УДК 532.5

С. Н. Судаков, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОЙ ПОЛОСТИ С ПОРИСТЫМ ДЕМПФЕРОМ

Estimates for L_2-norms of solutions of equations of motion for viscous fluid in a moving elliptic cavity with a porous damper are obtained.

Одержані оцінки норм у просторі L_2 розв'язків рівнянь руху в'язкої нестисливої рідини в рухомій еліпсоїдній порожнині з пористим демпфером.

Пусть Q_1 — односвязная область, граница s которой в прямоугольной декартовой системе координат $Oy_1y_2y_3$ описывается уравнением

$$\sum_{i=1}^{3} y_i^2 / c_i^2 = 1, \quad 0 < c_i = \text{const}.$$

В Q_1 задана система дифференциальных уравнений, описывающих движение вязкой жидкости в полости с пористым демпфером [1]

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{F}(v) - \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y}) - 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v},$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v}(v_1, v_2, v_3)$ — скорость жидкости; t — время; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность жидкости; p — давление; $\boldsymbol{y}(y_1, y_2, y_3)$ — координатный вектор; $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела с полостью, который предполагается ограниченным и дифференцируемым по t. Функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$, описывающая сопротивление пористого демпфера движению жидкости, определена ниже.

Граничными условиями для системы (1) будут условия проскальзывания

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\big|_s = 0, \quad \boldsymbol{l}_i\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{n})\big|_s = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{n}(n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к границе; $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ — единичные векторы, образующие вместе с $\boldsymbol{n}$ тройку взаимно ортогональных векторов; τ — тензор с компонентами

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{dv_i}{dy_j} + \frac{dv_j}{dy_i}\right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

После задания начальных условий для $\boldsymbol{v}$ задача (1), (2) будет полностью определена. Систему (1), (2) условимся называть полной. Наряду с ней будем рассматривать упрощенную систему

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\sigma}{\rho}\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y}) - 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}, \ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\big|_s = 0, \tag{4}$$

где σ — положительный параметр, характеризующий сопротивление демпфера. Для системы (3), (4) также нужно задать начальные значения $\boldsymbol{v}$.

Согласно [1] упрощенная система имеет решение

$$v_1 = c_1\left(\omega_2^*\frac{y_3}{c_3} - \omega_3^*\frac{y_2}{c_2}\right), \quad \omega_1^* = \frac{2c_2c_3}{c_2^2 + c_3^2}\Omega_1^* \quad (1\,2\,3), \tag{5}$$

где $\Omega_i^* = \Omega_i - \omega_i$, $i = 1, 2, 3$, а $\Omega_i(t)$ определяются уравнениями

$$\dot{\Omega}_1 = (1-\varepsilon_3)\omega_3\Omega_2 - (1+\varepsilon_2)\omega_2\Omega_3 + (\varepsilon_2+\varepsilon_3)\Omega_2\Omega_3 - \frac{\sigma}{\rho}(\Omega_1 - \omega_1) \quad (1\ 2\ 3). \qquad (6)$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = (c_3^2 - c_2^2)/(c_3^2 + c_2^2) \quad (1\ 2\ 3).$$

Задача заключается в установлении условий, при которых решения полной системы в L_2-норме достаточно точно приближаются решениями (5), (6) упрощенной системы.

Сначала рассмотрим задачу для [2]

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) = -(\sigma + \alpha|\boldsymbol{v}|^2)\boldsymbol{v}, \qquad (7)$$

где α — положительная константа. Отсюда при $\alpha = 0$ будет следовать решение для случая линейного сопротивления демпфера. Далее рассмотрим случай демпфера, сопротивление которого линейно по $|\boldsymbol{v}|$ с коэффициентом пропорциональности, зависящим некоторым образом от y и направления скорости $\boldsymbol{v}$.

