказана.

Покажем, что G-сходимость операторов A_s сопровождается сходимостью решений соответствующих операторных уравнений и вариационных неравенств.

Теорема 2. *Пусть A — обратимый оператор из W в W^* и последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in W^*_s$, $f \in W^*$ и*

$$\lim_{s \to \infty} \| f_s - f \circ p_s \|_{*,\, s} = 0. \tag{23}$$

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1} f_s$, $u = A^{-1} f$. Тогда $p_s u_s \to u$ слабо в W.

Доказательство. В силу (23) и условия III последовательность норм $\| f_s \|_{*,\, s}$ ограничена. Отсюда и из (8) вытекает ограниченность последовательности норм $\| u_s \|_s$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s = A_s^{-1}(f \circ p_s)$. В силу (8) и условия III последовательность норм $\| v_s \|_s$ ограничена. Пусть τ — мажоранта последовательности чисел $1 + \| u_s \|_s + \| v_s \|_s$. Используя неравенство (5), для любого $s \in \mathbb{N}$ получаем $\| u_s - v_s \|_s^{m_2} \le \lambda \tau^{m_2} \| f_s - f \circ p_s \|_{*,\, s}$. Отсюда и из (23) следует $\lim\limits_{s \to \infty} \| u_s - v_s \|_s = 0$. Это равенство, условие I и слабая сходимость $\{p_s v_s\}$ к u, имеющая место ввиду G-сходимости $\{A_s\}$ к A, позволяют заключить, что $p_s u_s \to u$ слабо в W. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть A — обратимый оператор из W в W^* и последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ T_s — оператор из W_s в W^*_s, T — оператор из W в W^*, причем выполняется условие*

а) если для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s \in W_s$, $v \in W$ и $p_s v_s \to v$ слабо в W, то $\lim\limits_{s \to \infty} \| T_s v_s - (Tv) \circ p_s \|_{*,\, s} = 0$.

Пусть, далее, для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in W^*_s$, $f \in W^*$ и справедливо равенство (23). Пусть, наконец, для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W_s$, $A_s u_s + T_s u_s = f_s$, $u \in W$ и $p_s u_s \to u$ слабо в W. Тогда $Au + Tu = f$.

Доказательство. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $g_s = f_s - T_s u_s$, $g = f - Tu$, $v = A^{-1} g$. Используя равенство (23) и условие *а)* теоремы 3, получаем $\lim\limits_{s \to \infty} \| g_s - g \circ p_s \|_{*,\, s} = 0$. Тогда по теореме 2 $p_s u_s \to v$ слабо в W. Но по условию доказываемой теоремы $p_s u_s \to u$ слабо в W. Следовательно, $u = v = A^{-1} g$. Отсюда получаем равенство $Au + Tu = f$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть A — обратимый оператор из W в W^* и последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ V_s —*

непустое множество в W_s, V — *непустое множество в* W, *причем выполняются условия*:

1) *если для любого* $s \in \mathbb{N}$ $v_s \in W_s$, $v \in W$, $p_s v_s \to v$ *слабо в* W, N_1 — *бесконечное подмножество* $\mathbb{N}$ *и* $\forall s \in N_1$ $v_s \in V_s$, *то* $v \in V$;

2) *если* $v \in V$, *то существует последовательность* $v_s \in V_s$ *такая, что* $\lim\limits_{s\to\infty} \| v_s - A_s^{-1}((Av) \circ p_s) \|_s = 0$.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in W_s^*$, $f \in W^*$ *и справедливо равенство* (23); $\forall s \in \mathbb{N}$ $u_s \in V_s$;

$$\forall s \in \mathbb{N} \ \ \forall v \in V_s \ \ \langle A_s u_s - f_s,\ v - u_s \rangle \geq 0. \tag{24}$$

Тогда существует элемент $u \in V$ *такой, что*

а) $\forall v \in V$ $\langle Au - f,\ v - u \rangle \geq 0$;

б) $p_s u_s \to u$ *слабо в* W;

