УДК 517.53

В. В. Маймескул, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Classes of functions quasi-analytic in a Jordan domain G are defined. The quasi-analyticity of the classes of functions given by the conditions on the rate of decrease of the best uniform polynomial approximations dependently on the geometric structure of the domain is studied.

Означаються класи функцій, що квазіаналітичні у жордановій області G, і досліджується квазіаналітичність класів функцій, які задаються умовами на швидкість спадання найкращих рівномірних поліноміальних наближень, залежно від геометричних властивостей області.

Квазианалитические классы функций вещественного переменного достаточно хорошо изучены. Наряду с широко известными классами Данжуа – Карлемана, определяемыми поведением последовательности $\|f^{(n)}\|_{C[a,b]}$, на квазианалитичность исследовались также классы функций, задаваемые свойствами их коэффициентов Фурье, различными условиями на скорость наилучшего равномерного полиномиального приближения (см., например, [1–4]). Последний подход, наиболее близкий к конструктивной теории функций, используется и в настоящей работе.

1. Определения и вспомогательные результаты. Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная жордановой кривой L, $\xi \in L$ — произвольная точка, $\mathcal{N}$ — некоторый класс аналитических в G функций $f(z)$, для каждой из которых при всех $n = 0, 1, \ldots$ существует $\lim\limits_{z \to \xi} f^{(n)}(z)$.

Класс $\mathcal{N}$ будем называть квазианалитическим классом функций в области G относительно точки ξ (в дальнейшем (G, ξ)-*q. a.* классом), если равенства

$$\lim_{z \to \xi} f^{(n)}(z) = \lim_{z \to \xi} g^{(n)}(z)$$

для всех $n = 0, 1, \ldots$ возможны только в случае $f \equiv g$ в G.

Квазианалитическим классом функций в области G (G-*q. a.* классом) назовем класс функций, являющийся (G, ξ)-*q. a.* классом $\forall\, \xi \in L$.

Через $E_n(f, G)$ обозначим, как обычно, наилучшее равномерное приближение аналитической в G функции $f(z)$ полиномами степени не выше n:

$$E_n(f, G) = \min_{P_n : \deg P_n \le n} \|f - P_n\|_{C(G)}.$$

В дальнейшем через $C, c, C_1, \ldots$ будем обозначать постоянные, каждый раз, вообще говоря, различные, которые являются либо абсолютными, либо зависят от несущественных для рассуждений параметров. При необходимости эту зависимость будем указывать.

Для $A > 0$, $B > 0$ символ $A \preceq B$ означает порядковое неравенство, т. е. $A \le \le CB$. В случае одновременного выполнения неравенств $A \preceq B$ и $B \preceq A$ будем писать $A \asymp B$.

Пусть определенная на $(0, +\infty)$ функция $\gamma(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\gamma(x)$ монотонно возрастает и непрерывна на $(0, +\infty)$;
2) $\gamma(x) \to \infty$ при $x \to \infty$;
3) $\gamma(x)/x$ монотонно убывает к нулю при $x \to \infty$.

Введем следующую характеристику функции $\gamma(x)$:

$$\sigma(\gamma) = \varliminf_{x\to\infty} \frac{\ln\gamma(x)}{\ln x}.$$

Для $u>0$ через $G_{\xi,u}$ обозначим связную компоненту открытого множества $\{z \in G: |z-\xi| < u\}$, граница которой содержит точку ξ.

Класс аналитических в G функций f, для которых при некотором $u = u(f) > 0$ в области $G_f = G_{\xi,u}$

$$-\ln E_n(f, G_f) \geq c(f)\gamma(n), \tag{1}$$

обозначим через $\mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$. Пусть также при $\sigma \geq 0$

$$\mathcal{M}(G, \xi, \sigma) = \bigcup_{\gamma(x):\sigma(\gamma)\geq\sigma} \mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x)).$$

Соответствующие классы функций, определяемые скоростью глобальной аппроксимации (т. е. функций, удовлетворяющих (1) с $G_f = G$), обозначим через $\mathcal{M}(G, \gamma(x))$ и $\mathcal{M}(G, \sigma)$.

Отметим, что различные условия на $\gamma(x)$ приводят к рассмотрению хорошо известных в конструктивной теории функций классов. Например, при $\gamma(x) = \ln x$ в наиболее общей ситуации классы $\mathcal{M}(G, \gamma(x))$ описаны в [5] в терминах поведения локальных модулей гладкости; случай $\gamma(x) = x$ по известной теореме Бернштейна – Уолша сводится к исследованию функций, аналитических в более широкой области; при $\ln x = o(\gamma(x))$ классы функций с "промежуточной" скоростью полиномиального приближения изучались в [6] с точки зрения возможного их квазиконформного продолжения с заданной мажорантой характеристики квазиконформности.

В дальнейшем, рассматривая классы $\mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$, будем предполагать, что $\gamma(x)$ удовлетворяет также следующему условию:

4) при некотором $c > 0$ функция $\gamma(x)x^{-c}$ является неубывающей.

