УДК 519.21

Ю. Н. Линьков, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛИЧЕНИЕ СЧИТАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

A canonical representation for the logarithm of the likelihood ratio and limit theorems on its asymptotic behavior are obtained. By using these theorems, the rate of decrease of probability of the second type error in the Neyman – Pearson test is studied.

Одержано канонічне зображення для логарифма відношення правдоподібності та доведені граничні теореми про його асимптотичну поведінку. За допомогою цих теорем досліджена швидкість зменшення ймовірності похибки другого роду критерію Неймана –Пірсона.

1. Введение. Методам статистики считающих процессов, основанным на использовании асимптотических свойств отношения правдоподобия, посвящено достаточно много работ (см. обзор работ в [1]). Причем детально исследован лишь случай считающих процессов с непрерывными компенсаторами. В данной работе рассматривается задача проверки двух простых гипотез для считающих процессов при растущей длительности наблюдения. При этом исследование основано на асимптотических свойствах отношения правдоподобия и рассматриваются считающие процессы, компенсаторы которых могут иметь разрывы. Ранее аналогичная задача рассматривалась для частного класса считающих процессов — процессов восстановления [2].

2. Процесс локальной плотности мер. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}})$ — стохастический базис с фильтрацией $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ и с двумя вероятностными мерами $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$, а $\mathbf{P}^t$ и $\tilde{\mathbf{P}}^t$ — сужение мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$, $t \in R_+$. Пусть $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$ — считающий процесс, распределение которого задается мерой $\mathbf{P}$ (соответственно $\tilde{\mathbf{P}}$), если верна гипотеза H (соответственно $\tilde{H}$). Рассмотрим задачу проверки гипотез H и $\tilde{H}$ по наблюдениям $\xi^t = (\xi_s)_{0\leq s\leq t}$ считающего процесса ξ. Обозначим через $\nu = (\nu_t)_{t\geq 0}$ (соответственно $\tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_t)_{t\geq 0}$) компенсатор процесса ξ относительно меры $\mathbf{P}$ (соответственно $\tilde{\mathbf{P}}$). Если $\tilde{\mathbf{P}}^t \ll \mathbf{P}^t$ для всех $t \in R_+$ (обозначение $\tilde{\mathbf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} P$), то процесс $z = (z_t)_{t\geq 0}$, где $z_t = d\tilde{\mathbf{P}}^t / d\mathbf{P}^t$, называется процессом локальной плотности меры $\tilde{\mathbf{P}}$ относительно меры $\mathbf{P}$ (или, другими словами, процессом отношения правдоподобия). Приведем теперь выражение процесса z через компенсаторы ν и $\tilde{\nu}$.

Введем следующие условия:

I. Существует неотрицательный предсказуемый процесс $\lambda = (\lambda_t)_{t\geq 0}$ такой, что $\tilde{\nu}_t = \lambda \circ \nu_t$ ($\tilde{\mathbf{P}}$-п.н.) для всех $t \in R_+$.

II. Если $\Delta\nu_t = 1$, то $\Delta\tilde{\nu}_t = 1$ ($\tilde{\mathbf{P}}$-п. н.).

III. $(1-\sqrt{\lambda})^2 \circ \nu_t + \sum_{0<s\leq t} \left(\sqrt{1-\Delta\nu_s} - \sqrt{1-\Delta\tilde{\nu}_s}\right)^2 < \infty$ ($\tilde{\mathbf{P}}$-п. н.) для всех $t \in R_+$.

Здесь $f \circ \nu_t = \int_0^t f_s d\nu_s$ — интеграл Лебега – Стильтьеса от функции $f = (f_s)_{s\geq 0}$ по компенсатору ν. Будем предполагать, что $T_n \to \infty$ ($\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}}$-п. н.) при $n \to \infty$ (T_n — моменты скачков процесса ξ) и $\nu_t < \infty$ ($\mathbf{P}$-п. н.) и $\tilde{\nu}_t < \infty$ ($\tilde{\mathbf{P}}$-п. н.) для всех $t \in R_+$. Хорошо известно [3], что в данном случае в условиях I — III $\tilde{\mathbf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}$ и

$$z_t = \exp\left\{\ln\lambda \circ \xi_t + (1-\lambda)\circ \nu_t^c + \sum_{0<s\le t}(1-\Delta\xi_s)\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_s}{1-\Delta\nu_s}\right\}, \qquad (1)$$

где ν^c — непрерывная часть компенсатора ν и $0/0 = 1$.

