УДК 517. 956

И. И. Скрыпник. канд. физ.-мат. наук
(Ин–т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Properties of solutions of parabolic equations in smooth cylindrical domains are studied. Conditions for existence of boundary non-tangents and L_2-limits as $t \to 0$ are found.

Вивчаються властивості розв'язків параболічних рівнянь в гладких циліндричних областях. Встановлено умови існування граничних недотичних та L_2-границь, якщо $t \to 0$.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения. Точки пространства R^n будем обозначать через $x = (x_1,\ldots, x_n)$. Положим $R_+^{n+1} = \{(x, t)$: $x \in R^n, t > 0\}$. В R_+^{n+1} рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x, t), a_i(x, t)$ и $a_0(x, t)$ непрерывны вместе с первыми производными по x и t, $i, j = 1,\ldots, n$; $f(x, t)$ непрерывна вместе с первыми производными по t и вторыми производными по x, и выполнено неравенство

$$\nu_0 \,|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \nu_0|\xi|^2 \tag{2}$$

для всех $(x, t) \in R_+^{n+1}$, $\xi \in R^n$, $\nu_0 = \text{const} < \infty$.

Под решением понимаем классическое решение из $C_x^2 \cap C_t^1$. Все результаты работы могут быть сформулированы для гладкой цилиндрической области. Здесь же для простоты изложения будем рассматривать полупространство R_+^{n+1}. Для любого $a > 0$ положим

$$\Gamma_a(x) = \{(s,\tau) \in R_+^{n+1}\colon |s-x| < a\sqrt{\tau}\}. \tag{3}$$

Если W — произвольное множество из R_+^{n+1}, положим

$$N_{W,a}(x) = \sup\{|u(s,\tau)|, (s,\tau) \in \Gamma_a(x) \cap W\}, \tag{4}$$

$$D_{W,a}(x) = \sup\left\{\sqrt{\tau}\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right| + \tau\left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|, (s,\tau) \in \Gamma_a(x) \cap W\right\}, \tag{5}$$

$$A_{W,a}(x) = \left\{\int\limits_{W \cap \Gamma_a(x)} \tau^{(1-n)/2}\left|\frac{\partial u(s,\tau)}{\partial s}\right|^2 ds\,d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

$$F_{W,a}(x) = \sup\left\{\sqrt{\tau}|f(s,\tau)| + \tau\left(\left|\frac{\partial^2 f(s,\tau)}{\partial s^2}\right| + \left|\frac{\partial f(s,\tau)}{\partial \tau}\right|\right), (s,\tau) \in \Gamma_a(x) \cap W\right\}. \tag{7}$$

Если множество W ограничено и $\tau_s = \sup\{\tau, (s, \tau) \in W\}$, определим

$$N^0_{W,a}(x) = \sup\{|u(s,\tau) - u(s,\tau_s)|, (s,\tau) \in \Gamma_a(x) \cap W\}. \tag{8}$$

Определение. *Будем говорить, что функция $u(x, t)$, определенная в R_+^{n+1}, нетангенциально ограничена в точке $x \in R^n$, если существуют положительные a и h такие, что*

$$\sup|u(x,t)| < \infty, (x,t) \in \Gamma_{a,h}(x_0), \tag{9}$$

где $\Gamma_{a,h}(x_0) = \Gamma_a(x_0) \cap \{\tau < h\}$.

В работе используется метод, предложенный Д.Л. Бухгольдером и Р.Ф. Ганди в [1], для уравнения Лапласа, который был развит В.Ю. Шелеповым для эллиптических уравнений в негладких областях в [2], и автором — для параболических уравнений в [3].

В дальнейшем через $C(\,)$ будем обозначать всевозможные постоянные, зависящие лишь от величин, указанных в скобках. Положим

$$A = \max_{(x,t)\in R_+^{n+1}} \left\{ \sum_{i=0}^{n} \left[|a_i(x,t)| + \sum_{m=1}^{n} \left| \frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_m} \right| \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} \left[|a_{ij}(x,t)| + \sum_{m=1}^{n} \left| \frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial x_m} \right| \right] \right\}.$$

Пусть G — открытое ограниченное множество в R^n, $\mathcal{P} = \operatorname{int}\left\{R_+^{n+1} \,|\, \bigcup_{x\notin G} \Gamma_a(x)\right\}$.

Теорема 1. *Пусть* $u(x,t)$ *— решение уравнения* (1) *в* $\mathcal{P}$. *Для произвольных* $\alpha, \beta \in (1,\infty)$, $a>0, \omega>0, \rho>0$ *можно указать такие* $\gamma = \gamma(A,\alpha,\beta,a)$, $\delta = \delta(A,\alpha,\beta,a)$, $r_0 = r_0(A,\alpha,\beta,a,\omega,\rho)$, *что при* $\operatorname{diam} G < r_0$ *выполнено неравенство*

$$\alpha \operatorname{mes}\left\{ N^0_{\mathcal{P},a} > \beta\lambda \right\} < \operatorname{mes}\left\{ N^0_{\mathcal{P},a} > \lambda \right\} + \alpha\,[C(n) \operatorname{mes}\{A_{\mathcal{P},a} > \gamma\lambda\} +$$

$$+ \operatorname{mes}\{D_{\mathcal{P},a} > \delta\lambda\} + \operatorname{mes}\{F_{\mathcal{P},a} > \rho\lambda\} + \operatorname{mes}\{N_{\mathcal{P},a} > \omega\lambda\}] \tag{10}$$

для всех $\lambda > 0$.