Условия 3 и 4 гарантируют, что для произвольных $v > u > 0$ справедливы соотношения

$$\left(\frac{v}{u}\right)^c \leq \frac{\gamma(v)}{\gamma(u)} \leq \frac{v}{u}$$

и, следовательно,

$$\frac{v}{u} \leq \frac{\gamma^{-1}(v)}{\gamma^{-1}(u)} \leq \left(\frac{v}{u}\right)^{1/c}. \tag{2}$$

Замечание. Непосредственно из обратных теорем (см., например, [7]) теории приближения следует, что при указанных ограничениях на $\gamma(x)$ функции классов $\mathcal{M}(G, \gamma(x))$ и их частные производные всех порядков непрерывны вплоть до границы области G. Кроме того, классы $\mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$ аддитивны. Поэтому условие квазианалитичности эквивалентно следующему: равенства

$$f^{(n)}(\xi) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

для какой-либо функции $f \in \mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$ возможны только в случае $f \equiv 0$ в G.

Пусть $\mathbb{D} = \{w: |w| < 1\}$ — единичный круг, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Считая, без ограничения общности, что $0 \in G$, через $\psi(w)$ обозначим функцию, конформно и однолистно отображающую $\mathbb{D}$ на G и нормированную условиями $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) > 0$, а через $\Psi(w)$ — конформное и однолистное отображение $\mathbb{D}' = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ на $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ с аналогичной нормировкой на бесконечности. Пользуясь теоремой

Каратеодори, продолжим ψ и Ψ до гомеоморфных отображений соответствующих замкнутых областей и обозначим через φ и Φ соответственно обратные к ним отображения.

Для локального модуля непрерывности в точке $z \in \mathfrak{M}$ непрерывной на множестве $\mathfrak{M}$ функции f воспользуемся обозначением $\omega(f, \mathfrak{M}, z, t)$:

$$\omega(f, \mathfrak{M}, z, t) = \sup_{\substack{w \in \mathfrak{M}, \\ |w - z| \le t}} |f(w) - f(z)|.$$

Для $u > 0$, как обычно, $\rho_u(z)$ будет обозначать расстояние от точки $z \in L$ до линии уровня $L_u = \{\zeta \in \Omega \colon |\Phi(\zeta)| = 1 + u\}$ порядка $1 + u$ функции $\Phi(z)$. Учитывая монотонность $\rho_u(z)$, при каждом $z \in L$ определим обратную к ней функцию $r(z, \delta)$, $\delta > 0$. Следующее свойство функции $\rho_u(z)$, выражающее ее нормальность, может быть легко выведено, например, из леммы 6 [8]. Непосредственное доказательство, основанное на оценках соответствующих модулей семейств отделяющих кривых, также достаточно элементарно и дает точное на классе всех континуумов со связным дополнением значение константы $\beta = 2$.

Лемма 1. *Существует абсолютная постоянная* $\beta > 0$ *такая, что для любых континуума* $\mathfrak{M}$ *со связным дополнением,* $z \in \partial\mathfrak{M}$ *и* $0 < u < v < 1$ *справедливо неравенство*

$$\frac{\rho_v(z)}{\rho_u(z)} \preceq \left(\frac{v}{u}\right)^{\beta}.$$

Для областей G с квазиконформной границей справедлива следующая лемма.

Лемма 2 (см. [8], лемма 2). *Пусть* $\zeta_k \in \overline{\Omega}$, $w_k = \Phi(\zeta_k)$, $k = 1, 2, 3$. *Тогда условия* $|\zeta_1 - \zeta_2| \preceq |\zeta_1 - \zeta_3|$ *и* $|w_1 - w_2| \preceq |w_1 - w_3|$ *эквивалентны и при этом выполняется неравенство*

$$\left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{\alpha} \preceq \left|\frac{\zeta_1 - \zeta_3}{\zeta_1 - \zeta_2}\right| \preceq \left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{\beta}, \tag{4}$$

в котором константы $\beta > \alpha > 0$ *зависят только от* L.

В дальнейшем будем использовать также D-свойство квазиконформных отображений: при K-квазиконформном отображении F, $F(\infty) = \infty$, плоскости на плоскость справедливо соотношение

$$\max_{w \colon |w - z| = r} |F(w) - F(z)| \le C(K) \min_{w \colon |w - z| = r} |F(w) - F(z)|.$$

Следующее утверждение вытекает из доказанной в [6] общей теоремы. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный континуум со связным дополнением.

Лемма 3. *Пусть функция* $\gamma(x)$ *удовлетворяет условиям* 1–4, $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{M}, \gamma(x))$. *Существует функция* $\tilde{f}(z)$, *бесконечно дифференцируемая в* $\mathbb{C}$, *с компактным носителем, со свойствами*:

а) $\tilde{f}(z) = f(z)$ *при* $z \in \mathfrak{M}$;

б) $\ln|\tilde{f}_{\bar{z}}(z)| \le -\kappa(C(|\Phi(z)| - 1))$ *при* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}$, *где функция* $\kappa(t)$ *находится из условия*

$$\kappa^{-1}(t)\gamma^{-1}(t) = C_0 t, \tag{5}$$

в котором C_0 — *абсолютная константа, а значение постоянной* C *зависит только от* $c(f)$ *в* (1) *и* c *в условии* 4.