в) $\lim\limits_{s\to\infty} \| A_s u_s - - (Au) \circ p_s \|_{*,\,s} = 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательность норм $\| u_s \|_s$ ограничена. Действительно, в силу условий 2 теоремы 4, (8) и условия III существует последовательность $y_s \in V_s$ такая, что $\sup\limits_s \| y_s \|_s < \infty$. Согласно (24) для любого $s \in \mathbb{N}$ $\langle A_s u_s - f_s,\ y_s - u_s \rangle \geq 0$. Отсюда с учетом ограниченности последовательностей $\{\| f_s \|_{*,\,s}\}$, $\{\| y_s \|_s\}$, неравенств (6) и (7), следует, что последовательность норм $\| u_s \|_s$ ограничена. Тогда, учитывая условие I, получаем: существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbb{N}$ и $u \in W$ такие, что $p_{s_t} u_{s_t} \to u$ слабо в W. Отсюда и из условия 1 теоремы 4 вытекает, что $u \in V$. Положим для любого $s \subset \mathbb{N}$ $w_s = A_s^{-1}((Au) \circ p_s)$. В силу G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A $p_s w_s \to u$ слабо в W, а в силу условия 2 теоремы 4 существует последовательность $\overline{w}_s \in V_s$ такая, что

$$\lim_{s\to\infty} \| \overline{w}_s - w_s \|_s = 0. \tag{25}$$

Пусть τ — мажоранта последовательности чисел $\| u_s \|_s + \| w_s \|_s + \| f_s \|_{*,\,s} + \| A_s u_s \|_{*,\,s}$. Используя (5), (24) и включения $\overline{w}_s \in V_s$, получаем, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\| u_s - w_s \|_s^{m_2} \leq \lambda\,(1 + \tau)^{m_2}\,[\tau \,\| \overline{w}_s - w_s \|_s + \tau \,\| f_s - f \circ p_s \|_{*,s} + \langle f - Au,\ p_s u_s - p_s w_s \rangle]. \tag{26}$$

Отсюда в силу (23), (25) и слабой сходимости последовательностей $\{p_{s_t} u_{s_t}\}$, $\{p_s w_s\}$ к u в W вытекает $\lim\limits_{t\to\infty} \| u_{s_t} - w_{s_t} \|_{s_t} = 0$. Тогда, учитывая (4), получаем

$$\lim_{t\to\infty} \| A_{s_t} u_{s_t} - A_{s_t} w_{s_t} \|_{*,\,s_t} = 0. \tag{27}$$

Перейдем к непосредственному доказательству предложений а) — в) заключения теоремы. Пусть v — произвольный элемент из V. Из условия 2 теоремы 4, а также условия I и G-сходимости $\{A_s\}$ к A следует, что существует последовательность $v_s \in V_s$ такая, что $p_s v_s \to v$ слабо в W и $\tau_1 = \sup\limits_s \| v_s \|_s < \infty$.

Используя (24) и включения $v_s \in V_s$, получаем, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\langle Au-f,\ v-u\rangle \geq -(\tau+\tau_1)\{\| A_s u_s - A_s w_s \|_{*,s} + \| f_s - f \circ p_s \|_{*,s}\} +$$
$$+ \langle Au-f,\ p_s u_s - u\rangle + \langle f-Au,\ p_s v_s - v\rangle.$$

Отсюда, учитывая (23), (27) и слабую сходимость последовательностей $\{p_{s_i} u_{s_i}\}$, $\{p_s v_s\}$ соответственно к u, v, получаем неравенство $\langle Au-f,\ v-u\rangle \geq 0$ и тем самым предложение а) доказано.

Покажем справедливость предложения б). Предположим, что последовательность $\{p_s u_s\}$ не сходится слабо к u в W. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s'_i\} \subset \mathbb{N}$ и $u' \in W$ такие, что $p_{s'_i} u_{s'_i} \to u'$ слабо в W и $u' \neq u$. Аналогично тому, как доказано выше для u, имеем $u' \in V$ и $\forall v \in V$ $\langle Au'-f,\ v-u'\rangle \geq 0$. Отсюда и из предложения а) следует, что $\langle Au - Au',\ u-u'\rangle \leq 0$. Из этого неравенства и неравенства (17) выводим равенство $u' = u$, которое противоречит неравенству $u' \neq u$. Полученное противоречие доказывает, что $p_s u_s \to u$ слабо в W и тем самым предложение б) доказано.

Остается показать справедливость предложения в). Из (26), (23), (25) и слабой сходимости последовательностей $\{p_s u_s\}$, $\{p_s w_s\}$ к u следует $\| u_s - w_s \|_s \to 0$. Отсюда и из (4), учитывая равенство $A_s w_s = (Au) \circ p_s$, получаем $\| A_s u_s - (Au) \circ p_s \|_{*,s} \to 0$. Значит, предложение в) справедливо. Теорема доказана.

В заключение пункта получим два результата для операторов $A_s\colon W_s \to W_s^*$ специального вида.