Теорема 2. *Пусть* $u(x,t)$ *— решение уравнения* (1) *в* $\mathcal{P}$. *Для произвольных* $\alpha, \beta \subset (1,\infty)$, $\rho, \alpha > 0$ *найдутся такие* $\gamma = \gamma(A,\lambda,\beta,a,\rho)$, $r_0 = r_0(A,\alpha,\beta,a,\rho)$, $\delta = \delta(A,\alpha,\beta,a,\rho)$, *что при* $\operatorname{diam} G < r_0$ *выполнено неравенство*

$$\lambda \operatorname{mes}\{A_{\mathcal{P}a} > \beta\lambda\} < \operatorname{mes}\{A_{\mathcal{P},a} > \lambda\} + \alpha\,[\operatorname{mes}\{N_{\mathcal{P},a} > \gamma\lambda\} +$$

$$+ \operatorname{mes}\{D_{\mathcal{P},a} > \delta\lambda\} + \operatorname{mes}\{F_{\mathcal{P},a} > \rho\lambda\}] \tag{11}$$

для всех $\lambda > 0$.

2. Формулировка основных результатов. Пусть $\Gamma_{a,h,H}(x) = \Gamma_a(x) \cap \{h < t < H\}$. Определим $A_{h,a}(x), F_{h,a}(x), N_{h,H,a}(x)$ аналогично тому, как это сделано в п.1 с заменой W на $\Gamma_{a,h}(x)$ и $\Gamma_{a,h,H}(x)$ соответственно.

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t)$ *— решение уравнения* (1) *в* R_+^{n+1}. *Тогда если* $u(x,t)$, $\sqrt{t}\,|f(x,t)| + t\left(\left|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|\right)$ *нетангенциально ограничены в каждой точке множества* $E \subset R^n$, $\operatorname{mes} E > 0$, *то для всех* a, h $A_{h,a}(x)$ *конечна почти всюду на* E *и для почти всех* $x_0 \in E$ *существует конечный нетангенциальный предел*

$$\lim u(x,t) < \infty, (x,t) \to (x_0, 0), (x,t) \in \Gamma_a(x_0). \tag{12}$$

Теорема 4. *Пусть для решения* $u(x,t)$ *уравнения* (1) *в* R_+^{n+1} *при некоторых* $H>0$, $a>0$, $h \in (0, h_0)$, *где* h_0 *зависит лишь от известных величин, выполнено неравенство*

$$\int_{0<t<H} \sqrt{t} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|^2 dxdt + \int_{R^n} F^2_{h,a}(x)dx + \int_{R^n} N^2_{h,H,a}(x)dx < \infty. \tag{13}$$

Тогда для почти всех $x \in R^n$ *существует конечный нетангенциальный предел* (12), *являющийся функцией* $u_0(x) \in L_2(R^n)$. *Причем если* $\{\varepsilon_k\}$, $k = 1,2,\ldots,$ — *последовательность чисел таких, что* $\varepsilon_k \to 0$ *при* $k \to \infty$, *то*

$$\sup_k \|u(x,\varepsilon_k)\|_{L_2(R^n)} < \infty, \tag{14}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|u(x,\varepsilon_k) - u_0(x)\|_{L_2(R^h)} = 0. \tag{15}$$

Теоремы 3, 4 — следствия теорем 1, 2; доказываются они так же, как в [1].

Отметим, что результат о существовании L_2-предела при $t \to 0$ для решений параболических уравнений имеется в [4], но там в качестве весовой функции при $\left|\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2$ используется не расстояние до плоскости $\{t = 0\}$, а расстояние до боковой поверхности цилиндрической области.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P} \cap \{t > \varepsilon^2\}$. Все рассуждения будем вести для $\mathcal{P}_\varepsilon$, а затем, устремив ε к нулю, получим требуемый результат.

Введем в расмотрение $\pi_{\gamma,\lambda,\varepsilon}(x) = \chi_{\left\{A_{\mathcal{P}_{\varepsilon,a}} > \gamma\lambda\right\}}(x)$, $\chi_F(x)$ — характеристическая функция множества F и

$$\pi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon}(x) = \sup\left\{\frac{1}{\operatorname{mes} B}\int_B \pi_{\gamma,\lambda,\varepsilon}(s)\,ds,\ B \ni x\right\},$$

где B — произвольный шар, содержащий x.