2. Формулировка основных результатов. Основными результатами работы являются следующие две теоремы, устанавливающие достаточные и близкие к ним необходимые (для областей с квазиконформной границей) условия квазианалитичности классов $\mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$.

Теорема 1. *Класс* $\mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$ *является* (G, ξ)*-q. a. классом, если функция* $\kappa(t)$, *определенная из* (5), *удовлетворяет условию*

$$\omega\left(\psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), \frac{1}{\kappa(r(\xi,\delta))}\right) = o(\delta) \text{ при } \delta \to 0. \tag{6}$$

Пусть

$$\Lambda(G, \xi) = \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{\ln \rho_t(\xi)}{\ln t}, \quad \boldsymbol{\lambda}(G, \xi) = \underline{\lim_{t \to +0}} \frac{\ln \omega(\psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), t)}{\ln t}.$$

***Следствие* 1.** *Если* $\lambda(G, \xi) > 0$, *то класс* $\mathcal{M}(G, \xi, \sigma)$ *является* (G, ξ)*-q. a. классом при*

$$\sigma > \sigma_{G,\xi} = \frac{\Lambda(G,\xi)}{\Lambda(G,\xi) + \boldsymbol{\lambda}(G,\xi)}.$$

Различные условия, достаточные для выполнения соотношения $\boldsymbol{\lambda}(G, \xi) > 0$, т. е. локальной гельдеровости отображения $\psi(w)$, хорошо известны (см., например, [9–12]); в их числе: выполнение для области G условия клина, условия Джона, квазиконформность L.

***Следствие* 2.** *Если в некоторой окрестности точки* ξ *кривая* L *является квазиконформной, то класс* $\mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$ *является* (G, ξ)*-q. a. классом при выполнении условия*

$$\gamma_{G,\xi}(x) = o(\gamma(x)) \text{ при } x \to \infty, \tag{7}$$

где функция $\gamma_{G,\xi}(x)$ *определена соотношением*

$$\gamma_{G,\xi}(x) = \frac{1}{\left[r\omega(\Phi \circ \psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), t)\right]^{-1}(1/x)}.$$

В частности, класс $\mathcal{M}(G, \xi, \sigma)$ *является* (G, ξ)*-q.a. классом при* $\sigma > (2 - \lambda(G,\xi))/2$.

Будем говорить, что область G удовлетворяет в точке ξ условию (α, h)-клина, если существует клин $\Delta_\xi = \{z\colon |\arg(z - \xi) - \theta| < \alpha\pi/2,\ |z - \xi| < h\}$ такой, что $\Delta_\xi \subset G$.

***Следствие* 3.** *Если область* G *удовлетворяет в точке* ξ *условию* (α, h)*- клина, то класс* $\mathcal{M}(G, \xi, \sigma)$ *является* (G, ξ)*-q. a. классом при* $\sigma > (2 - \alpha)/2$.

***Следствие* 4.** *Если кривая* $L = \partial G$ *имеет в точке* ξ *касательную, то класс* $\mathcal{M}(G, \xi, \sigma)$ *является* (G, ξ)*-q. a. классом при* $\sigma > 1/2$.

***Следствие* 5.** *Если область* G *удовлетворяет в точке* ξ *локальному* $\mathrm{Lip}(\alpha)$*-условию,* $0 < \alpha < 1$, *(см. [13]), то класс* $\mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$ *является* (G, ξ)*-q. a. классом при* $\gamma(x) \succeq x \left(\ln x\right) C^{-\beta/(2(1-\beta))}$ *при любом* $\beta < \alpha$.

Утверждения, аналогичные теореме 1 и следствиям из нее, справедливы для G-*q. a.* классов $\mathcal{M}(G, \gamma(x))$ и $\mathcal{M}(G, \sigma)$ при естественной замене локальных характеристик границы в точке ξ глобальными.

Отметим, что для G-*q. a* классов $\mathcal{M}(G, \gamma(x))$ справедлива теорема единственности, т. е. из совпадения функций f и g на некотором бесконечном множестве $T \subset \overline{G}$ следует $f \equiv g$ в $\overline{G}$. Поэтому полученные результаты обобщают и усиливают одно утверждение С. Н. Мергеляна [4] (теорема 7.6), в котором для $G = \mathbb{D}$ достаточным условием наличия в классе $\mathcal{M}(G, \gamma(x))$ теоремы единственности является $\gamma(x) = x/\ln x$.

О точности полученных результатов свидетельствует следующая теорема.

Теорема 2. *В условиях следствия* 2 *на границу области* G *при* $\gamma(x) = x^{-\varepsilon}\gamma_{G,\xi}(x)$ *класс* $\mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$ *не является* (G, ξ)*-q. a. классом для любого* $\varepsilon > 0$.