Следующая теорема указывает условия, при которых процесс $\Lambda = \ln z$ является специальным семимартингалом, и дает каноническое представление семимартингала Λ.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* I – III *и, кроме того, справедливо следующее условие*:

IV. $|\ln\lambda| \circ \nu_t < \infty$ *и* $\sum_{0<s\le t}\left|\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_s}{1-\Delta\nu_s}\right| < \infty$ (**P**-*п. н.*) *для всех* $t \in R_+$.

Тогда процесс $\Lambda = \ln z$ *является специальным семимартингалом из класса* $\mathcal{S}(F, P)$ *и допускает единственное (с точностью до* **P**-*неразличимости) разложение*

$$\Lambda = M - V, \qquad (2)$$

где

$$V = (V_t)_{t\ge0} \in \mathcal{V}_{\mathrm{loc}}(F, P) \cap \mathcal{P}(F), \quad M = (M_t)_{t\ge0} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(F, P),$$

причем

$$V_t = (\lambda - 1 - \ln\lambda) \circ \nu_t^c + \sum_{0<s\le t} f(\Delta\nu_s, \Delta\tilde{\nu}_s), \qquad (3)$$

$$M_t = g \bullet (\xi - \nu)_t, \quad g_s = \ln\left(\lambda_s \frac{1-\Delta\nu_s}{1-\Delta\tilde{\nu}_s}\right), \qquad (4)$$

$$f(x, y) = x\ln\frac{x}{y} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-y}, \quad 0 \le x,\ y \le 1 \qquad (5)$$

(здесь $g \bullet (\xi - \nu)_t = \int_0^t g_s d(\xi_s - \nu_s)$ *— стохастический интеграл по локальному мартингалу* $\xi - \nu$*).*

В частности, семимартингал Λ *имеет каноническое представление*

$$\Lambda_t = B_t^\Lambda + xI(|x|\le 1) * (\mu^\Lambda - \nu^\Lambda)_t + xI(|x|>1) * \mu_t^\Lambda, \qquad (6)$$

где

$$B_t^\Lambda = (1 - \lambda + I(|\ln\lambda|\le 1)\ln\lambda) \circ \nu_t^c +$$

$$+ \sum_{0<s\le t}\left[\Delta\nu_s I(|\ln\lambda_s|\le 1)\ln\lambda_s + (1-\Delta\nu_s) I\left(\left|\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_s}{1-\Delta\nu_s}\right| \le 1\right)\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_s}{1-\Delta\nu_s}\right], \qquad (7)$$

μ^Λ *— мера скачков семимартингала* Λ *с компенсатором* ν^Λ *и для всех* $C \in \mathcal{B}_0$ *и* $t \in R_+$

$$\mu^\Lambda((0, t], C) = I_C(\ln\lambda) \circ \xi_t + \sum_{0<s\le t} I_C\left(\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_s}{1-\Delta\nu_s}\right)(1-\Delta\xi_s), \qquad (8)$$

$$\nu^\Lambda((0, t], C) = I_C(\ln\lambda) \circ \nu_t + \sum_{0<s\le t} I_C\left(\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_s}{1-\Delta\nu_s}\right)(1-\Delta\nu_s), \qquad (9)$$

а $I_C(f) = I(f \in C)$ *— индикаторная функция (здесь* $f * \mu_t^\Lambda = \int_0^t \int f_{s,x} d\mu^\Lambda$ *— интеграл по случайной мере* μ^Λ, *а* $f * (\mu^\Lambda - \nu^\Lambda)_t = \int_0^t \int f_{s,x} d(\mu^\Lambda - \nu^\Lambda)$ *— стохастический интеграл по локальной мартингальной мере* $\mu^\Lambda - \nu^\Lambda$).

Доказательство соотношений (2) – (9) проводится стандартными рассуждениями на основании условий I – IV и формулы (1). Подробное доказательство можно найти в [4].

Всюду ниже будем предполагать, что условия, обеспечивающие справедливость соотношений (2) – (9), выполняются.