Далее, пусть

$$E = \left\{N^0_{\mathcal{P}_{\varepsilon,a}} > \beta\lambda,\ \pi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon} \le \frac{1}{2},\ D_{\mathcal{P}_{\varepsilon,a}} \le \delta\lambda,\ F_{\mathcal{P}_{\varepsilon,a}} \le \rho\lambda,\ N_{\mathcal{P}_{\varepsilon,a}} \le \omega\lambda\right\},$$

$$G_0 = \left\{N^0_{\mathcal{P}_{\varepsilon,a}} > \lambda\right\}.$$

Покажем, что при достаточно малых γ, δ, $\operatorname{diam} G$ выполнено неравенство

$$\alpha \operatorname{mes} E \le \operatorname{mes} G_0. \tag{16}$$

Тогда из (16) и оценки

$$\operatorname{mes}\left\{\pi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon} > \frac{1}{2}\right\} \le C(n)\left\|\pi_{\gamma,\lambda,\varepsilon}\right\|_{L_1(R^n)} = C(n)\cdot\operatorname{mes}\left\{A_{\mathcal{P}_{\varepsilon,a}} > \gamma\lambda\right\} \tag{17}$$

получим требуемое неравенство (10).

Неравенство (17) следует из теоремы 1, *б* [5, с. 15].

Докажем (16) от противного. Пусть

$$\operatorname{mes} G_0 < \alpha \operatorname{mes} E. \tag{18}$$

Так как G_0 — открытое ограниченное множество, причем $E \subset G_0$, то, используя соответствующее утверждение из [1], находим шар $B \subset G_0$, для которого

$$\operatorname{mes} B \le C_1(n)\,\alpha \operatorname{mes}\{E \cap B\} \tag{19}$$

и существует точка $x_0 \in \partial B$, такая, что $N^0_{\mathcal{P}_{\varepsilon,a}}(x_0) \le \lambda$. Не теряя общности считаем, что $B = B(0, r)$. Выберем $\xi = \xi(n, \alpha) \in (0, 1/2)$ так, чтобы для шара $B_0 = B(0, (1-2\xi)\, r)$ выполнялось $\operatorname{mes} B_0 = \{1 - 1/(2\alpha C_1)\}\operatorname{mes} B$. Тогда $\operatorname{mes} B \le 2\alpha C_1 \operatorname{mes}\{E \cap B_0\}$. Положим $E_0 = E \cap B_0$. Рассмотрим множества

$$V_\varepsilon^r = \{ (x,t) \in R_+^{n+1} : |x| < r - a\sqrt{t},\ t > \varepsilon^2 \}, \quad W_0 = \bigcup_{x \in E_0} \left\{ \Gamma_a(x) \cap V_\varepsilon^r \right\};$$

$$v(x,t) = u(x,t) - u\left(0, \frac{r^2}{a^2}\right), \ \theta = \frac{\beta - 1}{2}$$

Пусть

$$\delta < \frac{\xi^2}{14 + a\xi} \frac{\theta}{2}. \tag{20}$$

Дальнейшее доказательство теоремы 1 состоит из четырех утверждений.

Утверждение 1. *Для* $v(s,t)$ *справедлива оценка*

$$|v(s,t)| < \frac{2 + a\xi}{\xi^2} \delta\lambda, \ (s,t) \in \partial W_0^t = \Gamma_a(x) \cap \partial V_\varepsilon^r. \tag{21}$$

Если же выполнено условие (20), то

$$|v(s,t)| < \frac{\theta\lambda}{2}, \quad (s,t) \in \partial W_0^+, \tag{22}$$

$$\sup \{ |v(s,t)|, (s,t) \in \Gamma_a(x) \cap W_0 \} > \theta\lambda, \quad x \in E_0. \tag{23}$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in E_0$. Тогда

$$\sqrt{t} \left| \frac{\partial u(s,t)}{\partial s} \right| + t \left| \frac{\partial u(s,t)}{\partial t} \right| \le \delta\lambda, \ (s,t) \in \Gamma_a(x) \cap \mathcal{P}_\varepsilon. \tag{24}$$

Простые вычисления показывают, что для точек $(s,t) \in \Gamma_a(x) \setminus V_\varepsilon^r$ справедливо неравенство $t \ge (\xi r/a)^2$. Если $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in \overline{\Gamma_a(x)} \cap \overline{V_\varepsilon^r}$, то, используя неравенство (24), получаем

$$|v(s_1,t_1) - v(s_2,t_2)| \le \delta\lambda \left[\frac{|s_1 - s_2|}{\min\left(\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}\right)} + \frac{|t_1 - t_2|}{\min(t_1, t_2)} \right]. \tag{25}$$

Применяя неравенство (25) к точкам $(s_1, t_1) \in \partial W_0^+$ и $(s_2, t_2) = (0, r^2/a^2)$, получаем (21). Из (21) при условии (20) следует (22).