Таким образом, для областей, граница которых локально квазиконформна в окрестности ξ, функция $\gamma_{G,\xi}(x)$ является, в определенном смысле, критической.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $\gamma(x)$ удовлетворяет условию (6) и для функции f из класса $\mathcal{M}(G, \xi, \gamma(x))$ выполнено (3). Положив в лемме 3 $\mathfrak{M} = \overline{G}_f$, построим продолжение $\tilde{f}(z)$ этой функции, для которого справедливо соотношение б). По формуле Коши – Грина при $z \in \overline{G}_f$

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \tilde{f}_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta - z}.$$

Отметим, что фактически в силу аналитичности f интегрирование производится по $\mathbb{C}\setminus G_f$. Следовательно, при $z \in G_f$

$$f^{(n)}(z) = -\frac{n!}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \tilde{f}_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Отсюда предельным переходом под знаком интеграла получаем

$$\iint_{\mathbb{C}} \tilde{f}_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta - \xi)^{n}} = 0$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому, используя представление ядра Коши

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(z-\xi)^s}{(\zeta-\xi)^{s+1}} + \frac{(z-\xi)^n}{(\zeta-\xi)^n(\zeta - z)},$$

при $z \in G_f$ имеем

$$f(z) = -\frac{(z-\xi)^n}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \tilde{f}_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta-\xi)^n(\zeta - z)}.$$

В дальнейшем для обозначения отображающей функции Римана, ее линий уровня и т. д. для области G_f к введенным ранее обозначениям будем добавлять индекс f. Таким образом, имеем

$$|f(z)| \preceq |z-\xi|^n \iint_{\mathbb{C}} |\tilde{f}_{\bar{\zeta}}(\zeta)|\,\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-\xi|^n|\zeta - z|} \preceq \int_0^1 e^{-\kappa(Cu)}\Big[\int_{L_{f,u}} \frac{|d\zeta|}{|\Phi'_f(\zeta)||\zeta-\xi|^n|\zeta - z|}\Big]du.$$

Поскольку при $\zeta \in L_{f,u}$

$$|\Phi'_f(\zeta)| \succeq \frac{u}{d(\zeta, L_f)} \succeq u, \quad |\zeta - z| \succeq d(\zeta, L_f) \succeq u^2, \quad \operatorname{mes} L_{f,u} \preceq \frac{1}{u}$$

и $|\zeta - \xi| \succeq \rho_{f,u}(\xi)$, обозначая $\kappa^{-1}(n)/C$ через κ_n, получаем

$$|f(z)| \preceq |z-\xi|^n \int_0^1 e^{-\kappa(Cu)}\frac{du}{u^4(\rho_{f,u}(\xi))^n} \le$$

$$\le \frac{1}{(\rho_{f,\kappa_n}(\xi))^n}\int\limits_{\kappa_n}^{1} e^{-\kappa(Cu)}\frac{du}{u^4} + \int\limits_{0}^{\kappa_n} e^{-\kappa(Cu)}\frac{du}{u^4(\rho_{f,u}(\xi))^n}. \tag{8}$$

Отметим, что в силу условия 4 на $\gamma(x)$ при любом $A<\infty$ $\int_0 e^{-\kappa(u)}u^{-A} < \infty$. Кроме того, непосредственно из (2) следует, что при $v>u>0$

$$\frac{\kappa^{-1}(u)}{\kappa^{-1}(v)} = \frac{C_0 u}{\gamma^{-1}(u)}\,\frac{\gamma^{-1}(v)}{C_0 v} \le \left(\frac{v}{u}\right)^{1/c-1}.$$

Поэтому, учитывая лемму 1, для второго интеграла в (8) получаем оценку

$$I \preceq \left(\frac{C_1}{\rho_{f,\kappa_n}(\xi)}\right)^n \int\limits_0^{\kappa_n} e^{-\kappa(Cu)}u^{-4}\left(\frac{\kappa_n}{u}\right)^{\beta n}du \le \left(\frac{C_1}{\rho_{f,\kappa_n}(\xi)}\right)^n \kappa_n^{\beta n}\int\limits_0^{\kappa_n} e^{-\kappa(Cu)}\frac{du}{u^{\beta n+4}} \preceq$$

$$\preceq \left(\frac{C_2}{\rho_{f,\kappa_n}(\xi)}\right)^n \kappa_n^{\beta n}\left(\frac{e^{-n}}{\kappa_n^{\beta n+3}} + \int\limits_n^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{(\kappa^{-1}(t))^{\beta n+3}}\right) \preceq$$

$$\preceq \left(\frac{C_3}{\rho_{f,\kappa_n}(\xi)}\right)^n \kappa_n^{-3}\left(e^{-n} + \int\limits_n^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{n}\right)^{(1/c-1)(\beta n+3)}dt\right) \preceq \left(\frac{C_4}{\rho_{f,\kappa^{-1}(n)}(\xi)}\right)^n.$$

Следовательно,

$$|f(z)| \preceq \left(\frac{C_4|z-\xi|}{\rho_{f,\kappa^{-1}(n)}(\xi)}\right)^n.$$

Считая для удобства, что $\varphi_f(\xi)=1$, полагаем для $k=1,2,\ldots$ $l_k=\{w=e^{i\theta}: 2^{-k-1}\le |\theta| \le 2^{-k}\}$. Тогда, применяя полученную оценку к функции $g(w) = f(\psi_f(w))$ при $n=2^k$ и $w\in l_k$, заключаем, что всюду на $\mathbb{T}$

$$\ln|g(e^{i\theta})| \preceq \frac{1}{|\theta|}\ln\frac{C_4\omega(\psi_f,\mathbb{T},1,|\theta|)}{\rho_{f,\kappa^{-1}(1/|\theta|)}(\xi)} + C_5.$$