Пусть $\lambda_1 \geq 1$, A — оператор из W в W^* такой, что $\| A\theta \|_* = 0$, и для любых $u, v \in W$

$$\| Au - Av \|_*^{m'} \leq \lambda_1 (1 + \| u \| + \| v \|)^{m-m_1} \| u - v \|^{m_1}, \tag{28}$$

$$\langle Au - Av,\ u - v\rangle \geq \lambda_1^{-1}(1 + \| u \| + \| v \|)^{m-m_2} \| u - v \|^{m_2}. \tag{29}$$

Ясно, что оператор A обратим. Определим операторы A_s следующим образом: если $s \in \mathbb{N}$, то A_s — оператор из W_s в W_s^* такой, что для любого $u \in W_s$

$$A_s u = (A(p_s u)) \circ p_s. \tag{30}$$

Операторы A_s обратимы. Это вытекает из того, что в силу равенства $\| A\theta \|_* = 0$, неравенств (28), (29) и условия I операторы A_s удовлетворяют соотношениям (3) – (5), причем $\lambda = \lambda_1 \kappa^{m m' m_2}$.

Предложение 2. *Пусть для любого $u \in W$ существует последовательность $u_s \in W_s$ такая, что $\| p_s u_s - u \| \to 0$. Тогда последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $f \in W^*$ и положим $u = A^{-1}f$, $\forall s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1}(f \circ p_s)$. Ясно, что последовательность норм $\| u_s \|_s$ ограничена. Отсюда, учитывая условие I, получаем, что последовательность $\{p_s u_s\}$ ограничена в W. Предположим, что эта последовательность не сходится слабо к u в W. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_i\} \subset \mathbb{N}$ и $w \in W$ такие, что $p_{s_i} u_{s_i} \to w$ слабо в W и $w \neq u$. По условию предложения найдется последовательность $w_s \in W_s$, для которой

$$\lim_{s\to\infty} \| p_s w_s - w \| = 0. \tag{31}$$

Пусть τ — мажоранта последовательности чисел $1 + \| u_s \|_s + \| w_s \|_s$. Используя неравенство (5) и условие I, находим, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\| u_s - w_s \|_s^{m_2} \le \lambda \tau^{m_2} \{ \langle f - Aw,\ p_s u_s - p_s w_s \rangle + \kappa\tau \| A(p_s w_s) - Aw \|_* \}.$$

Из этого неравенства, учитывая слабую сходимость $\{p_{s_t} u_{s_t}\}$ к w и (31), (28), получаем $\| u_{s_t} - w_{s_t} \|_{s_t} \to 0$. Отсюда с учетом условия I и (31) следует

$$\lim_{t\to\infty} \| p_{s_t} u_{s_t} - w \| = 0. \tag{32}$$

Пусть теперь $v \in W$. По условию предложения существует последовательность $v_s \in W_s$ такая, что

$$\lim_{s\to\infty} \| p_s v_s - v \| = 0. \tag{33}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle Au,\ v \rangle = \langle A(p_s u_s),\ p_s v_s \rangle - \langle Au,\ p_s v_s - v \rangle.$$

Отсюда и из (32), (33) и (28) находим $\langle Au,\ v \rangle = \langle Aw,\ v \rangle$. А так как здесь v — произвольный элемент из W, то $Au = Aw$. Следовательно, $w = u$, что противоречит неравенству $w \ne u$. Полученное противоречие доказывает, что $p_s u_s \to u$ слабо в W. Это позволяет сделать вывод о G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть $\sigma > 0$, A — самосопряженный линейный непрерывный оператор из W в W^* такой, что*

$$\forall u \in W \ \ \langle Au,\ u \rangle \ge \sigma \| u \|^2; \tag{34}$$

для любого $s \in \mathbb{N}$ A_s — оператор из W_s в W_s^*, определенный по A формулой (30). *Тогда для G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

а) если $u \in W$, то существует последовательность $u_s \in W_s$ такая, что $\| p_s u_s - u \| \to 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору A. Возьмем $u \in W$ и положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1}((Au) \circ p_s)$. В силу самосопряженности оператора A и (30), (34) имеем $\forall s \in \mathbb{N}$ $\sigma \| p_s u_s - u \|^2 \le -\langle Au,\ p_s u_s - u \rangle$. Отсюда, учитывая, что ввиду G-сходимости $\{A_s\}$ к A $p_s u_s \to u$ слабо в W, получаем $\| p_s u_s - u \| \to 0$ и, следовательно, условие а) предложения 3 выполняется. Тем самым необходимость установлена.

Достаточность выполнения условия а) для G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A вытекает из предложения 2.

