УДК 517.95

Н. И. Иванчов, канд. физ.-мат. наук (Львов. ун-т)

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Conditions for unique determination of a time dependent temperature conductivity coefficient are established in the case where the boundary conditions and the over-determination conditions are not local

Встановлено умови однозначного визначення залежного від часу коефіцієнта температуропровідності, коли крайові умови та умови перевизначення нелокальні.

При решении обратных задач особенно важным является выбор вида дополнительной информации о решении, позволяющей однозначно определить неизвестные параметры рассматриваемого процесса. Обычно в качестве такой информации рассматривают дополнительные граничные условия, значение решения на некотором внутреннем множестве области или в некоторый момент времени [1, 2]. В данной работе рассмотрены вопросы однозначной разрешимости обратных задач для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями и условиями переопределения. Соответствующие прямые задачи исследованы в работе [3].

1. В области $D = \{(x, t)\colon\ 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = a(t)\, u_{xx} \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le h, \tag{2}$$

и нелокальным краевым условием

$$u(0, t) + u(h, t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Определим коэффициент температуропроводностти $a(t)$ и решение $u(x, t)$ задачи (1) – (3) так, чтобы удовлетворялось условие

$$\int_0^h u(x, t)dx = \nu(t), \quad 0 \le t \le T \tag{4}$$

(условия на функцию $\nu(t)$ налагаются далее). Под решением задачи (1) – (4) будем понимать пару функций $\{a(t),\ u(x, t)\}$, удовлетворяющую условиям (1) – (4), где $a(t)$ — положительная и непрерывная на $[0, T]$ функция, а $u(x, t) \in$ $\in C^{2,1}(D) \cap C(\overline{D})$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия:*

1) $\varphi(x) \in C^1[0, h]$, $\mu(t) \in C^1[0, T]$, $\nu(t) \in C^1[0, T]$, *причем*

$$\varphi(0) + \varphi(h) = \mu(0), \quad \int_0^h \varphi(x)dx = \nu(0);$$

2) *при* $t \in [0, T]$ $\nu'(t) > 0$, $\mu'(t) \ge 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{h/2} (\varphi'(h-\xi) - \varphi'(\xi)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi + nh)^2}{4t}\right) d\xi \ge C_0 > 0,$$

где C_0 *— константа. Тогда при некотором* $T > 0$, *определяемом известными*

© Н. И. ИВАНЧОВ, 1993

величинами, задача (1) – (4) *имеет решение.*

Доказательство. Предполагая, что известны $a(t)$ и

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(h, t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

найдем решение задачи (1), (2), (5):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(t)}} \int_0^h \varphi(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4\alpha(t)}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4\alpha(t)}\right)\right) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)a(\tau)}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x+2nh) \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) d\tau - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)a(\tau)}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x+(2n-1)h) \exp\left(-\frac{(x+(2n-1)h)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) d\tau, \tag{6}$$

где $\alpha(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$.

Подставляя решение $u(x, t)$ в условие (4), учитывая равенство $\mu_1(t) + \mu_2(t) = \mu(t)$ и используя (6) при $\varphi(x) = \mu_1(t) = \mu_2(t) = 1$, получаем уравнение

$$\nu(t) - \nu(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{(\mu(\tau)-\mu(0))a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) d\tau -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} \int_0^h \varphi'(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) d\xi.$$

Придадим полученному уравнению следующий вид:

$$\nu(t) - \nu(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu'(\sigma)d\sigma \int_0^{\alpha(t)-\alpha(\sigma)} \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4z}\right) dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha(t)} \frac{dz}{\sqrt{z}} \int_0^{h/2} (\varphi'(h-\xi) - \varphi'(\xi)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4z}\right) d\xi. \tag{7}$$

Дифференцируя (7), получаем уравнение

$$a(t) = Pa(t), \tag{8}$$

где

$$Pa(t) \equiv \sqrt{\pi}\,\nu'(t) \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \int_0^{h/2} (\varphi'(h-\xi) - \varphi'(\xi)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\alpha(t)}\right) d\xi + \int_0^t \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) d\tau \right)^{-1}.$$

