УДК 519. 21

А. С. Чани, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл.математики и механики АН Украины, Донецк)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В РАЗРЕШИМОЙ АЛГЕБРЕ ЛИ

The exponent of the exponential growth of the products of random matrices with the values in a solvable Lie algebras is calculated. The result is expressed in terms of the values of heigen the terms.

Обчислено показник експоненціального зростання добутків випадкових матриць зі значеннями в розв'язуваній алгебрі Лі. Відповідь одержана у термінах власних чисел чинників.

Рассмотрим на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \boldsymbol{P})$ последовательность случайных элементов $\{X_n, n = \overline{1, \infty}\}$, принимающих значения в пространстве $L(R^m)$, состоящем из квадратных вещественных матриц порядка $m \times m$. В работе изучается асимптотическое поведение произведений

$$Y_n = X_n X_{n-1} \ldots X_1, \quad n = \overline{1, \infty},$$

в предположении, что сомножители независимы, имеют одинаковое распределение и принимают значения в разрешимой алгебре Ли $\mathfrak{A} \subset L(R^m)$.

Асимптотическое поведение последовательности Y_n характеризуется величиной

$$\kappa(Y) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \| Y_n \| \quad (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{P}),$$

где $\|\cdot\|$ — операторная норма в $L(R^m)$. Существование $\kappa(Y)$ обеспечивается условием $\boldsymbol{M} \ln^+ \| X_1 \| < \infty$.

Задача вычисления $\kappa(Y)$ в общем виде не решена, поэтому каждый новый результат в этом направлении представляет интерес.

Приводимый ниже результат, показывает, что при сделанных предположениях показатель $\kappa(Y)$ вычисляется в терминах собственных чисел случайного элемента X_1.

Теорема. *Пусть* $\{X_n, n = \overline{1, \infty}\}$ *— последовательность независимых, одинаково распределенных случайных матриц, принимающих значения в разрешимой алгебре Ли* $\mathfrak{A} \subset L(R^m)$. *Если* $\boldsymbol{M} \ln^+ \|X_1\| < \infty$, *то*

$$\kappa(Y) = \max_{1 \le i \le m} \boldsymbol{M} \ln |\lambda_i(X_1)|,$$

где $\{\lambda_i(X_1), i = \overline{1, m}\}$ *— собственные числа матрицы* X_1.

Доказательство. Так как фазовое пространство последовательности $\{X_1, n = \overline{1, \infty}\}$ является разрешимой алгеброй Ли, то, без ограничения общности, будем считать, что все члены этой последовательности имеют вид

$$(X_n)_{ij} = \begin{cases} (X_n)_{ij}, & i \le j; \\ 0, & i > j, \end{cases}$$

в котором элементы главной диагонали $\{(X_n)_{ii}, i = \overline{1, m}\}$ являются собственными значениями матрицы X_n.

Справедливость этого утверждения следует из того, что в некотором базисе пространства R^m матрицы всех операторов из $\mathfrak{A}$ являются верхнетреугольными [1] и показатель $\kappa(Y)$ инвариантен относительно базиса пространства R^m.

Пусть D_n — диагональная матрица, у которой главная диагональ совпадает с главной диагональю X_n. Для произвольного натурального числа a и целых неотрицательных чисел i, j определим

$$X_{ai+1}^{a(j+1)} = \begin{cases} \prod_{k=ai+1}^{a(j+1)} X_k, & i \le j; \\ E, & i > j, \end{cases} \qquad D_{ai+1}^{a(j+1)} = \begin{cases} \prod_{k=ai+1}^{a(j+1)} D_k, & i \le j; \\ E, & i > j, \end{cases}$$

$$A_{ai+1}^{a(i+1)} = X_{ai+1}^{a(i+1)} - D_{ai+1}^{a(i+1)}$$

Тогда для любого n выполняется равенство

$$X_1^{an} = D_1^{an} + \sum_{k=0}^{n-1} X_{a(k+1)+1}^{an} A_{ak+1}^{a(k+1)} D_1^{ak}, \tag{1}$$

так как

$$X_1^{an} - D_1^{an} = \sum_{k=0}^{n-1} X_{ak+1}^{an} D_1^{ak} - \sum_{k=0}^{n-1} X_{a(k+1)+1}^{an} D_1^{a(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} X_{a(k+1)+1}^{an} \left(X_{ak+1}^{a(k+1)} - D_{ak+1}^{a(k+1)} \right) D_1^{ak}.$$