2. О G-сходимости операторов, определенных на пространствах $\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω. Будем предполагать, что существуют конечные множества J_s, $s \in \mathbb{N}$, точки $x_s^j \in \Omega$ и числа $r_s^j > 0$, $s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$, такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} B(x_s^j, r_s^j), \tag{35}$$

где $B(x_s^j, r_s^j)$ — замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j. Обозначим для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ через ρ_s^j расстояние от $B(x_s^j, r_s^j)$ до множества

$$\bigcup_{J_s \ni i \neq j} B(x_s^i, r_s^i) \cup \partial\Omega.$$

Будем предполагать, что

$$\lim_{s \to \infty} \max_{j \in J_s} \rho_s^j = 0 \tag{36}$$

и существует постоянная $\nu_1 \geq 1$ такая, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \forall j \in J_s \quad r_s^j \leq \nu_1 \rho_s^j. \tag{37}$$

Положим для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ $B_s^j = B(x_s^j, r_s^j + (1/2)\rho_s^j)$. Поскольку в силу (35) шары $B(x_s^j, r_s^j)$ содержатся в Ω и в силу (37) числа ρ_s^j положительны, то для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ $B_s^j \subset \Omega$, для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j, i \in J_s$ $j \neq i$, $\operatorname{int} B_s^j \cap \operatorname{int} B_s^i = \varnothing$.

Пусть, далее, $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$, $k \in \mathbb{N}$; если $s \in \mathbb{N}$, то p_s — отображение $\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ в $\mathring{W}^{k,m}(\Omega)$ такое, что $\forall u \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ $(p_s u)|_{\Omega_s} = u$, $p_s u = 0$ на $\Omega \setminus \Omega_s$. Легко видеть, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \forall u \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s) \; \| p_s u \|_{\mathring{W}^{k,m}(\Omega)} = \| u \|_{\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)}. \tag{38}$$

Положим $a' = 1 + 1/(4\nu_1)$, $a'' = 1 + 1/(3\nu_1)$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ φ_s — функция из $C^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leq \varphi_s \leq 1$ в Ω, $\varphi_s = 0$ на $\bigcup_{j \in J_s} B(x_s^j, a' r_s^j)$, $\varphi_s = 1$ на $\Omega \setminus \bigcup_{j \in J_s} B(x_s^j, a'' r_s^j)$, для любых α, $|\alpha| \leq k$, и $j \in J_s$ $|D^\alpha \varphi_s| \leq c_1 (r_s^j)^{-|\alpha|}$ в $B(x_s^j, a'' r_s^j)$ (c_1 — положительная постоянная, зависящая только от n, k, ν_1). Обозначим через $c_{n,k}$ число всех n-мерных мультииндексов α с $|\alpha| \leq k$ и положим $c = 2^n \omega_n^{1/m} c_1 c_{n,k}^4 k!$ (ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$). Совокупность множеств, состоящую из Ω и всех открытых кубов Q таких, что $\overline{Q} \subset \Omega$, обозначим через $\mathfrak{O}$. Для любых $Q \in \mathfrak{O}$ и $s \in \mathbb{N}$ положим $J_s(Q) = \{ j \in J_s : x_s^j \in Q \}$.

Лемма. *Пусть выполняется условие: существует $\sigma \geq 0$ такое, что $\forall Q \in \mathfrak{O}$*

$$\varlimsup_{s \to \infty} \sum_{j \in J_s(Q)} (r_s^j)^{n-km} \leq \sigma \operatorname{mes} Q. \tag{39}$$

Тогда для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\lim_{s \to \infty} \| u(\varphi_s - 1) \|_{L^m(\Omega)} = 0,$$

$$\varlimsup_{s \to \infty} \| u(\varphi_s - 1) \|_{\mathring{W}^{k,m}(\Omega)} \leq c\sigma^{1/m} \| u \|_{\mathring{W}^{k,m}(\Omega)}.$$

Доказательство леммы основано на использовании условий (35)–(37) и свойств функций φ_s. Использовав эту лемму, докажем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть выполняется условие* (39). *Тогда для любой функции* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ *существует последовательность* $u_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ *такая, что*

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \| p_s u_s - u \|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)} \le c\sigma^{1/m} \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)}, \tag{40}$$

$$p_s u_s \to u \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega). \tag{41}$$

Доказательство. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$. Возьмем последовательность $\{u^i\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такую, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \ \| u^i - u \|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)} \le i^{-1}. \tag{42}$$