Докажем теперь (23). Введем множества

$$u_1 = \{ (s,t) \in \mathcal{P}_\varepsilon : |s| < a\sqrt{t} - r \}, \quad u_2 = \{ \Gamma_a(x) \cap \mathcal{P}_\varepsilon \} \setminus \left(V_\varepsilon^r \cup U_1 \right).$$

По определению E_0 и так как $\Gamma_a(x) \cap \mathcal{P}_\varepsilon \subset U_1 \cup U_2 \cup W_0$, имеем

$$\beta\lambda < N^0_{\mathcal{P}_\varepsilon, a}(x) \le N^0_{U_1, a}(x) + N^0_{U_2, a}(x) + N^0_{W_0, a}(x). \tag{26}$$

Из (19) для $x_0 \in \partial B$ имеем $N^0_{\mathcal{P}_\varepsilon, a}(x) \le \lambda$, а так как $U_1 \subset \Gamma_a(x_0) \cap \mathcal{P}_\varepsilon$, то получаем

$$N^0_{U_1, a}(x) \le N^0_{\mathcal{P}_\varepsilon, a}(x) \le \lambda. \tag{27}$$

Далее, если $(s, t_1), (s, t_2) \in U_2$, то из определения U_2 следует $a\sqrt{t_i} < |s| + r$, $a\sqrt{t_i} > |s| - r$, $i = 1, 2$, поэтому $\left| \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \right| < 2r/a$. Если $|s| < 2r$, то

$$\frac{|t_1 - t_2|}{\min(t_1, t_2)} = \frac{\left| \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \right| \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} \right)}{\min(t_1, t_2)} < \frac{2r}{a} \frac{3r}{a} \frac{a^2}{\xi^2 r^2} = \frac{6}{\xi^2}.$$

Если $|s| > 2r$, то

$$\frac{|t_1 - t_2|}{\min(t_1, t_2)} < \frac{2r}{a}\frac{2(|s| + r)}{|s| - r}\frac{a}{\xi r} = \frac{4}{\xi}\left(1 + \frac{2r}{r}\right) < \frac{12}{\xi^2}.$$

Поэтому окончательно $\dfrac{|t_1 - t_2|}{\min(t_1, t_2)} < \dfrac{12}{\xi^2}$ и из неравенства (25) следует

$$N^0_{U_2,a}(x) \le \sup\{|u(s, t_1) - u(s, t_2)|, (s, t_1), (s, t_2) \in U_2 \cap \Gamma_a(x)\} \le \frac{12}{\xi^2}\delta\lambda. \qquad (28)$$

Наконец, из (21) вытекает

$$N^0_{W_0,a}(x) \le \sup\{|v(s, \tau)|, (s, \tau) \in \Gamma_a(x) \cap W_0\} + \frac{2 + a\xi}{\xi^2}\delta\lambda. \qquad (29)$$

Теперь, из неравенств (26) – (29), используя (20), получаем (23). Утверждение 1 доказано.

Введем при $x \in R^n$, $l > 0$ обозначения

$$\Gamma_a(x, l) = \left\{(s, \tau) : |s - x| < a\left(\sqrt{\tau} - \sqrt{l}\right)\right\},$$

$$M(x, l) = \sup\{|v(s, \tau)|, (s, \tau) \in \Gamma_a(x, l) \cap W_0\},$$

$$W = \{(x, l) \in W_0 : M(x, l) < \theta\lambda\}, \quad l^x = \inf\{l : (x, l) \in W\}.$$

Ввиду непрерывности $u(x, t)$ вблизи ∂W_0^+ из (22) следует, что W не пусто и его верхняя граница $\partial W = \Gamma_a(x, l) \cap \partial V_\varepsilon^r$ совпадает с ∂W_0^+.

Покажем, что на нижней границе W, т.е. на $\partial W^- = \partial W \setminus \partial W^+$, выполнено неравенство

$$\left|\sqrt{l^s} - \sqrt{l^x}\right| \le \frac{|s - x|}{a}. \qquad (30)$$

Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство, т.е. $|s - x| < a\left(\sqrt{l^s} - \sqrt{l^x}\right)$. Тогда $(s, l^s) \in \Gamma_a(x, l^x)$. Можно найти такое $l > l^x$ и столь близкое к l^x, что $M(x, l) < \theta\lambda$ и $(s, l^s) \in \Gamma_a(x, l)$. Выберем теперь $l' < l^s$ так, чтобы $(s, l') \in \Gamma_a(x, l)$. При этом $\Gamma_a(s, l') \subset \Gamma_a(x, l)$. Отсюда имеем $M(s, l') < M(x, l) < \theta\lambda$. Это значит, что точка (s, l') принадлежит W, а это противоречит определению l^s. Таким образом, (30) доказано.

Введем множество $S = \left\{\left(x, l^x\right) : \left|v\left(x, l^x\right)\right| > \frac{1}{2}\theta\lambda\right\} \subset \partial W^-$. Обозначим через $P(S)$ проекцию множества S на R^n_x. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *При условии* (20) *существует такая постоянная* $C = C(n, \alpha) > 0$, *что*

$$\operatorname{mes} P(S) \ge C \operatorname{mes} B. \qquad (31)$$

Доказательство. Введем функции $q(x) = \chi_{P(S)}(x)$,

$$q^*(x) = \sup\left\{(\operatorname{mes} B(x, \rho))^{-1}\int_{B(x,\rho)} q(s)\,ds,\ \rho > 0\right\}.$$

Покажем, что существует $k = k(n, \alpha) > 0$ такое, что $E_0 \subset \{q^* \ge k\}$. Тогда из теоремы 1, *б* [5, с. 15] будет следовать

$$k \operatorname{mes} E_0 \le k \operatorname{mes}\{q^* \ge k\} \le \|q\|_{L_1(R^n)} = \operatorname{mes} P(S),$$

откуда ввиду (19) получим (31).