Поскольку при достаточно малых $t>0$ $\omega(\psi_f,\mathbb{T},1,t)\asymp\omega(\psi,\mathbb{T},\varphi(\xi),t)$ и $\rho_{f,u}(\xi)\asymp\rho_u(\xi)$, условие

$$\frac{\omega(\psi,\mathbb{T},\varphi(\xi),t)}{\rho_{\kappa^{-1}(1/t)}(\xi)} \to 0, \quad t\to+0, \tag{9}$$

влечет $\int_0 \ln|g(e^{i\theta})|\,d\theta = -\infty$ и, согласно одной теореме Сеге [14], $g(w)\equiv 0$ в $\mathbb{D}$. Поскольку (9) эквивалентно (6), теорема 1 доказана.

Для доказательства следствия 1 заметим, что для любого $\varepsilon>0$ при достаточно малых t

$$\omega(\psi,\mathbb{T},\varphi(\xi),t) \le t^{\lambda(G,\xi)-\varepsilon}, \quad \rho_t(\xi) \ge t^{\lambda(G,\xi)+\varepsilon}.$$

С другой стороны, для любой функции $\gamma(x)$ такой, что $\sigma(\gamma)\ge\sigma$, при достаточно больших x $\gamma(x)\ge x^{(\sigma_{G\xi}+\sigma)/2}$ и, следовательно, $\kappa^{-1}(x)\succeq x^{1-2/(\sigma_{G\xi}+\sigma)}$. Несложно показать, что условие (6) выполняется, если

$$\Lambda(G,\xi) + \lambda(G,\xi) - \Lambda(G,\xi)\frac{2}{\sigma_{G,\xi}+\sigma} > \frac{2\varepsilon}{\sigma_{G,\xi}+\sigma}.$$

Отметим, что последнее неравенство справедливо для произвольного $\varepsilon < (\Lambda(G,\xi)+\lambda(G,\xi))(\sigma-\sigma_{G\xi})/2$. Т. е. любой класс $\mathcal{M}(G,\xi,\gamma(x))$ является

(G, ξ)-*q. a.* классом.

Для доказательства следствия 2 прежде всего отметим, что поскольку оценки искажения расстояний при конформных отображениях [15] имеют локальный характер, соотношения (4) остаются справедливыми и в условиях следствия в достаточно малой окрестности точки ξ. Поэтому из леммы 2 и аналогичного утверждения для отображения $\varphi(z)$ следует нормальность локальных модулей непрерывности всех четырех отображений ψ, φ, Ψ, Φ и их суперпозиций. В частности,

$$\left(\frac{v}{u} \right)^{C_1} \preceq \frac{\omega(\Phi \circ \psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), v)}{\omega(\Phi \circ \psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), u)} \preceq \left(\frac{v}{u} \right)^{C_2}, \tag{10}$$

$v > u > 0$, где C_i, $i = 1, 2$, зависят только от L. Кроме того, возможность квазиконформного продолжения отображений Φ и φ через указанную квазиконформную дугу границы L позволяет говорить о том, что они имеют в этой окрестности D-свойство и, следовательно, выполняются неравенства:

i) $\rho_t(\xi) \asymp \omega(\Psi, \mathbb{T}, \Phi(\xi), t)$; ii) $\omega^{-1}(\Phi, L, \xi, t) \asymp \omega(\Psi, \mathbb{T}, \Phi(\xi), t)$.

Отсюда, в частности, следует

$$r(\xi, t) \asymp \omega^{-1}(\Psi, \mathbb{T}, \Phi(\xi), t) \asymp \omega(\Phi, L, \xi, t),$$

$$r(\xi, \omega(\psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), t)) \asymp \omega(\Phi \circ \psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), t).$$

Несложные выкладки приводят к соотношению

$$\left(\frac{\omega(\psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), t)}{\rho_{\kappa^{-1}(\psi t)}(\xi)} \right)^{C_1} \preceq t\,\omega(\Phi \circ \psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), t)\, \gamma^{-1}(1/t) \preceq \left(\frac{\omega(\psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), t)}{\rho_{\kappa^{-1}(\psi t)}(\xi)} \right)^{C_2},$$

в котором C_i, $i = 1, 2$, зависят от α и β в (4). Поэтому условие (9) и, следовательно, (6) в данном случае эквивалентны

$$t\,\omega(\Phi \circ \psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), t)\, \gamma^{-1}(1/t) \to 0, \quad t \to +0. \tag{11}$$

С другой стороны, из (10) следует

$$(\gamma_{G,\xi}(x)/\gamma(x))^{C_3} \preceq (x/\gamma_{G,\xi}(x))\,\omega\Big(\Phi \circ \psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), 1/\gamma(x) \Big) \preceq (\gamma_{G,\xi}(x)/\gamma(x))^{C_4}$$

и в условиях следствия 2 справедливо (11). Далее, поскольку $\omega(\psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi)\, t) \preceq$ $\preceq C(\lambda) t^{\lambda}$ при любом $\lambda < \lambda(G, \xi)$, то пользуясь методами [12], нетрудно установить, что известные для квазидиска соотношения между глобальными модулями непрерывности отображений ψ и Φ [12, 16] выполняются и для локальных модулей. А именно: $\omega(\Phi, L, \xi\, t) \preceq t^{1/(2-\lambda)}$. Следовательно, $\gamma_{G,\xi}(x) \leq$ $\leq C(\lambda) x^{(2-\lambda)/2}$. Отсюда в силу произвольности λ заключаем, что условие (7) выполняется при любом $\sigma > (2 - \lambda(G, \xi))/2$.