Положим для любых $i, s \in \mathbb{N}$ $u_s^i = (u^i\varphi_s)|_{\Omega_s}$. Легко убедиться в том, что для любых $i, s \in \mathbb{N}$ $u_s^i \in C_0^\infty(\Omega_s)$ и $p_s u_s^i = u^i\varphi_s$. Из леммы вытекает, что для любого $i \in \mathbb{N}$ найдется $s_i' \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall s \ge s_i'$

$$\| p_s u_s^i - u^i \|_{L^m(\Omega)} \le i^{-1}, \ \| p_s u_s^i - u^i \|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)} \le c\sigma^{1/m} \| u^i \|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)} + i^{-1}. \tag{43}$$

Положим теперь для любого $i \in \mathbb{N}$ $s_i = i + \max\limits_{1 \le l \le i} s_l'$. Числа s_i образуют возрастающую последовательность. Определим последовательность $u_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ следующим образом: $u_s = u_s^1$, если $s < s_1$; $u_s = u_s^i$, если $s_i \le s < s_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Используя (42) и (43), получаем

$$\lim_{s\to\infty} \| p_s u_s - u \|_{L^m(\Omega)} = 0 \tag{44}$$

и выполняется неравенство (40). Из (40) и (44) следует (41). Теорема доказана.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что условие (39) выполняется, если

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \max_{j \in J_s} (r_s^j)^{n-km} (\rho_s^j)^{-n} < \infty.$$

Из (38) и теоремы 5 вытекает, что если выполняется условие (39), то пространства $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ и отображения p_s удовлетворяют условиям I, II и, следовательно, для операторов $A_s : \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to (\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s))^*$ можно реализовать все результаты п 1. Не останавливаясь на этом подробно, рассмотрим некоторые примеры выполнения условия (23), условия а) теоремы 3, условий 1, 2 теоремы 4, а также условия а) предложения 3.

Простым примером функционалов f_s, f соответственно из $(\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s))^*$, $(\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))^*$, удовлетворяющих (23), могут служить функционалы, определенные формулами

$$\langle f_s, u \rangle = \int_{\Omega_s} u\,dx, \ u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s); \ \langle f, u \rangle = \int_{\Omega} u\,dx, \ u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$$

(для этих функционалов $f_s = f \circ p_s$).

Далее, пусть a — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad a(\xi) = (1 + \xi^2)^{(m-2)/2}\xi. \tag{45}$$

Положим $m_1 = \min(m, m')$, $m_2 = \max(m, 2)$, $\lambda_1 = \max\{2m, 4^{m'}\}$, $\lambda_2 = \min\{m -$

$-1, 1/2^m\}$. Тогда для любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$

$$|a(\xi)-a(\xi')|^{m'} \le \lambda_1 (1+|\xi|+|\xi'|)^{m-m_1} |\xi-\xi'|^{m_1}, \tag{46}$$

$$(a(\xi)-a(\xi'))(\xi-\xi') \ge \lambda_2 (1+|\xi|+|\xi'|)^{m-m_2} |\xi-\xi'|^{m_2}. \tag{47}$$

Определим операторы T_s, T следующим образом: если $s \in \mathbb{N}$, то T_s — оператор из $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ в $(\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$

$$\langle T_s u, v\rangle = \int\limits_{\Omega_s} \left\{ \sum_{|\alpha|\le k-1} a(D^\alpha u) D^\alpha v \right\} dx;$$

T — оператор из $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ в $(\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$

$$\langle Tu, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|\le k-1} a(D^\alpha u) D^\alpha v \right\} dx.$$

Легко убедиться в том, что операторы T_s, T удовлетворяют условию а) теоремы 3.

Приведем два примера выполнения условий 1, 2 теоремы 4 о сходимости решений вариационных неравенств.

Предложение 4. *Пусть*

$$\forall s \in \mathbb{N} \;\; V_s = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \colon \|u\|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} \le 1\},$$

$$V = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega) \colon \|u\|_{W^{k-1,m}(\Omega)} \le 1\}.$$

Тогда:

а) множества V_s, V удовлетворяют условию 1 *теоремы* 4;

б) если последовательность обратимых операторов $A_s \colon \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to (\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s))^*$ G-сходится к обратимому оператору $A \colon \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))^*$, то выполняется условие 2 *теоремы* 4.

Доказательство. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$, $p_s v_s \to v$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$, N_1 — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ и $\forall s \in N_1$ $v_s \in V_s$. Для $s \in N_1$ имеем $\|p_s v_s\|_{W^{k-1,m}(\Omega)} = \|v_s\|_{W^{k-1,m}(\Omega_s)} \le 1$. Отсюда и из слабой сходимости $\{p_s v_s\}$ к v выводим $\|v\|_{W^{k-1,m}(\Omega)} \le 1$. Следовательно, $v \in V$ и, значит, множества V_s, V удовлетворяют условию 1 теоремы 4.

