УДК 517.9

А. П. Малицкая, канд. физ.-мат. наук (Ивано-Франк. пед. ин-т)

ТРЕТЬЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОНИНА

We consider the following mixed boundary value problem:

$$u'_t(t,R) + x\,u'_y(t,R) + y\,u'_z(t,R) = u''_{x^2}(t,R) + f(t,R)$$

in $\Pi_T = \{(t,R),\ 0 < t \le T,\ R = (x,y,z),\ R \in E_3,\ 0 < x\}$,

$$u(0,R) = u_0(R), \quad u'_x(t,0,y,z) + \beta(t)u(t,0,y,z) = g(t,y,z).$$

A solution is obtained in the potential form.

В статті розглянуто змішану граничну задачу:

$$u'_t(t,R) + x\,u'_y(t,R) + y\,u'_z(t,R) = u''_{x^2}(t,R) + f(t,R)$$

в $\Pi_T = \{(t,R),\ 0 < t \le T,\ R = (x,y,z),\ R \in E_3,\ 0 < x\}$,

$$u(0,R) = u_0(R), \quad u'_x(t,0,y,z) + \beta(t)u(t,0,y,z) = g(t,y,z).$$

Розв'язок одержано у вигляді потенціалів.

В данной статье исследуется третья краевая задача в полупространстве для уравнения, обобщающего уравнение Колмогорова, сведением его с помощью потенциалов к интегральному уравнению. Полученные потенциалы аналогичны потенциалам для параболических уравнений [1, 2]. Рассматривается задача

$$u'_t + xu'_y + yu'_t = u''_{x^2} + f(t,R) \tag{1}$$

в $\Pi_T = \{(t,R),\ 0 < t \le T,\ R = (x,y,z),\ 0 < x,\ (y,z) \in E_2\}$,

$$u(0,R) = u_0(R), \tag{2}$$

$$u'_x(t,0,y,z) + \beta(t)u(t,0,y,z) = g(t,y,z), \tag{3}$$

где $f(t,R), u_0(R), \beta(t), g(t,y,z)$ — финитные бесконечно дифференцируемые функции по R, непрерывные и ограниченные по t.

Задача (1) – (3) может быть решена, если в качестве $u(t,R)$ взять такую функцию $u(t,R) = u_1(t,R) + u_2(t,R) + u_3(t,R)$, где

$$u_1(t,R) = \int_{E_3} \Gamma(R,t;S,0)u_0(S)\,dS, \tag{4}$$

$S = (\xi,\eta,\zeta)$, $\Gamma(R,t;S,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1):

$$\Gamma(R,t;S,\tau) = 3\sqrt{15}\,\pi^{-3/2}(t-\tau)^{9/2}\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} - \frac{3}{(t-\tau)^3}\Big(y-\eta+$$

$$+\frac{x+\xi}{2}(t-\tau)\Big)^2 - 180\,(t-\tau)^{-5}\Big(z-\zeta+\frac{(y+\eta)}{2}(t-\tau)^{-1} + (x-\xi)\frac{(t-\tau)^2}{12}\Big)^2\Big\}$$

при $t-\tau > 0$, $R,S \in E_3$, $\Gamma(R,t;S,\tau) = 0$ при $t-\tau \le 0$,

$$u_2(t,R) = \int_0^t d\tau \int_{E_3} \Gamma(R,t;S,\tau) f(\tau,S)\,dS, \tag{5}$$

$$u_3(t,R) = \int_0^t d\tau \int_{E_3} \Gamma(R,t;S_0,\tau)\varphi(\tau,S_0)\,dS_0,\ S_0 = (0,\eta,\zeta), \tag{6}$$

$\varphi(t,R_0)$ — неизвестная функция, непрерывная и ограниченная вместе с частными производными первого порядка по R_0; $\varphi(0,R_0) = 0$, $R_0 = (0,y,z)$.

В (4), (5) $u_0(R)$ и $f(t,R)$ доопределены необходимым образом во всем E_3.