1. Пусть $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$ имеет вид (7). Обозначим через $\boldsymbol{v} = \mathfrak{U}(t, \boldsymbol{y})$ решение (5) упрощенной системы. Решение полной системы представим в виде

$$\boldsymbol{v} = \mathfrak{U}(t, \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{y}). \qquad (8)$$

Очевидно, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\big|_s = 0. \qquad (9)$$

Подставляя выражение (8) в уравнения (1) и учитывая, что $\mathfrak{U}$ — решение системы (3), (4), получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\mathfrak{U}(t,\boldsymbol{y}) + (\mathfrak{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p_1 - \frac{\sigma}{\rho}\boldsymbol{u} -$$

$$-2\frac{\alpha}{\rho}(\mathfrak{U}\cdot\boldsymbol{u})\mathfrak{U} - \frac{\alpha}{\rho}\Big[|\boldsymbol{u}|^2(\mathfrak{U}+\boldsymbol{u}) + 2(\mathfrak{U}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\Big] - \frac{\alpha}{\rho}|\mathfrak{U}|^2(\mathfrak{U}+\boldsymbol{u}) - 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}, \qquad (10)$$

где p_1 — разность между давлениями в решениях полной и упрощенной систем. Умножим уравнение (10) скалярно на $\boldsymbol{u}$ и результат проинтегрируем по области Q_1. Учитывая условия (9), находим

$$\frac{dE}{dt} = -\langle \boldsymbol{u}\cdot\nabla\mathfrak{U}\cdot\boldsymbol{u}\rangle - \frac{\sigma}{\rho}\langle|\boldsymbol{u}|^2\rangle + \nu\langle\Delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\rangle - 2\frac{\alpha}{\rho}\langle(\mathfrak{U}\cdot\boldsymbol{u})^2\rangle -$$

$$-\frac{\alpha}{\rho}\langle|\boldsymbol{u}|^2(3\mathfrak{U}+\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\rangle - \frac{\alpha}{\rho}\langle|\mathfrak{U}|^2(\mathfrak{U}+\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\rangle - \langle\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\rangle - \langle\mathfrak{U}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\rangle, \qquad (11)$$

где

$$E = \frac{1}{2}\langle|\boldsymbol{u}|^2\rangle, \quad \langle f\rangle = \frac{1}{Q}\int\limits_{Q_1} f\,dQ, \quad Q = \operatorname{mes} Q_1.$$

Покажем, что

$$\langle\mathfrak{U}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\rangle = 0, \quad \langle\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\rangle = 0. \qquad (12)$$

Интегрируя по частям и учитывая соленоидальность $\mathfrak{U}$, получаем

$$\langle\mathfrak{U}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\rangle = -\langle\mathfrak{U}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\rangle + \frac{1}{Q}\int\limits_s |\boldsymbol{u}|^2\mathfrak{U}\cdot\boldsymbol{n}\,ds.$$

В силу условия непротекания поверхностный интеграл равен нулю. Тогда первое неравенство (12) очевидно. Второе доказывается аналогично.

Уравнение (11) представим в виде

$$\frac{dE}{dt} = -2E\Big\{ \frac{\langle u \cdot \nabla \mathfrak{U} \cdot u\rangle}{\langle |u|^2\rangle} + \frac{\sigma}{\rho} \Big\} + \nu\langle \Delta u \cdot u\rangle -$$

$$- 2\frac{\alpha}{\rho}\langle(\mathfrak{U} \cdot u)^2\rangle - \frac{\alpha}{\rho}\langle|u|^2(3\mathfrak{U} + u) \cdot u\rangle - \frac{\alpha}{\rho}\langle|\mathfrak{U}|^2(\mathfrak{U} + u) \cdot u\rangle. \qquad (13)$$

Поскольку полученное соотношение обобщает уравнение баланса энергии возмущений [3], будем пользоваться этим термином.

Обозначим через H множество всех непрерывных векторных функций u, имеющих обобщенные производные до второго порядка включительно, удовлетворяющих соотношениям (9) и условиям

$$l_i \cdot (\mathcal{D} \cdot n)\big|_s = -l_i \cdot (d \cdot n)\big|_s, \quad i = 1, 2, \qquad (14)$$

где $\mathcal{D}$ и d — тензоры с компонентами

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \mathfrak{U}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \mathfrak{U}_j}{\partial y_i} \Big), \quad d_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \Big).$$

Учитывая, что $\mathfrak{U}_i$ определяются выражениями (5), получаем

$$\mathcal{D}_{11} = 0, \quad \mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{21} = \varepsilon_3\Omega_3^* \quad (1\ 2\ 3). \qquad (15)$$

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$\min_{u\in H} \frac{\langle u \cdot \nabla \mathfrak{U} \cdot u\rangle}{\langle |u|^2\rangle} \geq \lambda, \qquad (16)$$

где $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *— корни уравнения*

$$\lambda^3 - \lambda(\mathcal{D}_{12}^2 + \mathcal{D}_{31}^2 + \mathcal{D}_{23}^2) + \mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{31}\mathcal{D}_{23} = 0.$$

Доказательство дано в работе [1].