3. Предельные теоремы для процесса локальной плотности мер. Следующая теорема представляет собой закон больших чисел для $\Lambda_t = \ln z_t$ при $t \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* I – IV. *Кроме того, пусть* $s \in (0, \infty)$ *фиксировано и* ψ_t *— некоторая положительная возрастающая детерминированная функция такая, что* $\psi_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *и выполняются следующие условия*:

1) $\mathbf{P}\text{-}\lim\limits_{t\to\infty} \psi_t^{-1} V_{st} = a_s$, *где* a_s *— детерминированная положительная функция такая, что* $a_1 = 1$;

2) $\mathbf{P}\text{-}\lim\limits_{t\to\infty} \psi_t^{-1} g^\pm \circ \nu_{st} = k_s^\pm$, *где* k_s^+ *и* k_s^- *— неотрицательные конечные функции,* $g^\pm = (g_u^\pm)_{u\ge 0}$, $g_u^+ = g_u \vee 0$ *и* $g_u^- = -(g_u \wedge 0)$;

3) *если* $k_s^\pm > 0$, *то* $\mathrm{E} \sup\limits_{u>0} g_u^\pm \Delta\xi_u < \infty$.

Тогда справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \Lambda_{st} = -a_s. \tag{10}$$

Доказательство. В силу условия 1 и соотношения (2) достаточно доказать, что

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} M_{st} = 0. \tag{11}$$

Используя условие IV, имеем ($\mathbf{P}$-п. н.)

$$M = (A^+ - A^-) - (\tilde{A}^+ - \tilde{A}^-), \tag{12}$$

где

$$A^\pm = g^\pm \circ \xi, \quad \tilde{A}^\pm = g^\pm \circ \nu.$$

Если $k_s^\pm > 0$, то в силу теоремы 2.5.12 из [5] получаем соотношение

$$\lim_{t\to\infty} (A_{st}^\pm - \tilde{A}_{st}^\pm) / \tilde{A}_{st}^\pm = 0 \quad (\mathbf{P}\text{-п. н.}).$$

Отсюда в силу условия 2 вытекает соотношение

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} (A_{st}^\pm - \tilde{A}_{st}^\pm) = 0. \tag{13}$$

Если $k_s^\pm = 0$, то, используя неравенство Ленгляра, получаем

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} A_{st}^\pm = 0.$$

Отсюда следует, что соотношение (13) справедливо и в случае $k_s^\pm = 0$. Объединяя (12) и (13), получаем справедливость (11), а вместе с этим и справедливость искомого соотношения (10). Теорема 2 доказана.

***Замечание* 1.** Нетрудно показать, что вместо условий 2 и 3 в формулировке теоремы 2 можно взять условие

$$2. \qquad \mathbf{P}\text{-}\lim_{t\to\infty}\left[\left(\frac{g}{\psi_t}\right)^2 I\left(\frac{|g|}{\psi_t}\le 1\right)(1-\Delta\nu)\circ\nu_{st}+\frac{|g|}{\psi_t}I\left(\frac{|g|}{\psi_t}>1\right)\circ\nu_{st}\right]=0.$$

В следующей теореме сформулированы условия слабой сходимости процесса Y^t при $t\to\infty$, где $Y^t=(Y^t_s)_{s\ge 0}$ и $Y^t_s=\varphi_t^{-1}(\Lambda_{st}+\psi_{st})$. Здесь ψ_t — некоторая детерминированная функция, φ_t — некоторая положительная детерминированная функция. Очевидно, $Y^t\in\mathcal{S}(F^t,P)$ для всех $t\in R_+$, где $F^t=(\mathcal{F}^t_s)_{s\ge 0}$, $\mathcal{F}^t_s=\mathcal{F}_{st}$. Используя теорему 1, получаем, что семимартингал Y^t допускает каноническое разложение

$$Y^t = B^t + xI(|x|\le 1) * (\mu^t-\nu^t) + xI(|x|>1) * \mu^t, \tag{14}$$

где $B^t=(B^t_s)_{s\ge 0}$, μ^t — мера скачков семимартингала Y^t с компенсатором ν^t и

$$B^t_s = \varphi_t^{-1}(1-\lambda+I((|\ln\lambda|/\varphi_t)\le 1)\ln\lambda)\circ\nu^c_{st}+\varphi_t^{-1}\psi_{st}+$$