Возьмем произвольным образом $x_1 \in E_0$. Из (23) имеем $M(x_1, 0) > \theta\lambda$. Но если (x_1, l) достаточно близко к ∂W_0^+, то из (20), (21) ввиду непрерывности $V(s, \tau)$ вытекает $M(x_1, l) < \theta\lambda$. Следовательно, при уменьшении l граница $\Gamma_a(x_1, l)$ встретит точку $(x, l^x) \in \partial W^- \cap \Gamma_a(x_1)$, в которой $|v(x, l^x)| = \theta\lambda$. По непрерывности в ее окрестности $|v| > \theta\lambda/2$. Поэтому если $x = x_1$, то $q(x) \equiv 1$ в некотором шаре с центром в точке x_1, а значит, $q^*(x) = 1$.

В случае, когда $x \neq x_1$, рассмотрим

$$V^r_{\xi r/a} = \left\{(x, t) \in R_+^{n+1} : |x| < r - a\sqrt{t},\ t > \left(\frac{\xi r}{a}\right)^2\right\},$$

$$\tau_s = \sup\left\{\tau : (s, \tau) \in V^r_{\xi r/a}\right\}.$$

Тогда будет выполнено включение

$$\Gamma_a(x_1) \cap V^r_{\xi r/a} \subset W. \tag{32}$$

Действительно, пусть $(\xi, l) \in \Gamma_a(x_1) \cap V^r_{\xi r/a}$, $(s, \tau) \in \Gamma_a(\xi, l)$. Тогда, применяя (25) и учитывая, что $|\tau - \tau_s| < r^2/a^2$, $\tau > (\xi r/a)^2$, получаем

$$|v(s, \tau) - v(s, \tau_s)| < \frac{\delta\lambda}{\xi^2},$$

а с учетом (20), (21)

$$|v(s, \tau)| \leq |v(s, \tau) - v(s, \tau_s)| + |v(s, \tau_s)| < \theta\lambda,$$

что и доказывает (32).

Далее, из того, что $(x, l^x) \in \Gamma_a(x_1)$, следует

$$|x - x_1| < a\sqrt{l^x}. \tag{33}$$

Так как $x_1 \in B(0, (1-2\xi)r)$, то справедливо включение $B(x_1, \xi r) \subset P\big(\Gamma_a(x_1) \cap$ $\cap\ V^r_{\varepsilon r/a}\big)$ и из (32), (33) следует

$$B_1 \equiv B(x_1, |x - x_1|) \subset B(x_1, \xi r) \subset P(W).$$

Положим $B_2 \equiv B(x, (1-\xi)|x - x_1|)$ и покажем, что

$$\overline{B_1} \cap B_2 \subset P(S). \tag{34}$$

Из (30) следует $\sqrt{l^s} > \sqrt{l^x} - \dfrac{|s - x|}{a}$.

Пусть $\bar{s} \in B_1 \cap B_2$. Тогда

$$\sqrt{l^{\bar{s}}} > \sqrt{l^x} - \frac{|\bar{s} - x|}{a} > \frac{1}{a}\left(|x - x_1| - \frac{|\bar{s} - x|}{a}\right) > \frac{1}{a}\big(|x - x_1| - (1 - \xi)|x - x_1|\big) = \frac{\xi}{a}|x - x_1|. \tag{35}$$

Оценим разность $\left|v\left(x, l^x\right) - v\left(\bar{s}, l^{\bar{s}}\right)\right|$, предварительно показав, что $\left(\bar{s}, l^x\right) \in$ $\in \Gamma_a(x_1) \cap V^r_\varepsilon$.

Действительно, так как $\bar{s} \in B_1 \cap B_2$, то $|\bar{s} - x_1| < |x - x_1| < a\sqrt{l^x}$. Это доказывает, что $\left(\bar{s}, l^x\right) \in \Gamma_a(x_1)$. Поскольку

$$|\bar{s}| + a\sqrt{l^x} < |\bar{s} - x_1| + |x_1| + a\sqrt{l^x} < a\sqrt{l^x} + |x_1| + a\sqrt{l^x} < \xi r + (1 - 2\xi)r + \xi r = r,$$

то $\left(\bar{s},\ l^x\right) \in V_\varepsilon^r$. Теперь

$$\left|v\left(x,\ l^x\right) - v\left(\bar{s},\ l^{\bar{s}}\right)\right| \le \left|v\left(x,\ l^x\right) - v\left(\bar{s},\ l^x\right)\right| +$$

$$+\left|v\left(s,\ l^x\right) - v\left(\bar{s},\ l^{\bar{s}}\right)\right| \le \frac{|x-\bar{s}|}{\sqrt{l^x}}\delta\lambda + \frac{\left|l^x - l^{\bar{s}}\right|}{\min\left(l^x,\ l^{\bar{s}}\right)}\delta\lambda <$$

$$< \frac{|x-x_1|\,a}{\xi\,|x-x_1|}\delta\lambda + \frac{|x-x_1|\,a}{a\xi\,|x-x_1|}\left(2+\frac{|x-x_1|\,a}{|x-x_1|\,a\xi}\right)\delta\lambda = \frac{1+2\xi+a\xi}{\xi^2}\delta\lambda.$$

Поскольку $|v(x, l^x)| = \theta\lambda$, то ввиду (20) получим $\left|v\left(\bar{s},\ l^{\bar{s}}\right)\right| > \dfrac{\theta\lambda}{2}$. Это доказывает (34). Далее

$$q^*(x_1) \ge \frac{\operatorname{mes}\{P(S) \cap B_1\}}{\operatorname{mes} B_1} \ge \frac{\operatorname{mes}\{B_1 \cap B_2\}}{\operatorname{mes} B_1} \equiv k,$$

где k зависит лишь от n, $\xi(n, \alpha)$. Значит неравенство (31) доказано.