В свою очередь, для каждого элемента $X_{a(k+1)+1}^{an}$ запишем представление, аналогичное (1):

$$X_{a(k+1)+1}^{an} = D_{a(k+1)+1}^{an} + \sum_{k<r} X_{a(r+1)+1}^{an} A_{ar+1}^{a(r+1)} D_{a(k+1)+1}^{ar} \tag{2}$$

Заменив в формуле (1) матрицу $X_{a(k+1)+1}^{an}$ равным ей выражением, стоящим в правой части (2), получим

$$X_1^{an} = D_1^{an} + \sum_{k=0}^{n-1} D_{a(k+1)+1}^{an} A_{ak+1}^{a(k+1)} D_1^{ak} +$$

$$+ \sum_{k<r} X_{a(r+1)+1}^{an} A_{ar+1}^{a(r+1)} D_{a(k+1)+1}^{ar} A_{ak+1}^{a(k+1)} D_1^{ak}.$$

Продолжая процесс итерации, окончательно находим

$$X_1^{an} = D_1^{an} + \sum_{k=0}^{n-1} D_{a(k+1)+1}^{an} A_{ak+1}^{a(k+1)} D_1^{ak} +$$

$$+ \sum_{k<r} D_{a(r+1)+1}^{an} A_{ar+1}^{a(r+1)} D_{a(k+1)+1}^{ar} A_{ak+1}^{a(k+1)} D_1^{ak} +$$

$$+ \sum_{k<r<l} D_{a(l+1)+1} A_{al+1}^{a(l+1)} D_{a(r+1)+1}^{al} A_{ar+1}^{a(r+1)} D_{a(k+1)+1}^{ar} \times$$

$$\times A_{ak+1}^{a(k+1)} D_1^{ak} + \ldots + \prod_{k=0}^{n-1} A_{ak+1}^{a(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{J}_i(n).$$

Полученное равенство представляет собой разложение X_1^{an} по степеням матриц $\left\{ A_{ai+1}^{a(i+1)}, i = \overline{0, n-1} \right\}$. Так как все эти матрицы нильпотентны, в силу леммы 2 [2] при $n \ge m + 1$ с вероятностью единица $\mathcal{J}_i(n) = 0$ для всех $i \ge m + 1$. Таким образом, для всех $n \ge m + 1$

$$X_1^{an} = \sum_{i=0}^{m} \mathcal{J}_i(n) \quad (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{P}).$$

Оценим норму матрицы X_1^{an} сверху. Для произвольного числа $q > 0$ при $n \geq m + 1$

$$\left\| X_1^{an} \right\| \leq \sum_{i=0}^{m} \left\| \mathcal{J}_i(n) \right\| \leq \zeta(n) \prod_{k=0}^{n-1} q_k, \tag{3}$$

где

$$\zeta(n) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k + \sum_{k<r} \beta_k \beta_r + \ldots + \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \ldots \beta_{i_m},$$

$$\beta_k = q_k^{-1} \left\| A_{ak+1}^{a(k+1)} \right\|, \; q_k = \left\| D_{ak+1}^{a(k+1)} \right\| \vee e^{-qa}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Теперь, используя лемму 1 [2] и неравенство (3), для нормы матрицы X_1^{an} можем записать двустороннюю оценку

$$\left\| D_1^{an} \right\| \leq \left\| X_1^{an} \right\| \leq \zeta(n) \prod_{k=0}^{n-1} q_k, \; n \geq m+1. \tag{4}$$

Изучим асимптотическое поведение правой части оценки (4). Положим $\gamma_k = \ln^+ \left\| A_{ak+1}^{a(k+1)} \right\| - \ln q_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. По построению случайные величины γ_k одинаково распределены и интегрируемы. Из интегрируемости вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ [3]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\{|\gamma_k| > \varepsilon k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\{|\gamma_0| > \varepsilon k\} < \infty.$$

Отсюда на основании леммы Бореля – Кантелли с вероятностью единица существует такой номер N, начиная с которого $\gamma_k \leq \varepsilon k$. Так как $\ln \beta_k \leq \gamma_k$, то для всех $k \geq N$ $\beta_k \leq \exp\{\varepsilon k\}$. Обозначим $L = \max\limits_{0 \leq k \leq N} \beta_k$. Тогда для всех $n > N$

$$\zeta(n) \leq (1+L)^m \exp\{\varepsilon m(n-1)\} \sum_{k=0}^{m} C_{n-1}^k,$$

где C_{n-1}^k — биномиальные коэффициенты. С учетом возможности произвольного выбора ε из последнего неравенства вытекает