$$+\varphi_t^{-1}\sum_{0<u\le st}\left[\Delta\nu_u I\left(\frac{|\ln\lambda_u|}{\varphi_t}\le 1\right)\ln\lambda_u+(1-\Delta\nu_u)I\left(\left|\ln\frac{1-\Delta\tilde\nu_u}{1-\Delta\nu_u}\right|\le\varphi_t\right)\ln\frac{1-\Delta\tilde\nu_u}{1-\Delta\nu_u}\right], \tag{15}$$

$$\mu^t((0,s],\,C) = I_C\left(\frac{\ln\lambda}{\varphi_t}\right)\circ\xi_{st}+\sum_{0<u\le st}I_C\left(\varphi_t^{-1}\ln\frac{1-\Delta\tilde\nu_u}{1-\Delta\nu_u}\right)(1-\Delta\xi_u), \tag{16}$$

$$\nu^t((0,s],\,C) = I_C\left(\frac{\ln\lambda}{\varphi_t}\right)\circ\nu_{st}+\sum_{0<u\le st}I_C\left(\varphi_t^{-1}\ln\frac{1-\Delta\tilde\nu_u}{1-\Delta\nu_u}\right)(1-\Delta\nu_u) \tag{17}$$

для всех $C\in\mathcal{B}_0$ и $s\in R_+$. Для всех $\delta\in(0,1]$ и $t\in(0,\infty)$ введем локально квадратично интегрируемый мартингал $M^{t,\delta}=(M^{t,\delta}_s)_{s\ge 0}\in\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(F^t,\mathbf{P})$, полагая

$$M^{t,\delta}_s = xI(|x|\le\delta) * (\mu^t-\nu^t)_s.$$

Легко видеть, что квадратическая характеристика $\langle M^{t,\delta}\rangle$ имеет вид

$$\langle M^{t,\delta}\rangle_s = x^2I(|x|\le\delta) * \nu^t_s-\sum_{0<u\le st}\left(\int_{|x|\le\delta}x\nu^t(\{u\},dx)\right)^2 =$$

$$= I(|\ln\lambda|\le\delta\varphi_t)\varphi_t^{-2}\ln^2\lambda\circ\nu^c_{st}+\sum_{0<u\le st}\Big[I(|\ln\lambda_u|\le\delta\varphi_t)\varphi_t^{-1}\ln\lambda_u-$$

$$-I\left(\left|\ln\frac{1-\Delta\tilde\nu_u}{1-\Delta\nu_u}\right|\le\delta\varphi_t\right)\varphi_t^{-1}\ln\frac{1-\Delta\tilde\nu_u}{1-\Delta\nu_u}\Big]^2(1-\Delta\nu_u)\Delta\nu_u. \tag{18}$$

Для формулировки следующей теоремы введем стохастический базис $(\Omega,\mathcal{F},\tilde F,\mathbf{P})$, где $\tilde F=(\tilde{\mathcal{F}}_s)_{s\ge 0}$ — некоторая фильтрация. Рассмотрим семимартингал $Y\in\mathcal{S}(\tilde F,\mathbf{P})$, имеющий каноническое представление

$$Y = B^Y+M^Y+xI(|x|\le 1) * (\mu^Y-\nu^Y)+xI(|x|>1) * \mu^Y,$$

где

$$B^Y = (B^Y_s)_{s\ge 0}\in\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}(\tilde F,\mathbf{P}),\ M^Y = (M^Y_s)_{s\ge 0}\in\mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}(\tilde F,\mathbf{P})$$

и μ^Y — мера скачков семимартингала Y с компенсатором ν^Y. Будем предполагать, что семимартингал Y является квазинепрерывным слева процессом с независимыми приращениями.