Утверждение 3. *Найдутся такие* $\delta(a, \alpha, \beta, a)$, $r_0(a, \alpha, \beta, a, \omega, \rho) > 0$, *что при* $r < r_0$ *будет выполнено неравенство*

$$\int_W \sqrt{t}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt \ge C \operatorname{mes} B\lambda^2, \tag{36}$$

где $C = C(a, n, \alpha, \beta) > 0$.

Доказательство. Достаточно оценить интеграл

$$\sum_{i,j=1}^n \int_W \sqrt{t}\, a_{ij}(x, t)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt.$$

Интегрируя по частям и используя уравнение (1), получаем (ν—внешняя нормаль к ∂W)

$$2\sum_{i,j=1}^n \int_W \sqrt{t}\, a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt = 2\sum_{i,j=1}^n \int_{\partial W} \sqrt{t}\, a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i} v\cos\left(\nu,\ x_j\right)d\sigma -$$

$$-\int_{\partial W^-}\sqrt{t}\, v^2\cos(\nu, t)\,d\sigma - \int_{\partial W^+}\sqrt{t}\, v^2\cos(\nu, t)\,d\sigma + \frac{1}{2}\int_W \frac{1}{\sqrt{t}}v^2\,dxdt -$$

$$-2\int_W \sqrt{t}\,\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}v\,dx\,dt + 2\int_W \sqrt{t}\,a_i\frac{\partial v}{\partial x_i}v\,dx\,dt +$$

$$+2\int_W \sqrt{t}\,a_0\,uv\,dx\,dt - 2\int_W \sqrt{t}\,fv\,dx\,dt = \sum_{k=1}^8 I_k. \tag{37}$$

Согласно определению W, W_0, E_0 и утверждениям 1, 2 имеем

$$|u| \le \omega\lambda, \quad |v| \le \theta\lambda, \quad \sqrt{t}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \le \delta\lambda, \quad \sqrt{t}\,|f| \le \rho\lambda \text{ в } \overline{W},$$

$$|v| \le \frac{2+a\xi}{\xi^2}\delta\lambda \text{ на } \partial W^+, |v| > \frac{\theta\lambda}{2} \text{ на } S \subset \partial W^-, \quad \operatorname{mes} P(S) \ge C\operatorname{mes} B,$$

$$\max_W t = \frac{r^2}{a^2}, \quad \operatorname{mes} W \le \operatorname{mes} V_\varepsilon^r \le \frac{r^2}{a^2}\operatorname{mes} B.$$

Далее

$$|I_1| \le A\delta\theta\lambda^2 \int_{\partial W} \left|\cos\left(\nu, x_j\right)\right| d\sigma \le \frac{A}{a}\delta\theta\lambda^2 \int_{P(\partial W)} dx \le \frac{A}{a}\delta\theta \operatorname{mes} B\lambda^2,$$

$$I_2 \ge -\int_S \sqrt{t}\, v^2 \cos(\nu, t) d\sigma = \int_{P(S)} v^2(x, l^x) dx \ge \left(\frac{\theta\lambda}{2}\right)^2 \operatorname{mes} P(S) \ge C\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \operatorname{mes} B\lambda^2,$$

$$|I_3| \le \left(\frac{2+a\xi}{\xi^2}\right)^2 \frac{r}{a}\delta^2\lambda^2 \int_{P(\partial W^+)} dx\,dt \le \left(\frac{2+a\xi}{\xi^2}\right)^2 \frac{r}{a}\delta^2 \operatorname{mes} B\lambda^2,$$

$$|I_4| \le \frac{1}{2}\delta^2\lambda^2 \operatorname{mes} B \int_0^{r^2/a^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{r}{a}\theta^2 \operatorname{mes} B\lambda^2,$$

$$|I_5| + |I_6| \le 4A\delta\theta\lambda^2 \operatorname{mes} W \le \frac{4r^2}{a^2} A\delta\theta \operatorname{mes} B\lambda^2,$$

$$|I_7| \le 2A\omega\theta\frac{r}{a}\lambda^2 \operatorname{mes} W \le 2\frac{r^3}{a^3} A\omega\theta \operatorname{mes} B\lambda^2,$$

$$|I_8| \le 2\rho\theta\lambda^2 \operatorname{mes} W \le 2\frac{r^2}{a^2}\rho\theta \operatorname{mes} B\lambda^2.$$

Выберем δ, r_0 столь малыми, чтобы при $r < r_0$ выполнялось

$$|I_1| + \sum_{k=3}^{8} |I_k| \le \frac{c}{8}\theta^2 \operatorname{mes} B\lambda^2.$$

Отсюда следует требуемое неравенство (36).