Лемма 2. *Для любой функции* $u \in H$ *справедливо неравенство*

$$\langle \Delta u \cdot u\rangle \leq 2\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i^2 \Omega_i^{*2}. \qquad (17)$$

Доказательство. Согласно условиям (9), (14) функция v, определенная равенством (8), является соленоидальной и удовлетворяет условиям (2). Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\langle \Delta v \cdot v\rangle = -\langle \tau_{ij}\, \tau_{ij}\rangle + \frac{1}{Q}\int_s v_i \tau_{ij} n_j\, ds,$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. В силу условий (2) поверхностный интеграл равен нулю. Тогда

$$\langle \Delta v \cdot v\rangle \leq 0. \qquad (18)$$

Левую часть, используя (8) и учитывая $\Delta \mathfrak{U} = 0$, приводим к виду

$$\langle \Delta v \cdot v\rangle = \langle \Delta u \cdot u\rangle - 2\langle d_{ij}\, \mathcal{D}_{ij}\rangle + \frac{2}{Q}\int_s \mathfrak{U}_i\, d_{ij} n_j\, ds. \qquad (19)$$

Учитывая условия (2), (8) и соотношение

$$\langle d_{ij}\, \mathcal{D}_{ij}\rangle = \frac{1}{Q}\int_s u_i \mathcal{D}_{ij} n_j\, ds,$$

преобразуем (19) следующим образом:

$$\langle \Delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \rangle = \langle \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \rangle - \frac{2}{Q} \int_s u_i \mathcal{D}_{ij} n_j \, ds - \frac{2}{Q} \int_s \mathfrak{U}_i \, \mathcal{D}_{ij} n_j \, ds =$$

$$= \langle \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \rangle + \frac{2}{Q} \int_s u_i d_{ij} n_j \, ds - \frac{2}{Q} \int_s \mathfrak{U}_i \, \mathcal{D}_{ij} n_j \, ds. \tag{20}$$

Применяя неравенство (18) и соотношение

$$\frac{2}{Q} \int_s u_i d_{ij} n_j \, ds = \langle \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \rangle + 2 \langle d_{ij} \, d_{ij} \rangle,$$

из (20) получаем

$$\langle \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \rangle + \langle d_{ij} \, d_{ij} \rangle - \frac{1}{Q} \int_s \mathfrak{U}_i \, \mathcal{D}_{ij} \, n_j \, ds \le 0.$$

Отсюда с учетом того, что $\langle d_{ij} \, d_{ij} \rangle \ge 0$, находим

$$\langle \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \rangle \le \frac{1}{Q} \int_s \mathfrak{U}_i \, \mathcal{D}_{ij} n_j \, ds.$$

Учитывая, что $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{D}_{ij}$ определены формулами (5), (15), после вычисления интеграла в последнем неравенстве получаем оценку (17). Лемма доказана.

Введем обозначения

$$D_1 = -\min_{\boldsymbol{u} \in H} \langle |\boldsymbol{u}|^2 (3 \mathfrak{U} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \rangle, \quad D_2 = -\min_{\boldsymbol{u} \in H} \langle |\mathfrak{U}|^2 (\mathfrak{U} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \rangle. \tag{21}$$

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$D_1 < \frac{81}{4} \langle |\mathfrak{U}|^4 \rangle, \quad D_2 \le \frac{1}{4} \langle |\mathfrak{U}|^4 \rangle. \tag{22}$$

Доказательство. Оценим D_1. Очевидно,

$$-D_1 \ge \langle \min_{\boldsymbol{u}} |\boldsymbol{u}|^2 (3 \mathfrak{U} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \rangle, \tag{23}$$