Теорема 3. *Пусть* $s \in (0, \infty)$ *фиксировано и выполняются следующие условия:*

$$1)\quad \mathbf{P}\text{-}\lim_{t\to\infty}\left[f\left(\frac{\ln\lambda}{\varphi_t}\right)\circ\nu_{st}+\sum_{0<u\le st}f\left(\varphi_t^{-1}\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_u}{1-\Delta\nu_u}\right)(1-\Delta\nu_u)\right]=f(x)*\nu_s^Y$$

для всех ограниченных и непрерывных на $R_0\setminus(\{-1\}\cup\{1\})$ *функций* $f(x)$, $x\in R^1$, *таких, что* $I(|x|>\varepsilon)f(x)=f(x)$ *для некоторого* $\varepsilon>0$;

2) $\mathbf{P}\text{-}\lim\limits_{t\to\infty} B_s^t = B_s^Y$;

3) $\lim\limits_{\delta\to 0}\varlimsup\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{|\langle M^{t,\delta}\rangle_s-\langle M^Y\rangle_s|>\varepsilon\}=0$ *для любого* $\varepsilon>0$, *где* $\langle M^{t,\delta}\rangle$ — *квадратическая характеристика, заданная равенством* (18);

4) *для всех* $\delta\in(0,1]$

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{t\to\infty}\sup_{0<u\le st}\left[I\left(\frac{\ln\lambda_u}{\varphi_t}>\delta\right)\Delta\nu_u+I\left(\left|\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_u}{1-\Delta\nu_u}\right|>\delta\varphi_t\right)(1-\Delta\nu_u)\right] = 0.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\varphi_t^{-1}(\Lambda_{st}+\psi_{st})\xrightarrow{\;w\;}Y_s,\ t\to\infty,\tag{19}$$

где символ $\xrightarrow{\;w\;}$ *означает слабую сходимость распределений.*

Для доказательства достаточно применить теорему 1 из [6] к процессам Y^t, определенным соотношениями (14) – (17).

Замечание 2. Нетрудно переформулировать теорему 3 так, чтобы слабая сходимость (19) была справедлива и в так называемой схеме серий, т. е. когда компенсаторы ν и $\tilde{\nu}$ зависят от t.

4. Асимптотическое поведение вероятностей ошибок критерия Неймана — Пирсона. Пусть δ_t — критерий Неймана — Пирсона уровня $\alpha_t\in(0,1)$ для различения гипотез H и $\tilde{H}$ по наблюдению ξ^t [7]. Обозначим через β_t вероятность ошибки 2-го рода этого критерия. Рассмотрим поведение β_t при $t\to\infty$ в зависимости от поведения уровня α_t и отношения правдоподобия z_t.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *при* $s=1$, *а уровень* α_t *удовлетворяет условиям*

$$\varliminf_{t\to\infty}\alpha_t>0,\quad \varlimsup_{t\to\infty}\alpha_t<1.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\beta_t=-1.$$

Для доказательства достаточно заметить, что в силу теоремы 2 выполняется условие $\Lambda 1$ из [7] при $\chi_t=\psi_t$, и применить теорему 2.2 из [7] (см. также теорему 2.3.1 из [1]).

Следующая теорема описывает поведение β_t, когда закон больших чисел для Λ_t не выполняется.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 3, *когда* $\psi_t \equiv 0$, $s = 1$ *и* $\varphi_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$, L *— закон распределения величины* Y_1, *а функция распределения* $L(x) = \mathbf{P}\{Y_1 < x\}$, $x \in R^1$, *непрерывна и строго монотонно возрастает на интервале* $(\underline{l}, \bar{l})$, где $\underline{l} = \sup\{x: L(x) = 0\}$, $\bar{l} = \inf\{x: L(x) = 1\}$. *Тогда для любого* $\alpha \in (0, 1)$ *справедливы импликации*

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \alpha \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1} \ln \beta_t = l_{1-\alpha},$$

где l_p *—* p *-квантиль закона* L, $L(l_p) = p$ *при* $p \in (0, 1)$.

Для доказательства достаточно заметить, что в силу теоремы 3 выполняется условие Λ4 из [7], и применить теорему 4.1 из [7] (см. также теорему 2.4.2 из [1]).

***Замечание* 3.** Нетрудно показать, что в условиях теоремы 5 $L(x) = 1$ для всех $x > 0$ и, значит, $l_p < 0$ для всех $p \in (0, 1)$.

Следующая теорема описывает поведение β_t при $t \to \infty$, когда выполняется закон больших чисел для Λ_t, но более тонкое, чем в теореме 4. Для формулировки этой теоремы потребуется вспомогательная лемма о поведении критерия δ_t.