Легко проверить, что $u_1(t,R)$, $u_3(t,R)$ удовлетворяют однородному уравнению Сонина $(f(t,R)=0)$ и $u_1(0,R)=u_0(R)$, $u_3(0,R)=0$, $u_2(t,R)$ удовлетворяет (1) и $u_2(0,R)=0$. Докажем выполнение условия (3):

$$\lim_{x\to 0}[u'_x(t,R)+\beta(t)u(t,R)] = \lim_{x\to 0}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t d\tau\int_{E_2}\Gamma(R,t;S_0,\tau)\varphi(\tau,S_0)\,dS_0 +$$

$$+\beta(t)\int_0^t d\tau\int_{E_2}\varphi(\tau,S_0)\Gamma(R,t;S_0,\tau)\,dS_0\Big] + \lim_{x\to 0}\Big[\frac{\partial}{\partial x}u_1(t,R)+\beta(t)u_1(t,R)\Big] +$$

$$+\lim_{x\to 0}\Big[\frac{\partial}{\partial x}u_2(t,R)+\beta(t)u_2(t,R)\Big] = g(t,R_0),\quad R_0=(0,y,z),$$

или

$$\lim_{x\to 0}\Big[\frac{\partial}{\partial x}u_3(t,R)+\beta(t)u_3(t,R)\Big] + \lim_{x\to 0}F_1(t,R) = g(t,R_0).$$

Из свойств решения задачи Коши для (1) следует непрерывность $F_1(t,R)$ и существование предела $\lim\limits_{x\to 0}F_1(t,R) = F_1(t,R_0)$. Найдем

$$\lim_{x\to 0}\int_0^t d\tau\int_{E_2}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(R,t;S_0,\tau)\varphi(\tau,S_0)\,dS_0 = \lim_{x\to 0}J_1(t,R);$$

$$J_1(t,R) = \int_0^t d\tau\int_{E_2}\frac{3\sqrt{15}}{\pi^{3/2}(t-\tau)^{9/2}}\Big[-\frac{x}{2(t-\tau)} - \frac{3}{(t-\tau)^2}\Big(y-\eta+x\frac{(t-\tau)}{2}\Big) -$$

$$-\frac{30}{(t-\tau)^3}\Big(z-\zeta+\frac{(y+\eta)(t-\tau)}{2}+x\frac{(t-\tau)^2}{12}\Big)\Big]\exp\Big\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}-\frac{3}{(t-\tau)^3}\Big(y-\eta+$$

$$+\frac{x(t-\tau)^2}{12}\Big)^2-\frac{180}{(t-\tau)^5}\Big(z-\zeta+\frac{(y+\eta)(t-\tau)}{2}+\frac{x(t-\tau)^2}{12}\Big)^2\Big\}\varphi(\tau,S_0)\,dS_0 = H_1+H_2$$

или

$$\lim_{x\to 0}H_1 = -\frac{3\sqrt{15}}{2\pi^{3/2}}\lim_{x\to 0}\int_0^t d\tau\int_{E_2}\frac{x}{(t-\tau)^{11/2}}\exp\Big\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}-\frac{3}{(t-\tau)^3}\Big(y-\eta+$$

$$+x\frac{(t-\tau)}{2}\Big)^2-\frac{180}{(t-\tau)^5}\Big(z-\zeta+\frac{(y+\eta)(t-\tau)}{2}+x\frac{(t-\tau)^2}{12}\Big)^2\Big\}\varphi(\tau,S_0)\,dS_0. \qquad (7)$$

Имеем

$$\lim_{x\to 0}H_2 = -\frac{9\sqrt{15}}{\pi^{3/2}}\lim_{x\to 0}\int_0^t d\tau\int_{E_2}\Big[\Big(y-\eta+x\frac{(t-\tau)}{2}\Big)^2+10\Big(z-\zeta+\frac{(y+\eta)(t-\tau)}{2}\Big)+$$

$$+x\frac{(t-\tau)^2}{12}(t-\tau)^{-1}\Big](t-\tau)^{-13/2}\exp\Big\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}-\frac{3}{(t-\tau)^3}\Big(y-\eta+x\frac{(t-\tau)^2}{2}\Big)^2-$$

$$-\frac{180}{(t-\tau)^5}\Big(z-\zeta+\frac{(y+\eta)(t-\tau)}{2}+x\frac{(t-\tau)^2}{12}\Big)^2\Big\}\varphi(\tau,S_0)\,dS_0. \qquad (8)$$

Изучим предел (7). При этом будем использовать замену переменных интегрирования

$$\frac{x}{2(t-\tau)^{1/2}} = \alpha; \quad \frac{\sqrt{3}}{(t-\tau)^{3/2}}\left(y-\eta + x\frac{(t-\tau)}{2} \right) = \gamma,$$

$$\frac{6\sqrt{5}}{(t-\tau)^{5/2}}\left(z-\zeta + \frac{(y+\eta)(t-\tau)}{2} + x\frac{(t-\tau)^2}{12} \right) = \beta. \tag{9}$$