Установим оценки решений уравнения (8). Легко видеть, что

$$a(t) \geq \frac{\min\limits_{[0,T]} \nu'(t)}{\max\limits_{[0,\,h/2]} (\varphi'(h-x)-\varphi'(x)) + \dfrac{1}{\sqrt{\pi \min\limits_{[0,T]} a(t)}} \max\limits_{[0,T]} \int\limits_0^t \dfrac{\mu'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}}.$$

Отсюда получаем оценку снизу

$$a(t) \geq A_0 > 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{9}$$

где

$$A_0 = \min\left\{ \frac{1}{\pi}\left(\frac{\max\limits_{[0,T]} \int\limits_0^t \dfrac{\mu'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}}{\max\limits_{[0,\,h/2]} (\varphi'(h-x)-\varphi'(x))} \right)^2; \quad \frac{\pi}{4}\left(\frac{\min\limits_{[0,T]} \nu'(t)}{\max\limits_{[0,T]} \int\limits_0^t \dfrac{\mu'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}} \right)^2 \right\}.$$

Для получения оценки $a(t)$ сверху заметим, что из (7) и условия 2 теоремы следует

$$\nu(t)-\nu(0) \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\alpha(t)} \frac{dz}{\sqrt{z}} \int\limits_0^{h/2} (\varphi'(h-\xi)-\varphi'(\xi)) \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4z}\right) d\xi \geq \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \alpha(t)$$

или

$$\alpha(t) \leq C_1 t, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{10}$$

где $C_1 = \sqrt{\pi}\, C_0^{-1} \max\limits_{[0,T]} \nu'(t)$. Теперь из уравнения (8) с учетом оценок (9) и (10) получаем

$$a(t) \leq A_1 < \infty, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{11}$$

где

$$A_1 = \sqrt{\pi C_1} \max_{[0,T]} \left(\frac{1}{\nu'(t)\sqrt{t}} \int\limits_0^{h/2} (\varphi'(h-\xi)-\varphi'(\xi)) \times\right.$$

$$\left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4A_0 t}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+(2n+1)h)^2}{4C_1 t}\right) \right) d\xi \right)^{-1}.$$

Очевидно, что оценка (11) справедлива на таком промежутке $[0, T]$, где

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4A_0 t}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+(2n+1)h)^2}{4C_1 t}\right) \right) > 0.$$

Из вида оператора P и условий теоремы следует, что оператор P является вполне непрерывным на множестве непрерывных функций $a(t)$ таких, что $0 < A_0 \leq a(t) \leq A_1 < \infty$, $0 \leq t \leq T$, и переводит данное множество в себя. Применяя теорему Шаудера о неподвижной точке [4], устанавливаем существование непрерывного решения $a(t)$ уравнения (8). Подставляя его в (1), решаем задачу (1), (2), (5) с произвольной функцией $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t) = \mu(t) - \mu_1(t)$. Полученная таким образом функция $u(x, t)$ вместе с найденной ранее $a(t)$ представляют собой решение задачи (1) – (4).

Теорема 2. *Решение уравнения* (7) *единственно при условии, что* $\varphi(x) \in C^1[0, h]$, $\mu(t) \in C^1[0, T]$, $\mu'(t) \geq 0$ *на* $[0, T]$, $\varphi'(h-x) - \varphi'(x) \geq 0$ *на* $[0, h/2]$, *причем хотя бы одна из функций* $\mu'(t)$ и $\varphi'(h-x) - \varphi'(x)$ *не равна тождественно нулю.*

Доказательство. Если $a_1(t)$ и $a_2(t)$ — различные решения уравнения (7), то из (7) получаем

$$0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu'(\sigma) d\sigma \int_{\alpha_1(t)-\alpha_1(\sigma)}^{\alpha_2(t)-\alpha_2(\sigma)} \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4z}\right) dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \frac{dz}{\sqrt{z}} \int_0^{h/2} (\varphi'(h-\xi) - \varphi'(\xi)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi + nh)^2}{4z}\right) d\xi,$$

что невозможно в силу условий теоремы 2.