Введем множества

$$E_1 = \left\{\psi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon} \le \frac{1}{2}\right\} \cap B,\ E_2 = \left\{A_{\mathcal{P}_\varepsilon} \le \gamma\lambda\right\} \cap B, \quad W_1 = \bigcup_{x \in E_1} \left\{\Gamma_a(x) \cap V_\varepsilon^r\right\}.$$

Утверждение 4. *Справедливо неравенство*

$$\int_{W_1} \sqrt{t} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\,dt \le C a^{-n}\gamma^2 \operatorname{mes} B\lambda^2, \tag{38}$$

где $C = C(n, \alpha, \beta) > 0$.

Доказательство. Так как $W_1 \subset V_\varepsilon^r \subset \mathcal{P}_\varepsilon$, то $A_{W_1,a}(x) \le A_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x)$ и

$$\int_{E_2} A^2_{W_1,a}(x) dx \le \int_{E_2} A^2_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x) dx \le \gamma^2\lambda^2 \operatorname{mes} E_2 \le \gamma^2 \operatorname{mes} B\lambda^2. \tag{39}$$

Возьмем $(s, \tau) \in W_1$ и положим $B_3 = B(s, a\sqrt{\tau})$. Тогда

$$\int_{E_2} A^2_{W_1,a}(x) dx = \int_{W_1} \tau^{(1-n)/2} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 \operatorname{mes}\{E_2 \cap B_3\}\, ds\,d\tau. \tag{40}$$

Оценим интеграл, стоящеий в правой части (40) снизу. Так как $(s, \tau) \in W_1$, то $(s, \tau) \in \Gamma_a(x) \cap V_\varepsilon^r$, $x \in E_1$. Отсюда $x \in B_3$ и согласно определению E_1, $\psi_{\gamma,\lambda,\varepsilon}$ $\psi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon}$ имеем

$$\operatorname{mes}\{A_{\mathcal{P}_\varepsilon,a} > \gamma\lambda, B_3\} = \int_{B_3} \psi_{\gamma,\lambda,\varepsilon}\, ds \le \operatorname{mes} B_3 \psi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon} \le \frac{1}{2} \operatorname{mes} B_3. \tag{41}$$

Далее, если $(s,\tau)\in V_\varepsilon^r$, $\zeta\in B_3$, то $|\zeta|\le|\zeta-s|+|s|<a\sqrt{\tau}+r-a\sqrt{r}=r$, значит, $B_3\subset B$. Тогда из (41) следует

$$\operatorname{mes}\{E_2\cap B_3\}=\operatorname{mes}\left[\left\{A_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}\le\gamma\lambda\right\}\cap B_3\right]\ge\frac{1}{2}\operatorname{mes}B_3=\frac{1}{2}\kappa_n a^n\tau^{n/2}.$$

Это неравенство совместно с (39), (40) влечет (38). Утверждение 4 доказано.

Из определения E_0, E_1 следует, что $E_0\subset E_1$, а значит, $W\subset W_0\subset W_1$ и при достаточно малом γ неравенства (36), (38) противоречат одно другому. А значит, неравенство, обратное к (16), невозможно. Тем самым, теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Здесь мы остановимся лишь на некоторых моментах доказательства. Определим $\mathcal{P}_\varepsilon$ так же, как и в теореме 1. Положим

$$G_0=\{A_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}>\lambda\},$$

$$A=\{A_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}>\beta\lambda,\ N_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}\le\gamma\lambda,\ D_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}\le\delta\lambda,\ F_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}\le\rho\lambda\}.$$

Покажем, что

$$\lambda\operatorname{mes}E\le\operatorname{mes}G_0. \tag{42}$$

Рассуждая от противного, как и при доказательстве теоремы 1, найдем такой шар $B=B(0,r)$, что $\operatorname{mes}B\le2\lambda C_1\cdot\operatorname{mes}\{E\cap B_0\}$ и найдется $x_0\in\partial B$: $A_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x_0)\le\le\lambda$, где $B_0=B(0,(1-2\xi)r)$.

Введем множества

$$V_\varepsilon^r=\{(s,t)\in R_+^{n+1};\ |s|<r-a\sqrt{t},\ t>\varepsilon^2\},\quad E_0=E\cap B_0,\ W=\bigcup_{x\in E_0}\{\Gamma_a(x)\cap V_\varepsilon^r\}.$$

Дальнейшее доказательство теоремы 2 состоит из двух утверждений.

Утверждение 5. *Существует* $r_0=r_0(A,\alpha,a,n,\nu_0)$ *такое, что при* $\operatorname{diam}G<<r_0$ *выполнено*

$$\int_W\sqrt{t}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt\le C\{\gamma\delta+\gamma\rho+\gamma^2\}\operatorname{mes}B\lambda^2, \tag{43}$$

где $C=C(n,\alpha,A,a,n,\nu_0)$.

Доказательство. Оценим сверху интеграл

$$\sum_{i,j=1}^n\int_W\sqrt{t}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt.$$

Интегрируя по частям и используя уравнение (1), получаем равенство, аналогичное (37). Используя определение E_0, W, находим (43).