В результате получаем

$$H_1 = \pi^{-3/2} \int\limits_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} d\alpha \int\limits_{E_2} \exp\{-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\}\, \varphi\Big(t-\frac{x}{4\alpha^2},\ y+\frac{x^3}{8\alpha^3} - \frac{\gamma x^3}{8\sqrt{3}\alpha^3},$$

$$z-\frac{\beta x^5}{96\sqrt{5}\alpha^5} + \frac{7x^5}{192\alpha^4} + \frac{yx^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma x^3}{8\sqrt{3}\alpha^2} \Big) dM_0, \quad M = (0, \gamma, \beta). \tag{10}$$

Из (10) следует оценка H_1:

$$|H_1| \le \sup_{(t,R_0)} |\varphi(t,R_0)|\, \pi^{-3/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha^2\}\, d\alpha \right)^2 \le C. \tag{11}$$

В силу (11) интеграл (10) сходится равномерно по t и R, поэтому

$$\lim_{x\to 0} H_1 = \varphi(t,R_0)\, \pi^{-3/2} \int\limits_0^{\infty} d\alpha \int\limits_{E_2} \exp\{-\alpha^2 - M_0^2\}\, dM_0 = \frac{1}{2}\varphi(t,R_0).$$

Покажем, что H_2 сходится равномерно по t, R_0 к

$$J_0(t,R_0) = \int_0^t d\tau \int_{E_2} \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(R_0,t;S_0,\tau)\,\varphi(\tau,S_0)\,dS_0, \quad t>0.$$

Представим $(\partial/\partial x)\Gamma(R_0, t; S_0\, \tau)$ в явном виде и, сделав замену переменных интегрирования $\tau=\tau$, $\sqrt{3}(y-\eta)(-\tau)^{-3/2}=\gamma$, $6\sqrt{5}(z-\zeta+(y-\eta)(t-\tau)/2)(t-\tau)^{-5/2}=\beta$, получим

$$J_0(t,R_0) = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^t d\tau \int_{E_2} (\sqrt{3}\gamma+\sqrt{5}\beta)\exp\{-\gamma^2-\beta^2\}\,(t-\tau)^{-1}\,\varphi\Big(\tau,\ y-$$

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{3}}(t-\tau)^{3/2},\ z-\frac{\beta}{6\sqrt{5}}(t-\tau)^{5/2} + y(t-\tau) - \frac{\gamma}{2\sqrt{3}}(t-\tau)^{5/2} \Big)\, dM_0.$$

Заменив $\tau=\tau$, $(y-\eta+x(t-\tau)/2)\sqrt{3}(t-\tau)^{-3/2}=\gamma$, $6\sqrt{5}(t-\tau)^{-5/2}(z-\zeta+(y+\eta)(t-\tau)/2+x(t-\tau)^2/12)=\beta$, представим H_2 в виде

$$H_2 = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^t d\tau \int_{E_2} (t-\tau)^{-1}(\sqrt{3}\gamma+\sqrt{5}\beta)\exp\Big\{ \frac{x^2}{4(t-\tau)} - M_0^2 \Big\}\, \varphi\Big(\tau,\ y+$$

$$+x\frac{(t-\tau)}{2} - \frac{\gamma}{\sqrt{3}}(t-\tau)^{3/2},\ z-\frac{\beta}{6\sqrt{5}}(t-\tau)^{5/2} + y(t-\tau) -$$

$$-x\frac{(t-\tau)^2}{3} - \frac{\gamma}{2\sqrt{3}}(t-\tau)^{5/2} \Big)\, dM_0. \tag{12}$$