Теорема 3. *Решение задачи* (1), (2), (5), (4) *единственно, если* $\varphi(x) \in C^1[0, h]$, $\mu_i(t) \in C^1[0, T]$, $i = 1, 2$, $\varphi'(h-x) - \varphi'(x) \geq 0$ *на* $[0, h/2]$, $\mu_1'(t) + \mu_2'(t) \geq 0$ *на* $[0, T]$, *причем функции* $\mu_1'(t) + \mu_2'(t)$ *и* $\varphi'(h-x) - \varphi'(x)$ *одновременно не равны тождественно нулю.*

Доказательство. Условия теоремы 3 обеспечивают единственность решения уравнения (7), а единственность решения задачи (1), (2), (5) следует из принципа максимума.

Замечания. 1. Если $\varphi(x) = px + q$, p, q — константы, то уравнение (8) приводится к виду

$$a(t) = \frac{\sqrt{\pi}\nu'(t)}{\int_0^t \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t) - \alpha(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4(\alpha(t) - \alpha(\tau))}\right) d\tau}. \tag{12}$$

Уравнение (12) исследуется так же, как в работе [2]. Теоремы 2 и 3 с очевидными изменениями остаются в силе, а теорема 1 дополняется условием существования предела

$$\lim_{t \to 0} \frac{\nu'(t)}{\int_0^t \frac{\mu'(\tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}}} = \kappa > 0.$$

2. Легко убедиться в том, что для обратной задачи

$$u_t = a(t) u_{xx}, \quad 0 < x < h/2, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) + \varphi(h - x), \quad 0 \leq x \leq h/2,$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(h/2, t) = 0,$$

$$-a(t) u_x(0, t) = \nu'(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

уравнение относительно неизвестной функции $a(t)$ совпадает с уравнением (8).

2. Рассмотрим в области D обратную задачу (1) – (3) относительно $\{a(t), u(x, t)\}$ с условием переопределения

$$u_x(h, t) - u_x(0, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{13}$$

Решение понимается как и в п. 1 с дополнительным предположением, что функция $u_x(x, t)$ непрерывна в $\overline{D}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия:*

1) $\mu(t) \in C^1[0, T]$, $\nu(t) \in C^1[0, T]$, $\varphi(x) \in C^2[0, h]$, *причем* $\varphi(0) + \varphi(h) = \mu(0)$, $\varphi'(h) - \varphi'(0) = \nu(0)$;

2) *при* $t \in [0, T]$ $\mu'(t) > 0$, $\nu'(t) \geq 0$; $\varphi''(x) > 0$ *на* $[0, h]$. *Тогда задача* (1) – (3), (13) *имеет решение.*

Доказательство. Предполагая известными $a(t)$ и значения

$$u_x(0, t) = \nu_1(t), \quad u_x(h, t) = \nu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{14}$$

находим решение задачи (1), (2), (14). Подставляя его в условие (13) и используя равенство $\nu_2(t) - \nu_1(t) = \nu(t)$, получаем уравнение

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)}} \int_0^h \varphi(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi + nh)^2}{4\alpha(t)}\right) d\xi + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nu(\tau) a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t) - \alpha(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t) - \alpha(\tau))}\right) d\tau. \tag{15}$$

Дифференцируя его по t, получаем уравнение относительно $a(t)$:

$$a(t) = \sqrt{\pi}\, \mu'(t) \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \int_0^h \varphi''(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi + nh)^2}{4\alpha(t)}\right) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{\nu'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t) - \alpha(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t) - \alpha(\tau))}\right) d\tau \right)^{-1}. \tag{16}$$

Непосредственно из (16) устанавливаем оценку

$$a(t) \leq A_2 < \infty, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{17}$$