Далее, пусть последовательность обратимых операторов $A_s \colon \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to (\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s))^*$ G-сходится к обратимому оператору $A \colon \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))^*$. Пусть $v \in V$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ $w_s = A_s^{-1}((Av)\circ p_s)$. Ввиду G-сходимости $\{A_s\}$ к A $p_s w_s \to v$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ и, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty} \|p_s w_s - v\|_{W^{k-1,m}(\Omega)} = 0. \tag{48}$$

Положив для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s = (1 + \|p_s w_s - v\|_{W^{k-1,m}(\Omega)})^{-1} w_s$, получаем $\forall s \in \mathbb{N}$ $v_s \in V_s$ и в силу (48) $\|v_s - w_s\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)} \to 0$, что позволяет сделать заключение о выполнении условия 2 теоремы 4. Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть $m = 2$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ A_s — оператор из*

$\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ в $(\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s))^*$ *такой, что для любых* $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, v\rangle = \int\limits_{\Omega_s}\left\{\sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha u D^\alpha v\right\}dx.$$

Пусть последовательность $\{A_s\}$ G *-сходится к обратимому оператору* A: $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))^*$,

$$\forall s \in \mathbb{N}\ V_s = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s):\ \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)} \le 1\},$$

$$V = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega):\ \langle Au, u\rangle \le 1\}.$$

Тогда множества V_s, V *и операторы* A_s, A *удовлетворяют условиям* 1, 2 *теоремы* 4.

Доказательство. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$, $p_s v_s \to v$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$, N_1 — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ и $\forall s \in N_1$ $v_s \in V_s$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $w_s = A_s^{-1}((Av)\circ p_s)$. Ввиду G-сходимости $\{A_s\}$ к A $p_s w_s \to v$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$. Так как для любого $s \in \mathbb{N}$

$$0 \le \langle A_s v_s - A_s w_s,\ v_s - w_s\rangle = \|v_s\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)} - \langle Av,\ p_s v_s\rangle - \langle Av,\ p_s v_s - p_s w_s\rangle,$$

то для $s \in N_1$, учитывая включение $v_s \in V_s$, имеем

$$\langle Av,\ p_s v_s\rangle \le 1 - \langle Av,\ p_s v_s - p_s w_s\rangle.$$

Отсюда, учитывая слабую сходимость последовательностей $\{p_s v_s\}$, $\{p_s w_s\}$ к v, получаем $\langle Av, v\rangle \le 1$ и, следовательно, $v \in V$. Таким образом, множества V_s, V удовлетворяют условию 1 теоремы 4.

Далее, пусть $v \in V$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $w_s = A_s^{-1}((Av)\circ p_s)$. Ясно, что $p_s w_s \to v$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$. Тогда, положив для любого $s \in \mathbb{N}$ $\tau_s = |\langle A_s w_s, w_s\rangle - \langle Av,\ v\rangle|$, получаем $\tau_s \to 0$. Пусть теперь $\forall s \in \mathbb{N}$ $v_s = (1+\tau_s)^{-1} w_s$. Имеем

$$\|v_s\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)} = (1+\tau_s)^{-2}\langle A_s w_s,\ w_s\rangle \le 1,$$

и, следовательно, $v_s \in V_s$. Кроме того, ввиду сходимости $\{\tau_s\}$ к нулю $\|v_s - w_s\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)} \to 0$. Таким образом, множества V_s, V и операторы A_s, A удовлетворяют условию 2 теоремы 4. Предложение доказано.

Что касается условия а) предложения 3, то, как следует из теоремы 5, это условие для рассматриваемых пространств и отображений p_s выполняется, если

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{j\in J_s}(r_s^j)^{n-km} = 0. \tag{49}$$

Используя этот факт и предложение 2, получаем: если справедливо равенство (49), A — оператор из $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ в $(\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))^*$, удовлетворяющий неравенствам вида (28), (29), причем $A0 = 0$, и операторы A_s: $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to (\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s))^*$ определяются по оператору A формулой (30), то последовательность $\{A_s\}$ G-

сходится к оператору A.

Далее будем считать, что $2 \le m < n$, $k = 1$. Используя результаты работы [5], для некоторого оператора $A\colon \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$ и операторов $A_s\colon \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega_s) \to (\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega_s))^*$, определенных по A формулой (30), опишем условия G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору $\hat{A}\colon \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$, вообще говоря, не совпадающему с A.