Введем следующее условие:

Λ. $\mathfrak{L}(\varphi_t^{-1}(\Lambda_t + \psi_t) \mid \mathbf{P}) \xrightarrow{w} L$ при $t \to \infty$, где $\varphi_t \to \infty$ при $t \to \infty$, причем $\varphi_t = o(\psi_t)$, а L — вероятностный закон на R^1 с непрерывной функцией распределения $L(x)$, строго монотонно возрастающей на интервале $(\underline{l}, \bar{l})$, где величины $\underline{l}$ и $\bar{l}$ определены так же, как и в теореме 5 (здесь $\mathfrak{L}(\cdot \mid \mathbf{P})$ — закон распределения относительно меры $\mathbf{P}$).

Известно [7], что критерий δ_t имеет вид

$$\delta_t = I(\Lambda_t \geq d_t) + \varepsilon_t I(\Lambda_t = d_t),$$

где $\varepsilon_t \in [0, 1]$ и $d_t \in R^1$ — параметры критерия δ_t, определяемые из условия $\mathrm{E}\delta_t = \alpha_t$.

Лемма. *Если выполняется условие* Λ, *то для любого* $\alpha \in (0, 1)$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \alpha \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(d_t + \psi_t) = l_{1-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(\ln \beta_t + \psi_t) = l_{1-\alpha}, \tag{20}$$

где l_p *—* p *-квантиль закона* L.

Доказательство. Очевидно, имеем

$$\alpha_t = \mathbf{P}(Z_t > y_t) + \varepsilon_t \mathbf{P}(Z_t = y_t), \tag{21}$$

где

$$Z_t = \varphi_t^{-1}(\Lambda_t + \psi_t), \; y_t = \varphi_t^{-1}(d_t + \psi_t).$$

Обозначим $L_t(x) = \mathbf{P}(Z_t < x)$, $x \in R^1$. Для любых $\varepsilon > 0$ и $y_t \in R^1$ имеем

$$\mathbf{P}(Z_t = y_t) \leq L_t(y_t + \varepsilon) - L_t(y_t) = [L_t(y_t + \varepsilon) - L(y_t + \varepsilon)] -$$

$$- [L_t(y_t) - L(y_t)] + [L(y_t + \varepsilon) - L(y_t)]. \tag{22}$$

В силу леммы Пойа [8, с.115]

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y\in R^1} |L_t(y) - L(y)| = 0. \tag{23}$$

Учитывая, что из непрерывности функции $L(x)$ следует ее равномерная непрерывность, из (22) и (23) получаем

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(Z_t = y_t) = 0. \tag{24}$$

Таким образом, из (21) и (24) следует

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \alpha \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} L_t(y_t) = 1 - \alpha. \tag{25}$$

В силу (23) и (25) получаем

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \alpha \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} L(y_t) = 1 - \alpha,$$

откуда вытекает левая эквивалентность в (20).

Так как $\tilde{\mathbf{P}}^t \ll \mathbf{P}^t$, то получаем оценку

$$\beta_t = \tilde{\mathbf{E}}(1-\delta_t) = \mathbf{E}(1-\delta_t)z_t \le \exp(d_t).$$

Отсюда вытекают импликации

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(d_t + \psi_t) = l_{1-\alpha} \Rightarrow \varlimsup_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(\ln\beta_t + \psi_t) \le l_{1-\alpha}, \tag{26}$$

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(\ln\beta_t + \psi_t) = l_{1-\alpha} \Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(d_t + \psi_t) \ge l_{1-\alpha}. \tag{27}$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\beta_t \ge \mathbf{E}I(y_t - \varepsilon \le Z_t)z_t(1-\delta_t) \ge \mathbf{P}(y_t - \varepsilon \le Z_t < y_t)\exp((y_t - \varepsilon)\varphi_t - \psi_t). \tag{28}$$

Отсюда, учитывая импликацию (26), в силу произвольности ε получаем импликацию

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(d_t + \psi_t) = l_{1-\alpha} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(\ln\beta_t + \psi_t) = l_{1-\alpha}.$$

В силу (27) для доказательства правой эквивалентности в (20) достаточно показать, что

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(\ln\beta_t + \psi_t) = l_{1-\alpha} \Rightarrow \varlimsup_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(d_t + \psi_t) \le l_{1-\alpha}. \tag{29}$$