где $A_2 = \max\limits_{[0, T]} \mu'(t) \,/\, 2 \min\limits_{[0, h]} \varphi''(x)$. Используя оценку (17), из уравнения (16) имеем

$$a(t) \geq \sqrt{\pi}\, \mu'(t) \left(\frac{1}{\sqrt{t \min\limits_{[0, T]} a(t)}} \int_0^h \varphi''(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi + nh)^2}{4A_2(t)}\right) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\min\limits_{[0, T]} a(t)}} \int_0^t \frac{\nu'(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4A_2(t - \tau)}\right) d\tau \right)^{-1},$$

откуда следует оценка $a(t)$ снизу: $a(t) \geq A_3 > 0$, $0 \leq t \leq T$, где

$$A_3 = \left(\min_{[0, T]} \left(\sqrt{\pi}\, \mu'(t) \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^h \varphi''(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi + nh)^2}{4A_2(t)}\right) d\xi + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + \int_0^t \frac{\nu'(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4A_2(t - \tau)}\right) d\tau \right)^{-1} \right) \right)^2.$$

При наличии оценок $a(t)$ завершение доказательства проводится как в теореме 1.

Теорема 5. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\nu(t)$ *удовлетворяют условиям* $\varphi(x) \in C^2[0, h]$, $\nu(t) \in C^1[0, T]$, $\varphi''(x) \geq 0$ *на* $[0, h]$, $\nu'(t) \geq 0$ *на* $[0, T]$, *причем* $\varphi''(x)$

и $\nu'(t)$ *одновременно не равны тождественно нулю, то решение уравнения* (15) *единственно.*

Доказательство. Предполагая, что $a_1(t)$ и $a_2(t)$ — различные решения уравнения (15), получаем равенство

$$0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \frac{dz}{\sqrt{z}} \int\limits_0^h \varphi''(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4z}\right) d\xi \; +$$

$$+ \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \nu'(\tau)d\tau \int\limits_{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}^{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)} \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4z}\right) dz,$$

которое в силу условий теоремы приводит к противоречию.

Единственность решения задачи (1) – (3), (13) устанавливается с помощью теорем, аналогичных теореме 3.

3. В заключение рассмотрим задачу нахождения коэффициента температуропроводности (1), (2), (14) с условием переопределения

$$u(h, t) - u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{18}$$

Покажем, что она сводится к одной из задач, рассмотренных выше. Действительно, представляя (18) в виде $\int_0^h u_x(x, t)dx = \mu(t)$ и обозначая $u_x = v$, получаем следующую задачу относительно пары функций $\{a(t), v(x, t)\}$:

$$v_t = a(t)v_{xx}, \quad (x, t) \in D,$$

$$v(x, 0) = \varphi'(x), \quad 0 \le x \le h,$$

$$v(0, t) = \nu_1(t), \;\; v(h, t) = \nu_2(t), \quad 0 \le t \le T,$$

с условием переопределения

$$\int_0^h v(x, t)dx = \mu(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Аналогично рассматриваются и другие задачи с условиями переопределения вида (3), (4), (13) или (14).

Полученные результаты позволяют утверждать, что для нахождения зависящего от времени коэффициента температуропроводности целесообразно использовать физическую модель, которой соответствует задача (1) – (3), (13). Из этой задачи при минимальных условиях удается определить искомый коэффициент на произвольном промежутке времени. Замена условия (13) условием (4) приводит к тому, что существование решения устанавливается лишь на некотором промежутке времени. Характерно, что в обоих случаях заданных условий недостаточно для однозначного определения температуры. Для того чтобы однозначно определились и коэффициент температуропроводности и температура, следует рассматривать задачи с краевыми условиями первого рода и условием переопределения вида (4), (13) или с краевыми условиями второго рода и условием переопределения вида (3), (18).

1. *Безнощенко Н. Я.* Об определении коэффициента в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 1. – С. 24 – 35.
2. *Jones B. F.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part I. // J. Math. Mech. – 1962. – **11**, № 6. – P. 907 – 918.
3. *Ионкин Н. И., Моисеев Е. И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 7. – С. 1284 – 1295.
4. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 448 с.

Получено 27.03.91