Пусть $\lambda > 0$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i \in C(\mathbb{R}^n)$, причем $a_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, и для любых $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(\eta) - a_i(\eta')| \le \lambda(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-2} |\eta - \eta'|, \tag{50}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\eta) - a_i(\eta'))(\eta_i - \eta_i') \ge \lambda^{-1}(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-2} |\eta - \eta'|^2. \tag{51}$$

Пусть A — оператор из $\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)$ в $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)$

$$\langle Au, v\rangle = \int_{\Omega} \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i(\nabla u)\partial_i v\right\} dx; \tag{52}$$

для любого $s \in \mathbb{N}$ A_s — оператор из $\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega_s)$ в $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega_s))^*$, определенный по A формулой (30). Легко видеть, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega_s)$ значение $A_s u$ на v совпадает с выражением, получающимся из правой части (52) заменой Ω на Ω_s. Из условий на функции a_i вытекает, что операторы A_s обратимы.

Положим $\delta = \operatorname{diam} \Omega$ и для любых $\xi \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ обозначим через $u^j_{\xi,s}$ обобщенное решение класса $W^{1,m}(\operatorname{int} B(x^j_s, \delta) \setminus B(x^j_s, r^j_s))$ задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(\nabla u) = 0, \quad x \in \operatorname{int} B(x^j_s, \delta) \setminus B(x^j_s, r^j_s), \tag{53}$$

$$u(x) = 0 \text{ при } |x - x^j_s| = \delta, \quad u(x) = \xi \text{ при } |x - x^j_s| = r^j_s. \tag{54}$$

Теорема 6. *Пусть*

$$\varlimsup_{s\to\infty} \sum_{j\in J_s} (r^j_s)^{m(n-m)/(m-1)} (\rho^j_s)^{-n/(m-1)} < \infty, \tag{55}$$

$\mu > 0$, h *— непрерывная функция на* $\Omega \times \mathbb{R}$ *такая, что для любых* $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$ $|h(x, \xi)| \le \mu |\xi|^{m-1}$, $(h(x, \xi) - h(x, \xi'))(\xi - \xi') \ge 0$; *выполняется условие: для любого* $Q \in \mathfrak{O} \setminus \{\Omega\}$

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{j\in J_s(Q)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi} \int_{\Omega} a_i(\nabla u^j_{\xi,s}) \partial_i u^j_{\xi,s} dx = \int_{Q} (h(x, \xi) dx, \tag{56}$$

причем стремление к пределу является равномерным по ξ *на любом ограниченном интервале изменения* ξ. *Пусть* H *— оператор из* $\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)$ *в* $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$ *такой, что для любых* $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)$

$$\langle Hu, v\rangle = -\int_\Omega h(x, -u)v\,dx.$$

Тогда последовательность $\{A_s\}$ *G-сходится к оператору* $A + H$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех $f \in (\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$, для каждого из которых существует $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)\ \ \langle f, v\rangle = \int_\Omega \varphi v dx.$$

Используя условия данной теоремы и теорему 2 из [5], устанавливаем, что

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \ p_s A_s^{-1}(f \circ p_s) \to (A+H)^{-1} f \ \text{ слабо в } \ \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega). \tag{57}$$

Покажем, что множество $\mathcal{F}$ плотно в $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$. Пусть a – функция, определенная на $\mathbb{R}$ формулой (45), и $\mathcal{A}$ – оператор из $\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)$ в $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)$

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n a(\partial_i u)\partial_i v\right\} dx. \tag{58}$$

В силу неравенств (46), (47) оператор $\mathcal{A}$ обратим. Возьмем произвольный элемент $f \in (\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$ и положим $u = \mathcal{A}^{-1} f$, $\varphi_i = a \circ \partial_i u$, $i = 1, \ldots, n$. Имеем $\varphi_i \in L^{m'}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, и в силу (58) для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)$

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n \varphi_i \partial_i v\right\} dx. \tag{59}$$

Возьмем для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ последовательность $\{\varphi_i^l\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такую, что

$$\lim_{l\to\infty} \| \varphi_i^l - \varphi_i \|_{L^{m'}(\Omega)} = 0. \tag{60}$$

Пусть для любого $l \in \mathbb{N}$ функционал $f^l \in (\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$ определяется формулой

$$\langle f^l, v\rangle = \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n \varphi_i^l \partial_i v\right\} dx, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega). \tag{61}$$

Взяв $l \in \mathbb{N}$ и положив $\psi^l = -\sum_{i=1}^n \partial_i \varphi_i^l$, находим, что для любого

$$v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)\ \ \langle f^l, v\rangle = \int_\Omega \psi^l v dx,$$

и значит, $f^l \in \mathcal{F}$. Таким образом, $\{f^l\} \subset \mathcal{F}$. Из (59) и (61) выводим, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\| f^l - f \|_{(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*} \le \sum_{i=1}^n \| \varphi_i^l - \varphi_i \|_{L^{m'}(\Omega)}.$$

Отсюда и из (60) получаем, что $\{f^l\}$ сходится к f сильно в $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$ и, следовательно, множество $\mathcal{F}$ плотно в $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$.