Рассмотрим разность $H_2 - J_0(t,R_0)$, представив ее в виде

$$H_2 - J_0(t,R_0) = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^t d\tau \int_{E_2} (\sqrt{3}\gamma+\sqrt{5}\beta)\,(t-\tau)^{-1}\,\varphi\Big(\tau,\ y-\frac{\gamma}{\sqrt{3}}(t-\tau)^{3/2},\ z-$$

$$-\frac{\beta}{6\sqrt{5}}(t-\tau)^{5/2} + y(t-\tau) - \frac{\gamma}{2\sqrt{3}}(t-\tau)^{5/2} \Big)\exp\{-\beta^2-\gamma^2\}\Big[\exp\Big\{ \frac{x^2}{4(t-\tau)} \Big\} -$$

$$-1\Big]dM_0 + \frac{1}{2\pi^{3/2}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_2}(t-\tau)^{-1}(\sqrt{3}\gamma+\sqrt{5}\beta)\Big[\varphi\Big(\tau,\ y+x\frac{(t-\tau)}{2}-$$

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{3}}(t-\tau)^{3/2},\ z-\frac{\beta}{6\sqrt{5}}(t-\tau)^{5/2}+y(t-\tau)+x\frac{(t-\tau)^2}{3}-$$

$$-\frac{\gamma}{2\sqrt{3}}(t-\tau)^{5/2}\Big)-\varphi\Big(\tau,\ y-\frac{\gamma}{\sqrt{3}}(t-\tau)^{3/2},\ z-\frac{\beta}{6\sqrt{5}}(t-\tau)^{5/2}+y(t-\tau)-$$

$$-\frac{\gamma}{2\sqrt{3}}(t-\tau)^{5/2}\Big)\Big]\exp\{-\gamma^2-\beta^2-x^2(4(t-\tau))^{-1}\}\,dM_0 = H_3+H_4.$$

Так как

$$|H_4| \le \sup_{(t,R_0)}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|\frac{\sqrt{3}}{4\pi^{3/2}}\int_0^t d\tau\int_{E_2}|\gamma|\exp\{-M_0^2\}\,dM_0 +$$

$$+x\sup_{(t,R_0)}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|\frac{\sqrt{5}}{2\pi^{3/2}}\int_0^t d\tau\int_{E_2}(t-\tau)|\beta|\exp\{-M_0^2\}\,dM_0 \le xC,$$

то интеграл H_4 мал при малых x.

Оценим H_3. Для этого проинтегрируем его по частям

$$|H_3| \le \frac{1}{4\pi^{3/2}}\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int_{E_2}\Big[\sqrt{3}\,\Big|\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi\Big(\tau,\ y-\frac{\gamma}{\sqrt{3}}(t-\tau)^{3/2},\ z-\frac{\beta}{6\sqrt{5}}(t-\tau)^{5/2}+$$

$$+y(t-\tau)-\frac{\gamma}{2\sqrt{3}}(t-\tau)^{5/2}\Big)\Big|+\sqrt{5}\,\Big|\frac{\partial}{\partial\beta}\varphi\Big(\tau,\ y-\frac{\gamma}{\sqrt{3}}(t-\tau)^{3/2},\ z-$$

$$-\frac{\beta}{6\sqrt{5}}(t-\tau)+y(t-\tau)-\frac{\gamma}{2\sqrt{3}}(t-\tau)^{5/2}\Big)\Big|\Big]\exp\{-M_0^2\}\Big[\exp\Big\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Big\}-$$

$$-1\Big]dM_0 \le C\sup_{(t,R_0)}\Big|\frac{\partial}{\partial y}\varphi(t,R_0)\Big|\,\Big|\int_0^t(t-\tau)^{1/2}\Big[1-\exp\Big\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Big\}\Big]d\tau\Big|+$$

$$+\sup_{(t,R_0)}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\varphi(t,R_0)\Big|\,\Big|\int_0^t(t-\tau)^{3/2}\Big[1-\exp\Big\{\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Big\}\Big]d\tau\Big|. \tag{13}$$

Из (13) следует, что H_3 мал при малых x.

В силу (12), (13) имеем $\lim\limits_{x\to 0}H_2 = J_0(t,R_0)$ равномерно относительно t, R_0.

Таким образом, $u(t,R)$ является решением краевой задачи (1) – (3), а $\varphi(t,R_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t,R_0) = 2\int_0^t d\tau\int_{E_2}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(R_0,t;S_0,\tau)\,dS_0 +$$

$$+\beta(t)\int_0^t d\tau\int_{E_2}\Gamma(R_0,t;S_0,\tau)d\varphi(\tau,S_0)dS_0 + 2F_1(t,R_0) - g(t,R_0). \tag{14}$$

Введем множество V функций переменных t, R_0 [3]. Элементы этого множества — непрерывные функции t, R_0, имеющих все производные по R_0, удовлетворяющие неравенствам вида $|D_{R_0}^k v(t,R_0)| \le C_k\exp\{-a|R_0|^2\}$ с постоянными $C_k,\ a,$ зависящими только от $v(t,R_0)$.