Справедливость следствия 3 вытекает из следующих соображений. Поскольку $\mathcal{M}(G, \xi, \sigma) \subset \mathcal{M}(\Delta_\xi, \xi, \sigma)$, достаточно установить квазианалитичность последнего класса. Но $\Lambda(\Delta_\xi, \xi) = 2 - \alpha$, $\lambda(\Delta_\xi, \xi) = \alpha$ и, применяя следствие 1, завершаем доказательство.

Для доказательства следствия 4 достаточно заметить, что существование в точке ξ касательной к L влечет выполнение в этой точке условия $(\alpha, h(\alpha))$-клина при любом $\alpha < 1$, и воспользоваться следствием 3.

Применение локальных оценок искажения расстояний при конформных отображениях [15] позволяет заключить, что в условиях следствия 5 $\omega(\psi, \mathbb{T}, \varphi(\xi), t) \preceq (\ln C/t)^{-\alpha/(1-\alpha)}$. С другой стороны, для любого континуума со связным дополнением справедлива оценка (см., например, [7]) $\rho_u(\xi) \succeq u^2$. Несложно показать, что (6) выполняется при $\beta < \alpha$.

4. ***Доказательство теоремы 2.*** Рассуждения, приведенные при доказательстве следствия 2, позволяют считать в дальнейшем (для упрощения рассуждений), что квазиконформной является вся кривая L. Будем также считать, что $\Phi(\xi) = \varphi(\xi) = 1$. По крайней мере, этого нетрудно добиться соответствующей нормировкой отображений.

Пусть для $\theta \in (0, 1/2)$ $\bar{\Delta}_\theta = \{w\colon |\arg(w-1)| \leq \frac{\pi}{2}(1-\theta)\}$, $\gamma_\theta = \partial\Delta_\theta$, $\gamma_\theta^+ = \gamma_\theta \cap \cap \{\operatorname{Im} w > 0\}$, $\gamma_\theta^- = \gamma_\theta \setminus \gamma_\theta^+$, $\Omega_\theta = \Psi(\Delta_\theta)$, $G_\theta = \mathbb{C} \setminus \Omega_\theta$, $l_\theta = \partial G_\theta$, $l_\theta^\pm = \Psi(\gamma_\theta^\pm)$. Дуга l_θ является квазиконформной как образ квазиконформной дуги γ_θ при отображении $\Psi(w)$, допускающем (см., например, [15]) квазиконформное продолжение до отображения плоскости на плоскость. Кроме того, при указанных значениях θ коэффициенты квазиконформности дуг l_θ равномерно ограничены. Отметим далее, что каждая из дуг $l_\theta^\pm$ является квазигладкой по Лаврентьеву. При $\theta = 1$ этот факт установлен, например, в [17]. В общем случае доказательство аналогично. Поэтому из квазиконформности l_θ легко следует ее квазигладкость. Пусть конформное и однолистное отображение $\varphi_\theta(z)$ области G_θ на $\mathbb{D}$ продолжено до гомеоморфизма замкнутых областей и нормировано условиями $\varphi_\theta(0) = 0$, $\varphi_\theta(\xi) = 1$, $D_\theta = \varphi_\theta(G)$.

Из леммы 2 следует, что при $\zeta \in L$

$$\theta^\beta \preceq d(\zeta, l_\theta)/|\zeta - \xi| \preceq \theta^\alpha. \tag{12}$$

Поскольку при отображении φ_θ в окрестности точки ξ также справедливо утверждение, аналогичное лемме 2, то из (12) вытекает, что при $w \in \partial D_\theta$

$$\theta^{\beta_1} \preceq d(w, \mathbb{T})/|w-1| \preceq \theta^{\alpha_1}, \tag{13}$$

где $\beta_1 > \alpha_1 > 0$ зависят только от L. Следовательно, считая θ достаточно малым, заключаем, что при некотором $h = h(\theta) > 0$ сектор $\Delta = \{w\colon |\arg(w-1)| > > \frac{\pi}{2}(1 + C_1\theta^{\alpha_1}),\ |w-1| < h\}$ лежит в D_θ. Пусть $\zeta \in G$ такова, что $\varphi_\theta(\zeta) \in \Delta$. Обозначая через $m_0(\zeta, \xi, \Omega_\theta)$ и $m_0(\varphi_\theta(\zeta), 1, \mathbb{D})$ приведенные относительно нуля модули семейств кривых, отделяющих указанные точки от нуля в соответствующих областях [15], получаем

$$m_0(\zeta, \xi, \Omega_\theta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{c} + m_0(\varphi_\theta(\zeta), 1, \mathbb{D}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{c} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{C}{|\varphi_\theta(\zeta)-1|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{c} + (1 - C_1\theta^{\alpha_1})\,\frac{1}{(1-C_1\theta^{\alpha_1})\pi}\ln\frac{C}{|\varphi_\theta(\zeta)-1|} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{c} + (1 - C_1\theta^{\alpha_1})\, m_0(\varphi_\theta(\zeta), 1, D_\theta) - C_2 \geq (1 - C_1\theta^{\alpha_1})\, m_0(\zeta, \xi, G) - C_2,$$