Пусть теперь f — произвольный элемент из $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$ и $\{f^l\}$ — последовательность из $\mathcal{F}$, сильно сходящаяся к f в $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$. Положим $u =$

$= (A+H)^{-1} f$ и для любых $l, s \in \mathbb{N}$ $u^l = (A+H)^{-1} f^l$, $u_s = A_s^{-1}(f \circ p_s)$, $u_s^l = A_s^{-1}(f^l \circ p_s)$. В силу (51) и определения оператора H

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad \| u^l - u \|^{m-1}_{\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)} \le \tau \| f^l - f \|_{(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*}, \tag{62}$$

где $\tau > 0$ и зависит только от λ, n, m, Ω. Кроме того, из определения операторов A_s и (51) вытекает

$$\forall l, s \in \mathbb{N} \quad \| u_s^l - u_s \|^{m-1}_{\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega_s)} \le \tau \| f^l - f \|_{(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*}. \tag{63}$$

Используя (62), (63), сильную сходимость $\{f^l\}$ к f в $(\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega))^*$ и (57), устанавливаем, что $p_s u_s \to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)$. Это позволяет заключить, что последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к оператору $A + H$. Теорема доказана.

Замечание 3. Пусть $m = 2$ и $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $a_i(\eta) = \eta_i$. Тогда решение $u^j_{\xi,s}$ задачи (53), (54) определяется формулой

$$u^j_{\xi,s}(x) = \xi\,[(r_s^j)^{2-n} - \delta^{2-n}]^{-1}\,[\,|x - x_s^j|^{2-n} - \delta^{2-n}].$$

При этом если выполняется неравенство (55), ψ – неотрицательная функция из $C(\overline{\Omega})$ и

$$\forall Q \in \mathfrak{O} \setminus \{\Omega\} \quad \lim_{s \to \infty} \sum_{j \in J_s(Q)} (r_s^j)^{n-2} = \int_Q \psi\, dx,$$

то выполняется условие (56) с $h(x, \xi) = \kappa_n (n-2)\psi(x)\xi$, где κ_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

В заключение отметим различие условий связи пространств W_s, W из п. 1 данной статьи и условий связи пространств из работ [12, 13], имеющих отношение к G-сходимости операторов задачи Неймана в переменных областях.

1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 278 с.
2. *Хруслов Е. Я.* Первая краевая задача в областях со сложной границей для уравнений высших порядков // Мат. сб. – 1977. – **103**, № 4. – С. 614 – 629.
3. *Панкратов Л. С.* Об асимптотическом поведении решений вариационных задач в областях со сложной границей. – Харьков, 1987. – 18 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур; 11–87).
4. *Скрыпник И. В.* О сходимости решений нелинейной задачи Дирихле при измельчении границы области // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1982. – **115**. – С. 236 – 250.
5. *Скрыпник И. В.* Квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – **2**. – С. 21 –25.
6. *Скрыпник И. В.* Усреднение квазилинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, вып. 4. – С. 197 – 198.
7. *Скрыпник И. В.* Усреднение нелинейных задач Дирихле в областях с каналами // Докл. АН СССР. – 1990. – **313**, № 5. – С. 1049 – 1053.
8. *Скрыпник И. В., Прокопенко А. И.* Усреднение задачи Дирихле для квазилинейных уравнений эллиптического типа высшего порядка в областях с каналами.– Донецк, 1989. – 28 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 89.13).
9. *Прокопенко А. И.* Задача Дирихле для нелинейных уравнений высшего порядка в областях с мелкозернистой границей. – Донецк, 1985. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 599.
10. *Усреднение* и G-сходимость дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, Ха Тьен Нгоан // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, вып. 5. – С. 65 – 133.
11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М.: Мир, 1972. – 587 с.
12. *Ковалевский А. А.* G-сходимость абстрактных операторов с различными областями определения // Докл. АН УССР. Сер А. – 1989. – № 3. – С. 20 – 23.
13. *Ковалевский А. А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения. – Донецк, 1990. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 90.01).

Получено 22.10.92