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{-1} \ln \zeta(n) = 0 \quad (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{P}). \tag{5}$$

Что касается поведения величины $\prod_{k=0}^{n-1} q_k$, то по усиленному закону больших чисел Колмогорова

$$\lim_{n \to \infty} (an)^{-1} \ln \prod_{k=0}^{n-1} q_k = a^{-1} \boldsymbol{M} \ln \left(\left\| D_1^a \right\| \vee e^{-qa} \right). \tag{6}$$

Так как $Y_{an} = X_1^{an}$, то на основании соотношений (5) и (6) из (4) получаем

$$\kappa(Y) \leq a^{-1} \boldsymbol{M} \ln \left(\left\| D_1^a \right\| \vee e^{-qa} \right) \quad (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{P}).$$

Теперь изучим асимптотическое поведение величины $\left\|D_1^{an}\right\|$, представляющей собой левую часть оценки (4). Пусть $\{\lambda_i(X_k),\ i = \overline{1, m}\}$ — собственные числа матрицы X_k. Тогда с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} (an)^{-1}\ln\left\|D_1^{an}\right\| = \lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le m} (an)^{-1}\sum_{k=1}^{an}\ln|\lambda_i(X_k)| = \max_{1\le i\le m} \boldsymbol{M}\ln|\lambda_i(X_1)|.$$

Учитывая асимптотическое поведение крайних членов неравенств (4), для показателя $\kappa(Y)$ можем написать оценки

$$\max_{1\le i\le m} \boldsymbol{M}\ln|\lambda_i(X_1)| \le \kappa(Y) \le a^{-1}\boldsymbol{M}\ln\left(\left\|D_1^a\right\|\vee e^{-qa}\right). \tag{7}$$

Далее, легко заметить, что функция

$$\varphi(a) = \boldsymbol{M}\ln\left(\left\|D_1^a\right\|\vee e^{-qa}\right)$$

полуаддитивна и конечна на множестве натуральных чисел:

$$\varphi(a+b) \le \boldsymbol{M}\ln\left(\left(\left\|D_1^a\right\|\,\left\|D_{a+1}^{a+b}\right\|\right)\vee\left(e^{-qa}e^{-qb}\right)\right) \le$$

$$\le \boldsymbol{M}\ln\left(\left(\left\|D_1^a\right\|\vee e^{-qa}\right)\left(\left\|D_{a+1}^{a+b}\right\|\vee e^{-qb}\right)\right) = \varphi(a)+\varphi(b).$$

Поэтому [4] существует и конечен предел

$$\lim_{a\to\infty} a^{-1}\varphi(a) = \inf_{0<a<\infty} a^{-1}\varphi(a).$$

Существования и конечности этого предела достаточно [5], чтобы утверждать, что

$$\lim_{a\to\infty}\boldsymbol{M}a^{-1}\ln\left(\left\|D_1^a\right\|\vee e^{-qa}\right) = \boldsymbol{M}\lim_{a\to\infty} a^{-1}\ln\left(\left\|D_1^a\right\|\vee e^{-qa}\right) =$$

$$= \left(\max_{1\le i\le m}\boldsymbol{M}\ln|\lambda_i(X_1)|\right)\vee(-q),$$

и, следовательно, на основании (7)

$$\max_{1\le i\le m} \boldsymbol{M}\ln|\lambda_i(X_1)| \le \kappa(Y) \le \left(\max_{1\le i\le m}\boldsymbol{M}\ln|\lambda_i(X_1)|\right)\vee(-q).$$

Переход к пределу в этом неравенстве при $q\to\infty$ завершает доказательство теоремы.

1. *Бахтурин Ю.А.* Тождества в алгебрах Ли. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
2. *Чани А.С.* Показатель экспоненциального роста для одного класса стохастических полугрупп // Теория случай. процессов. – 1988. – Вып. 16. – С. 78 – 84.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Выща шк., 1988. – 439 с.
4. *Хилле Э., Филлипс П.* Функциональный анализ и полугруппы.– М.: Изд-во иностр. лит., 1962.– 830 с.
5. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Получено 22. 10. 92