где минимум берется на множестве всех возможных трехмерных векторов $\boldsymbol{u}$. Величина $(3 \mathfrak{U} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}$ принимает отрицательные значения только внутри шара s_1, который задается неравенством

$$\sum_{i=1}^{3} (u_i + \frac{3}{2} \mathcal{U}_i)^2 \le \frac{9}{4} \sum_{i=1}^{3} \mathcal{U}_i^2,$$

и достигает минимального значения в его центре, т. е. при $\boldsymbol{u} = -\frac{3}{2} \mathfrak{U}$. Нетрудно убедиться, что

$$\max_{\boldsymbol{u} \in s_1} |\boldsymbol{u}|^2 = 9 |\mathfrak{U}|^2, \quad \max_{\boldsymbol{u} \in s_1} (3 \mathfrak{U} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} = -\frac{9}{4} |\mathfrak{U}|^2.$$

Но тогда из (23) находим первое неравенство (22).

Аналогично оценим D_2. Из второго выражения (21) получаем

$$-D_2 \ge \langle |\mathfrak{U}|^2 \min_{\boldsymbol{u}} (\mathfrak{U} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \rangle,$$

где минимум берется на множестве всех возможных трехмерных векторов. Учитывая, что $(\mathfrak{U} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}$ принимает максимальное значение при $\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2} \mathfrak{U}$, из последнего неравенства получаем второе соотношение (22). Лемма доказана.

Введем обозначения

$$A = \min_t \lambda + \frac{\sigma}{\rho}, \quad B = \max_t 2 \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i^2 \Omega_i^{*2}, \quad D = \max_t (D_1 + D_2).$$

Очевидно, что $B \geq 0$, $D \geq 0$. Будем считать, что $\boldsymbol{\omega}(t)$ и σ/ρ выбраны так, что выполняются условия

$$A > 0, \quad B < \infty, \quad D < \infty. \tag{24}$$

На конкретном примере можно убедиться, что условия (24) действительно выполнимы. Для этого следует положить $c_1 = c_2$, $\omega_1 = \omega \sin \beta t$, $\omega_2 = \omega \cos \beta t$, $\omega_3 = \mathrm{const}$, где ω, β — константы, и вычислить A, B, D при достаточно большом σ/ρ. Отметим, что условие $A > 0$ является достаточным для монотонной глобальной устойчивости решения (5) системы (3), (4) [1].

Используя условия (24), из уравнения (13) находим

$$\frac{dE}{dt} \leq -2AE + \nu B + \frac{\alpha}{\rho} D.$$

Решая это дифференциальное неравенство, получаем следующий результат.

Теорема 1. *При выполнении условий* (24) *для решения системы* (1), (2), (7) *справедлива оценка*

$$E(t) \leq [E(0) - E_1] \exp(-2At) + E_1, \quad E_1 = \frac{1}{2A}\left(\nu B + \frac{\alpha}{\rho} D\right). \tag{25}$$

Причем постоянная E_1 может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малых ν и α.

2. Рассмотрим случай

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) = -(\sigma \boldsymbol{v} + \varepsilon \chi \cdot \boldsymbol{v}), \tag{26}$$

где ε — положительная константа; χ — тензор с компонентами χ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. В общем случае χ_{ij} являются функциями от $\boldsymbol{y}$. В каждой точке области Q_1 можно выбрать оси, главные для тензора χ в этой точке. Будем считать, что в главных осях

$$\chi_{ii} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{27}$$

Решение задачи (1), (2), (26) представим в виде (8). Подставляя (8) в уравнения (1), (26) и учитывая, что $\mathfrak{U}$ — решение системы (4), (3), находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\mathfrak{U} + (\mathfrak{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nu \Delta \boldsymbol{u} =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\nabla p_1 - \frac{\sigma}{\rho}\boldsymbol{u} - \frac{\varepsilon}{\rho}\chi \cdot \boldsymbol{u} - \frac{\varepsilon}{\rho}\chi \cdot \mathfrak{U} - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}.$$

Тогда уравнение баланса энергии возмущений будет иметь вид

$$\frac{dE}{dt} = -2E\left\{\frac{\langle \boldsymbol{u} \cdot \nabla \mathfrak{U} \cdot \boldsymbol{u}\rangle}{\langle |\boldsymbol{u}|^2\rangle} + \frac{\sigma}{\rho}\right\} + \nu\langle \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\rangle - \frac{\varepsilon}{\rho}\langle \boldsymbol{u} \cdot \chi \cdot \boldsymbol{u}\rangle - \frac{\varepsilon}{\rho}\langle \boldsymbol{u} \cdot \chi \cdot \mathfrak{U}\rangle. \tag{28}$$