Введем норму функции $v(t,R_0)$:

$$\|v(t,R_0)\|_\alpha = \sup_{(t,S_0)}|\tilde v(t,S_0)|\,[1+|S_0|^2]^{\alpha/2},\quad \alpha>0, \tag{15}$$

где $\tilde v(t,S_0)$ — преобразование Фурье по R_0 от функции $v(t,R_0)$.

Под множеством $\tilde{C}_\alpha$ будем понимать пополнение множества V по норме (15). Перепишем (14) в эквивалентной форме

$$\varphi(t, R_0) = (A_1 + A_2)\varphi(t, R_0) + \mathrm{X}(t, R_0),$$

где

$$A_1\varphi(t, R_0) = 2\int_0^t d\tau \int_{E_2} \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(R_0, t; S_0, \tau)\,\varphi(\tau, S_0)\, dS_0,$$

$$A_2\varphi(z, R_0) = 2\beta(t)\int_0^t d\tau \int_{E_2} \Gamma(R_0, t; S_0, \tau)\,\varphi(\tau, S_0)\, dS_0,$$

$$\mathrm{X}(t, R_0) = 2F_1(t, R_0) - 2g(t, R_0).$$

Покажем, что оператор $A_1 + A_2$ осуществляет сжимающее отображение множества V в себя при малом t.

Легко видеть, что для $\varphi(t, R_0) \in V$ функция $(A_1 + A_2)\varphi(t, R_0) \in V$. Оценим $\| A_1\varphi(t, R_0) \|_\alpha$. Для этого найдем преобразование Фурье по R_0 от $A_1\varphi(t, R_0)$:

$$A_1\tilde{\varphi}(t, S_0) = \frac{\pi^{-1/2}}{2} \int_0^t \Big((t-\tau)^{1/2}\, \tilde{\varphi}(\tau,\ \eta - \zeta(t-\tau),\ \zeta) +$$

$$+ \exp\Big\{ \frac{(t-\tau)^5\zeta^2}{720} - \frac{(t-\tau)^3}{12}\Big(\eta - \zeta\frac{t-\tau}{2}\Big)^2 \Big\}\Big[\eta - \zeta\frac{t-\tau}{3}\Big]\Big) d\tau.$$

В случае $\eta \geq 0,\ \zeta \leq 0$ (или $\eta \leq 0,\ \zeta \geq 0$)

$$|A_1\tilde{\varphi}(t, S_0)| \leq \sup_{(t,S_0)} |\tilde{\varphi}(t, S_0)|\,(2\sqrt{\pi})^{-1} \int_0^t \Big(|\eta| + \frac{5}{6}|\zeta|(t-\tau)\Big)(t-$$

$$-\tau)^{1/2} \exp\Big\{-\Big(|\eta| + \frac{1}{2}|\zeta|(t-\tau)\Big)^2 \frac{(t-\tau)^3}{12}\Big\}\Big)\, d\tau \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sup_{(t,S_0)} |\tilde{\varphi}(t, S_0)|. \qquad (16)$$

Рассмотрим $\eta > 0,\ \zeta > 0$ (или $\eta < 0,\ \zeta < 0$), полагая $t \leq 1$:

а) $|\zeta| \leq |\eta|,\ \ t \leq 1$,

$$|A_1\tilde{\varphi}(t, S_0)| \leq \sup_{(t,S_0)} |\tilde{\varphi}(t, S_0)| \Big[(2\sqrt{\pi})^{-1} \int_0^t (|\eta| - \frac{5}{6}|\zeta|(t-\tau))(t-$$

$$-\tau)^{1/2} \exp\Big\{-\Big(|\eta| - \frac{1}{2}|\zeta|(t-\tau)\Big)^2 \frac{(t-\tau)^3}{12}\Big\}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t |\zeta|(t-\tau)^{3/2} \exp\Big\{-\zeta^2 \frac{(t-\tau)^5}{45}\Big\}\, d\tau\Big] \leq \frac{4\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{4\sqrt{15}} \sup_{(t,S_0)} |\tilde{\varphi}(t, S_0)|; \qquad (17)$$