где $c = c(\Omega_\theta)$ — конформный радиус Ω_θ. Поэтому из локальных оценок искажения расстояний при конформных отображениях [15] имеем

$$|\varphi_\theta(\zeta) - 1| \leq C_3|\varphi(\zeta) - 1|^{\nu(\theta)},$$

где $\nu(\theta) = 1 - C_1\theta^{\alpha_1}$. Учитывая D-свойство квазиконформных отображений, получаем $\omega(\varphi_\theta, l_\theta, \xi, t) \preceq \omega(\varphi, L, \xi, t)^{\nu(\theta)}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Определим функцию f_θ следующим образом:

$$f_\theta(z) = \begin{cases} (z-\xi)\exp\left(\dfrac{1}{\varphi_\theta(z)-1}\right), & z\in\overline{G}_{\theta/2}\setminus\{\xi\}; \\ 0, & z=\xi. \end{cases}$$

Заметим, что соотношение (13) выполняется и при $w \in \varphi_\theta(l_{\theta/2})$. В частности, на этой кривой при w, достаточно близких к 1, справедливо $\operatorname{Re}(1-w) \succeq \theta^{\beta_1}|w-1|$. Поэтому для $z \in \overline{G}_{\theta/2}$, $|z-\xi| \le t$ при достаточно малых $t>0$

$$\left|\frac{f_\theta(z)}{z-\xi}\right| = \exp\left(\operatorname{Re}\frac{1}{\varphi_\theta(z)-1}\right) \preceq \exp\left(-\frac{c_1(\theta)}{|\varphi_\theta(z)-1|}\right)$$

и, следовательно, полагая $f_\theta(z)/(z-\xi)\big|_{z=\xi}=0$, имеем

$$\omega(f_\theta(z)/(z-\xi), l_{\theta/2}, \xi, t) \le \exp\left(-\frac{c_2(\theta)}{\omega(\varphi, L, \xi, t)^{\nu(\theta)}}\right).$$

Для $u>0$ через z_u^1 и z_u^2 обозначим точки пересечения $l_{\theta/2}$ с линией уровня L_{2u}. Поскольку по лемме 2 для $i=1,2$

$$\frac{|z_u^i-\xi|}{\rho_{2u}(\xi)} \preceq \left(\frac{|\Phi(z_u^i)-1|}{2u}\right)^\beta \preceq \theta^{-\beta},$$

учитывая квазигладкость $l_{\theta/2}$ и лемму 1, для $\tilde{l}$-части $l_{\theta/2}$, заключенной между z_u^1 и z_u^2, получаем

$$\operatorname{mes}\tilde{l} \preceq C_4(\theta)\rho_u(\xi). \tag{14}$$

Пусть $\Gamma=\partial(G_{\theta/2}\cap\operatorname{Int}L_{2u})$. Для оценки $E_n(f_\theta, G)$ воспользуемся формулой Коши

$$f_\theta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f_\theta(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\tilde{l}} + \int\limits_{\Gamma\setminus\tilde{l}}\right)\frac{f_\theta(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = f_u^1(z) + f_u^2(z),$$

$z \in \overline{G}\setminus\{\xi\}$. Функция $f_u^2(z)$ аналитична вплоть до линии уровня L_{2u} области G. Поскольку L_{2u} является для области $\operatorname{Int}L_u$ линией уровня порядка $u/(1+u)$, при $z \in L_u$ $d(z, L_{2u}) \succeq u^2$. Поэтому

$$\int\limits_{L_u}|f_u^2(\zeta)|\,|d\zeta| \le \operatorname{mes}L_u\|f_u^2\|_{C(L_u)} \preceq \frac{1}{u}\max_{z\in L_u}\int\limits_{\Gamma\setminus\tilde{l}}\frac{|f_\theta(\zeta)|}{|\zeta-z|}\,|d\zeta| \preceq u^{-4}\|f_\theta\|_{C(G)} \preceq u^{-4}\operatorname{diam}G.$$

По одной теореме С. Н. Мергеляна (см., например, [18], гл. II, § 1, теорема 3.3) заключаем, что

$$E_n(f_u^2, G) \preceq n^k u^{-6}(1+u)^{-n}, \tag{15}$$

где k — некоторая абсолютная постоянная. С другой стороны, при $\zeta \in l_{\theta/2}$, $z \in \overline{G}$ из леммы 2 аналогично (12) имеем $|\zeta-z| \ge d(\zeta, L) \succeq \theta^\beta|\zeta-\xi|$. Поэтому, учитывая (14), неравенство $\operatorname{diam}\tilde{l} \le \operatorname{mes}\tilde{l}$, нормальность локального модуля непрерывности $\omega(\varphi, L, \xi, t)$ и соотношения i), ii), получаем

$$|f_u^1(z)| \preceq C_5(\theta)\int\limits_{\tilde{l}}\frac{|f_\theta(\zeta)|}{|\zeta-\xi|}\,|d\zeta| \preceq C_6(\theta)\exp\left(-\frac{c_3(\theta)}{\omega(\varphi, L, \xi, \rho_u(\xi))^{\nu(\theta)}}\right) \preceq$$

$$\preceq C_6(\theta)\exp\left(-\frac{c_4(\theta)}{\omega(\varphi\circ\Psi, \mathbb{T}, 1, u)^{\nu(\theta)}}\right). \tag{16}$$