Согласно неравенству Гельдера имеем

$$|\langle \boldsymbol{u} \cdot \chi \cdot \mathfrak{U}\rangle| \leq \sqrt{\langle |\chi \cdot \mathfrak{U}|^2\rangle}\sqrt{\langle |\boldsymbol{u}|^2\rangle}.$$

Учитывая условие (27), находим $\langle \boldsymbol{u} \cdot \chi \cdot \boldsymbol{u}\rangle \geq 0$. Используя соотношения (18)–(20) и два последних неравенства, из уравнения (28) получаем

$$\frac{dE}{dt} \leq -2EA + \frac{\varepsilon}{\rho} G\sqrt{2E} + \nu B, \tag{29}$$

где $G = \max\limits_t \sqrt{\langle |\chi \cdot \mathfrak{U}|^2\rangle}$.

Будем считать, что выполнены условия

$$A > 0, \quad B < \infty, \quad G < \infty. \tag{30}$$

Вводя обозначение $z = \sqrt{2E}$, представим неравенство (29) в виде

$$z\frac{dz}{dt} \le -Az^2 + \frac{\varepsilon}{\rho}Gz + \nu B. \tag{31}$$

Правая часть неравенства (31) обращается в нуль при

$$z_{1,2} = \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{G}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{G}{2A}\right)^2 + \nu\frac{B}{\rho}},$$

где z_1 соответствует знак плюс, а z_2 — минус. При $A > 0$ оба корня будут действительными и $z_1 > 0$, $z_2 < 0$.

Уравнение

$$\frac{dz_*}{dt} \le -Az_* + \frac{\varepsilon}{\rho}G + \frac{\nu B}{z_*}$$

имеет решение $z_*(t)$, которое определяется соотношением

$$At = \frac{z_2}{z_1 - z_2}\ln\frac{z_*(t) - z_2}{z_*(0) - z_2} - \frac{z_1}{z_1 - z_2}\ln\frac{z_*(t) - z_1}{z_*(0) - z_1}.$$

Отсюда следует, что при $z_*(0) > z_1$ решение $z_*(t)$ при возрастании t монотонно убывает и $\lim\limits_{t\to\infty} z_*(t) = z_1$. При $0 < z_*(0) < z_1$ решение $z_*(t)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{t\to\infty} z_*(0) = z_1$. Величина z_1 может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малых ν и ε.

Переходя к переменной E и учитывая неравенство (31), получаем следующий результат.

Теорема 2. *При выполнении условий* (30) *для решения системы* (1), (2), (26) *справедлива оценка*

$$E(t) \le \tfrac{1}{2}z_*^2(t),$$

где функция $z_*(t)$ *определяется соотношением* (31) *при* $z_*(0) = \sqrt{2E(0)}$.

Для доказательства теоремы нужно показать, что $z(t) \le z_*(t)$. Предположим противное, пусть $z(t_1) = z_*(t_1)$ и $z(t) > z_*(t)$, если $t \subset (t_1, t_2]$. Тогда

$$\frac{d}{dt}[z_*(t) - z(t)] \ge \left[A + \frac{\nu B}{z_*(t)z(t)}\right][z(t) - z_*(t)] = f(t) > 0.$$

Отсюда

$$z_*(t_2) - z(t_2) \ge \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt > 0.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения.

Теоремы 1 и 2 указывают условия, при которых решения системы (1), (2) близки в L_2-норме к решениям более простой системы (3), интегрирование которой сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. *Судаков С. Н.* К задаче о движении твердого тела с эллипсоидальной полостью, содержащей пористый демпфер и целиком заполненной вязкой жидкостью // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1991. – Вып. 15. – С. 84–88.
2. *Биверз Дж. С., Сперроу Е. М.* Течение через волокнистые пористые среды, не подчиняющиеся закону Дарси // Тр. амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. прикл. механика.– 1969.– № 4. – С. 59–63.
3. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. – М.: Мир, 1981. – 540 с.

Получено 22.10.92