Эта импликация легко доказывается от противного. На самом деле, пусть выполняется левое неравенство в (29), но $\varlimsup_{t\to\infty} y_t = \bar{y} > l_{1-\alpha}$. Тогда существует последовательность $(t_n)_{n\ge1}$ такая, что $t_n \to \infty$ и $y_{t_n} \to \bar{y}$ при $n \to \infty$. Отсюда в силу (28) имеем

$$\varlimsup_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(\ln\beta_t + \psi_t) \ge \varlimsup_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(\ln\beta_{t_n} + \psi_{t_n}) \ge \bar{y} > l_{1-\alpha},$$

что противоречит левому равенству в (29). Значит, импликация (29) справедлива. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы* 3, *когда* $s = 1$, $\psi_t \to \infty$ *и* $\varphi_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *причем* $\varphi_t = o(\psi_t)$, L *— закон распределения величины* Y_1, *а функция распределения* $L(x) = \mathbf{P}(Y_1 < x)$, $x \in R^1$, *непрерывна и строго монотонно возрастает на* $(\underline{l}, \bar{l})$. *Тогда для любого* $\alpha \in (0, 1)$ *справедливы импликации*

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \alpha \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(\ln\beta_t + \psi_t) = l_{1-\alpha}.$$

Для доказательства достаточно применить теорему 3 и использовать затем лемму.

***Замечание* 4.** Если $\alpha_t \to \alpha \in (0, 1)$, то в условиях теорем 4 – 6 вероятность ошибки 2-го рода β_t при $t \to \infty$ такова:

$$\beta_t = \exp(-\psi_t(1 + o(1))) \quad \text{(теорема 4)}, \tag{30}$$

$$\beta_t = \exp(l_{1-\alpha}\varphi_t(1 + o(1))) \quad \text{(теорема 5)}, \tag{31}$$

$$\beta_t = \exp(-\psi_t + l_{1-\alpha}\varphi_t(1 + o(1))) \quad \text{(теорема 6)}. \tag{32}$$

Формулы (30) и (32) описывают скорость убывания вероятности ошибки 2-го рода β_t при $t \to \infty$, когда выполняется закон больших чисел для Λ_t, причем формула (32) более тонко описывает поведение β_t. Формула (31) характеризует скорость убывания β_t, когда закон больших чисел для Λ_t не выполняется, а имеет место слабая сходимость распределения $\varphi_t^{-1}\Lambda_t$ к некоторому невырожденному закону распределения. Заметим, что формула (31) вытекает из формулы (32) при $\psi_t \equiv 0$.

Теорема 7. *Пусть выполняется условие теоремы* 3, *когда* $s = 1$, $\psi_t \equiv 0$ *и* $\varphi_t \equiv 1$, L *— закон распределения величины* Y_1, *а функция распределения* $L(x) = \mathbf{P}(Y_1 < x)$, $x \in R^1$, *непрерывна и строго монотонно возрастает на* $(\underline{l}, \bar{l})$. *Тогда для любого* $\alpha \in [0, 1]$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \alpha \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \beta_t = \tilde{L}(l_{1-\alpha}),$$

где l_p *—* p *-квантиль закона* L, *а* $\tilde{L}(x)$ *— функция распределения вида*

$$\tilde{L}(x) = \int_{-\infty}^{x} e^y dL(y), \quad x \in R^1.$$

Для доказательства достаточно применить теорему 3.4 из [9] (см. также теорему 2.5.5 из [1]).

1. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. *Линьков Ю. Н., Мунир аль Шахф.* Асимптотическое различение процессов восстановления // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1382 – 1388.
3. *Jacod J.* Multivariate point processes: predictable projection, Radon –Nikodym derivatives, representation of martingales // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1975. – **31**, № 3. – P. 235 – 253.
4. *Lin'kov Yu. N.* Asymptotical properties of the local density of measures for counting processes // New Trends in Probability and Statistics. – Moscow; Utrecht: TVP / VSP, 1993. – Vol. 4. – P. 73 – 97.
5. *Липцер Р. Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
6. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* О слабой сходимости семимартингалов к стохастически непрерывным процессам с независимыми и условно независимыми приращениями // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 3. – С. 331 – 358.
7. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическое различение двух простых статистических гипотез. – Киев, 1986. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.45).
8. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968. –548 с.
9. *Линьков Ю. Н.* Методы решения асимптотических задач проверки двух простых статистических гипотез. – Донецк, 1989. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 89. 05).

Получено 22.10.92