Пусть $u = u(x)$ — решение уравнения $u\omega(\varphi\bullet\Psi, \mathbb{T}, 1, u)^{\nu(\theta)} = x^{-1}$. Тогда с учетом гельдеровости отображений φ и Ψ из (15) и (16) имеем $-\ln E_n(f_\theta, G) \succeq c_5(\theta)\gamma(n)$ при

$$\gamma(x) = \frac{1}{\omega(\varphi\circ\Psi, \mathbb{T}, 1, u(x))^{\nu(\theta)}}.$$

Отсюда, учитывая ii), заключаем, что $u(x) \asymp \omega\left(\Phi\bullet\psi, \mathbb{T}, 1, (\gamma(x))^{-1/\nu(\theta)}\right)$. Пользуясь определениями $u(x)$ и $\gamma(x)$, несложно получить соотношение

$$\gamma^{-1}(\delta^{-\nu(\theta)})\delta^{\nu(\theta)}\omega(\Phi\bullet\psi, \mathbb{T}, 1, \delta) \asymp 1.$$

Поскольку из (10) следует, что $\gamma^{-1}(\delta^{-\nu(\theta)}) \succeq \gamma^{-1}(\delta^{-1})\,\delta^{(1-\nu(\theta))/c_7}$, имеем

$$\gamma^{-1}(\delta^{-1}) \preceq \frac{1}{\delta^{1+s(\theta)}\omega(\Phi\circ\psi, \mathbb{T}, 1, \delta)},$$

$s(\theta) \to 0$ при $\theta \to 0$. Отсюда

$$\gamma(x) \succeq \left(\left(r\omega(\Phi\bullet\psi, \mathbb{T}, 1, r\right)^{-1}(1/x)\right)^{-1/(1+s(\theta))} \succeq \gamma_{G,\xi}(x)x^{-s(\theta)/(1+s(\theta))} \succeq \gamma_{G,\xi}(x)x^{-\varepsilon}$$

при достаточно малом $\theta = \theta(\varepsilon) > 0$.

В то же время нетрудно установить, что функция f_θ может быть доопределена соотношениями (3) до бесконечно дифференцируемой в $\overline{G}$ функции. Теорема 2 доказана.

1. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. – М.: ОНТИ, 1937. – 108 с.
2. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 267 с.
3. *Бадалян Г. В.* Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций.– М.: Наука, 1990. – 208 с.
4. *Мергелян С. Н.* Некоторые вопросы конструктивной теории функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **37**. – С. 3–91.
5. *Андриевский В. В.* Описание классов функций с заданной скоростью убывания их наилучших равномерных полиномиальных приближений // Укр. мат. журн.– 1984.– **36**, № 5.– С. 602–606.
6. *Белый В. И., Маймескул В. В.* О конструктивной характеристике классов функций, допускающих квазиконформное продолжение // Тр. Мат. ин-та АН СССР.– 1987.– **180**.– С. 53–54.
7. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.– Киев: Наук. думка, 1975.– 270 с.
8. *Андриевский В. В.* Аппроксимационная характеристика классов функций на континуумах комплексной плоскости // Мат. сб. – 1984. – **125**, № 1. – С. 70–87.
9. *Becker J., Pommerenke Ch.* Hölder continuity of conformal mappings and non-quasiconformal Jordan curves // Comment. math. helv. – 1982. – **57**. – P. 221–225.
10. *Lesley F. D.* Conformal mappings of domains satisfying wedge condition // Proc. Amer. Math. Soc.– 1985.– **93**, № 3. – P. 483–488.
11. *Gaier D.* Estimates of conformal mappings near the boundary // Indiana J. Math.– 1972.– **27**, № 7.– P. 581–595.
12. *Белый В. И.* О модулях непрерывности внешнего и внутреннего конформных отображений единичного круга // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 469–475.
13. *Johnston E.* Growth of derivatives and the modulus of continuity of analytic functions // Rocky Mth. J. Math.– 1979. – **9**, № 4. – P. 671–682.
14. *Szegö G.* Rendwerte einer analytischen funktion // Math. Ann. – 1921. – **84**.
15. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сб. – 1977. – **102**, № 3. – С. 331–361.
16. *Lesley F. D.* On interior and exterior conformal mappings of the disk // J. London Math. Soc. (I).– 1979. – **20**. – P. 67–78.
17. *Андриевский В. В.* О приближении функций гармоническими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1987. – **51**, № 1. – С. 3–15.
18. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.; Л.: Наука, 1964. – 436 с.

Получено 22.10.92