Утверждение 6. *Найдутся* $\delta(A,\alpha,\beta,a)$ и $r_0\ (A,\alpha,\beta,a)$ *такие, что выполнено неравенство*

$$\int_W\sqrt{t}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt>C(\beta^2-1)\operatorname{mes}B\lambda^2, \tag{44}$$

где $C=C(n,\alpha,a)$.

Доказательство. Покажем вначале, что выполнено неравенство

$$A^2_{W,a}(x)\ge\tfrac{1}{2}(\beta^2-1)\lambda^2,\ x\in E_0. \tag{45}$$

Зафиксировав $x\in E_0$, положим

$$U_1=\{(s,\tau)\in R_+^{n+1}:|s|<a\sqrt{\tau}-r,\tau>r^2/a^2\},$$

$$U_2 = \{(s,\tau)\in(\Gamma_a(x)\cap\mathcal{P}_\varepsilon)\mid U_1, \tau > r^2/a^2\},$$

$$U_3 = \{(s,\tau)\in(\Gamma_a(x)\cap\mathcal{P}_\varepsilon)\setminus W_1, \tau < r^2/a^2\},$$

Так как U_1, U_2, U_3, W покрывают $\Gamma_a(x)\cap\mathcal{P}_\varepsilon$, то

$$\beta^2\lambda^2 < A^2_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x) < A^2_{U_1\cap\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x) + A^2_{U_2,a}(x) + A^2_{U_3,a}(x) + A^2_{W,a}(x). \tag{46}$$

Имеем $U_1 \subset \Gamma_a(x_0)$, поэтому

$$A^2_{U_1\cap\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x) \le A^2_{\mathcal{P}_\varepsilon,a}(x_0) \le \lambda. \tag{47}$$

Обозначая $T = B(x, a\sqrt{t})\setminus B(0, a\sqrt{t}-r)$, имеем

$$\operatorname{mes} T = \kappa_n a^n\left[\tau^{n/2} - \left(\sqrt{\tau} - r/a\right)^n\right] \le n\kappa_n a^{n-1} r\tau^{(n-1)/2},$$

поэтому

$$A^2_{U_2,a}(x) = \int\limits_{U_2\cap\Gamma_a(x)} \tau^{-(1+n)/2}\left(\tau\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2\right) ds\,d\tau \le \delta^2\lambda^2 \int\limits_{r^2/a^2}^{r_0^2/a^2}\int\limits_T \tau^{-(1+n)/2}\,ds\,d\tau \le$$

$$\le n\kappa_n a^{n-1} r\delta^2\lambda^2 \int\limits_{r^2/a^2}^{r_0^2/a^2} \tau^{-1}\,d\tau = n\kappa_n a^{n-1} r\ln\frac{r_0}{r}\delta^2\lambda^2,$$

$$A^2_{U_3,a}(x) = \int\limits_{U_3\cap\Gamma_a(x)} \tau^{-(1+n)/2}\left(\tau\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2\right) ds\,d\tau \le \delta^2\lambda^2 \int\limits_{\xi^2 r^2/a^2}^{r^2/a^2} \tau^{-(1+n)/2}\left(\int\limits_{|s-x|<a\sqrt{\tau}} ds\right) \le$$

$$\le 2\kappa_n a^{n-1}(1-\xi)\, r\delta^2\lambda^2.$$

Выберем r_0, δ столь малыми, чтобы при $r < r_0$ выполнялось неравенство

$$A^2_{U_2,a}(x) + A^2_{U_3,a}(x) < \tfrac{1}{2}(\beta^2-1)\lambda^2. \tag{48}$$

Тогда из (47), (48), (46) следует (45). Из (46) получим

$$\kappa_n a^n \int\limits_W \sqrt{\tau}\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 ds\,d\tau \ge \int\limits_{R^n} A^2_{W,a}(x)\,dx \ge \frac{\beta^2-1}{2}\operatorname{mes} E_0\lambda^2 \ge C(n,\lambda)\frac{\beta^2-1}{2}\operatorname{mes} B\lambda^2. \tag{49}$$

Из (49) следует (44).

Теперь выберем γ так, чтобы (43) и (44) противоречили одно другому; тем самым неравенство, обратное к (42), невозможно, и значит, теорема 2 доказана.

1. *Burkholder D.L., Gundy R.F.* Distribution function inequalities for the area integral // Stud. math. – 1972. – **44**, №6. – P. 527–544.
2. *Шелепов В.Ю.* О граничных свойствах решений элиптических уравнений в многомерных областях, представимых с помощью разности выпуклых функций // Мат.сб.– 1987.– **133**, №4.– С. 446–468.
3. *СкрыпникИ.И.* Граничные значения решений линейных параболических уравнений второго порядка // Укр.мат.журн. – 1992. – **44**, №10. – С. 1433–1440.
4. *Петрушко И.М.* О граничных и начальных условиях в L_p, $p>1$, решений параболических уравнений второго порядка // Мат.сб. – 1984. – **125**, №4. – С.489–521.
5. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

Получено 22. 10. 92