б) $|\zeta| > |\eta| > |\zeta|^{3/10}$,

$$|A_1\tilde{\varphi}(t, S_0)| \leq \sup_{(t,S_0)} |\tilde{\varphi}(t, S_0)| \Big[(2\sqrt{\pi})^{-1} \int_0^t |\eta|\,(t-\tau)^{1/2} \exp\Big\{-\zeta^2 \frac{(t-\tau)^5}{720} -$$

$$-\Big(\eta - \frac{1}{2}\zeta(t-\tau)\Big)^2 \frac{(t-\tau)^3}{12}\Big\}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{6\pi}\int_0^t |\zeta|(t-\tau)^{3/2} \exp\Big\{-\zeta^2 \frac{(t-\tau)^5}{720} - \Big(\eta - \frac{1}{2}\zeta(t-\tau)\Big)^2 \frac{(t-\tau)^3}{12}\Big\}\, d\tau \leq$$

$$\leq \sup_{(t,S_0)} |\tilde{\varphi}(t,S_0)| \, [J_1 + J_2].$$

Так как $|J_2| \leq 2/\sqrt{5}$, то оценим J_1. Обозначим $k_1 = (1 - 2/\sqrt{5})/4$, сделав замену $t - \tau = \tau_1$, покажем, что $|J_1| \leq 2k_1$ при $|\zeta| > \zeta_0$. Действительно,

$$|J_1| \leq \int\limits_0^{k_1|\zeta|^{-1/5}} |\eta| \, \tau^{1/2} d\tau + \int\limits_{k_1|\zeta|^{-1/5}}^{t} |\eta| \, \tau^{1/2} \exp\{-|\eta|^2 \tau^3 \, 384^{-1}\} \, d\tau \times$$

$$\times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{ -|\zeta| \frac{k_1^5}{1440} \right\} < 2k_1 \tag{18}$$

при $|\zeta| > -1440 \, k_1^{-5} \ln \dfrac{\sqrt{3}\, k_1}{4\sqrt{2}} = \zeta_0$;

в) $|\zeta| > |\eta|^{10/3}$, $|\zeta| > \zeta_0$, $|\eta| > 1$,

$$|J_1| \leq \int\limits_0^{k_1|\eta|^{-5/3}} |\eta| \, \tau^{1/2} d\tau + \int\limits_{k_1|\eta|^{-5/3}}^{t} |\eta| \, \tau^{1/2} \exp\left\{ -|\zeta| \frac{k_1^5}{1440} \right\} \times$$

$$\times \exp\{-|\eta|^2 \tau^3 \, 384^{-1}\} \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi}} < 2k_1. \tag{19}$$

В случае $|\zeta|, |\eta| \leq \zeta_0$ при $t \leq \zeta_0^{-2/3}$

$$|A_1 \tilde{\varphi}(t, S_0)| \leq \sup_{(t,S_0)} |\tilde{\varphi}(t, S_0)| \, \frac{2}{3\sqrt{\pi}}. \tag{20}$$

В силу оценок (16) – (20) при $t \leq \zeta_0^{-2/3}$ справедлива оценка

$$|A_1 \tilde{\varphi}(t, S_0)| \leq r_0 \sup_{(t,S_0)} |\tilde{\varphi}(t, S_0)|, \quad 0 < r_0 < 1,$$

поэтому

$$\|A_1 \varphi(t, R_0)\|_\alpha \leq r_0 \, \|\varphi(t, R_0)\|_\alpha. \tag{21}$$

Подберем t так, чтобы

$$\|A_2 \varphi(t, R_0)\|_\alpha \leq \frac{1 - r_0}{2} \, \|\varphi(t, R_0)\|_\alpha. \tag{22}$$

Из оценок (21), (22) следует, что при минимальном t оператор $A_1 + A_2$ является оператором сжатия и переводит полное банахово пространство $\tilde{C}_{3+\gamma}$, $0 < \gamma < 0,4$ в себя.

Единственность решения поставленной задачи с $\beta(t) < 0$ в классе ограниченных функций доказывается аналогично, как для краевых задач уравнения диффузии в неограниченных областях [1, 2]. В силу существования и единственности решения его можно по непрерывности продолжить на $[0, T]$.

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
2. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, вып. 3(105). – С. 3 – 149.
3. *Малицкая А. П.* Первая смешанная задача в полупространстве для уравнения Соснина // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 3. – С. 321 – 326.

Получено 26.12.91