УДК 517.944

Ю. А Митропольский, акад. (Ин-т математики АН Украины, Киев),
Г. П. Хома, д-р физ.-мат. наук (Терноп. пед. ин-т)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. V*

It is established that the linear problem $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$ is always solvable in the space of functions $A = \{g\colon g(x, t) = g(x, t+T) = g(\pi - x, t) = -g(-x, t)\}$ provided that $aTq = (2p-1)\pi$, $(2p-1, q) = 1$, where p, q are integers. To prove this statement, an explicit solution is constructed in the form of an integral operator which is used to prove the existence of a solution to a periodic boundary value problem for nonlinear second order wave equation. The results obtained can be employed in the study of solutions to nonlinear boundary value problems by asymptotic methods.

У просторі функцій $A = \{g\colon g(x, t) = g(x, t+T) = g(\pi - x, t) = -g(-x, t)\}$ встановлено, що при виконанні умови $aTq = (2p-1)\pi$, $(2p-1, q) = 1$, де p, q — цілі числа, лінійна задача $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$ завжди сумісна. Для доведення цього твердження побудовано точний розв'язок у вигляді інтегрального оператора, який використовується при доведенні існування розв'язку періодичної крайової задачі для нелійного рівняння другого порядку. Одержані результати застосовуються при дослідженні розв'язків нелінійних крайових задач асимптотичними методами.

1. Линейная задача. Исследуем вопрос о существовании классических решений линейной задачи, описанной уравнениями

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t), \quad (x, t) \in I \times \mathbb{R}; \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{2}$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in I \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

на одном конкретно определенном пространстве функций, тесно связанном с множеством I и числами a и T. Заметим, что задача (1) – (3) при $a = 1$ исследована авторами в работах [1 – 5].

Обозначим через C пространство функций двух переменных x и t, непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^2$, а через G_x — пространство функций двух переменных, непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^2$ вместе с производной по x. Как и в [1 – 5], через $L(X, Y)$ будем обозначать пространство линейных и ограниченных отображений X в Y.

Символами Q_T^1, Q_π, $Q_{2\pi}$ обозначим пространства функций u, удовлетворяющих на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ соответственно соотношениям $u(x, t+T) = u(x, t)$; $u(\pi - x, t) = u(x, t) = -u(-x, t)$; $u(x, t) = -u(-x, t) = u(x + 2\pi, t)$. Пусть p и q — целые числа. Выражение $(p, q) = 1$ означает, что числа p и q взаимно просты.

Далее, определим для периода T следующее пространство функций $u \in C$:

$$A = \{u\colon u(x, t) = u(x, t+T) = u(\pi - x, t) = -u(-x, t)\},$$

причем если для функций $u \in A$ выполнено условие

$$\int_{-T}^{0} d\tau \int_{0}^{b} \{u(x + ay, \tau) + u(x - ay, \tau)\} dy = 0, \tag{4}$$

то такой класс функций будем обозначать через $\tilde{A}_{ab}$.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований.

Лемма 1. *Если* $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap Q_\pi$, *то* $u \in Q_{2\pi}$.

Доказательство. Действительно, $u(x+2\pi, t) = u(\pi - (-\pi - x), t) = -u(\pi + x, t) = -u(x, t) = u(x, t)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если для функции* $u \in A$ *справедливы разложения в ряд Фурье вида*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \tag{5}$$

то $u_{2n}(t) = 0$ *для всех* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *т. е. в этом случае ряд* (5) *имеет вид*

$$u(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} u_{2s+1}(t) \sin(2s+1)x. \tag{6}$$

Доказательство. Вычисляя коэффициенты Фурье по известным формулам и производя соответствующие преобразования, получаем соотношения

$$u_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x, t)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(x, t)\sin kx\,dx +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} u(x, t)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(x, t)\sin kx\,dx -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{0} u(\pi - x, t)\sin k(\pi - x)\,dx = 0, \quad k = 2, 4, 6, \ldots .$$

Лемма доказана.

Введем обозначения

$$r(x, ay, \tau) = \frac{1}{4}(g(x + a(y-\tau), \tau) + g(x - a(y-\tau), \tau)); \tag{7}$$

$$\bar{r}(x, ay, \tau) = \frac{1}{4}(g(x + a(y-\tau), \tau) - g(x - a(y-\tau), \tau)). \tag{8}$$

Для $g \in C \cap A$ положим

$$(P_0 g)(x, t, a) = 2\int_0^t d\tau \int_\tau^t r(x, ay, \tau)dy; \tag{9}$$

$$(Pg)(x, t, a, b) = \int_0^t d\tau \int_\tau^t r(x, ay, \tau)dy - \int_t^b d\tau \int_\tau^t r(x, ay, \tau)dy \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}(P_0 g)(x, t, a) - \int_t^b d\tau \int_\tau^t r(x, ay, \tau)dy, \tag{10}$$

где $b = \mathrm{const} \neq 0$.

Лемма 3. *Пусть* $g \in G_x \cap A$. *Тогда* $u = Pg$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и условиям* (2).

Доказательство. Вычисляя соответствующие частные производные функции $u(x, t) = (Pg)(x, t)$, получаем

$$u_t = \int_0^t r(x, at, \tau) - \int_t^b r(x, at, \tau)d\tau;$$

$$u_{tt} = g(x, t) + a\int_0^t \bar{r}_x'(x, at, \tau)d\tau - a\int_t^b \bar{r}_x'(x, at, \tau)d\tau;$$

$$u_x = \int_0^t d\tau\int_\tau^t r_x'(x, ay, \tau)dy - \int_t^b d\tau\int_\tau^t r_x'(x, ay, \tau)dy =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t d\tau\int_\tau^t \bar{r}_y'(x, ay, \tau)dy - \frac{1}{a}\int_t^b d\tau\int_\tau^t \bar{r}_y'(x, ay, \tau)dy =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t \bar{r}(x, at, \tau)d\tau - \frac{1}{a}\int_t^b \bar{r}(x, at, \tau)d\tau;$$

$$u_{xx} = \frac{1}{a}\int_0^t \bar{r}_x'(x, at, \tau)d\tau - \frac{1}{a}\int_t^b \bar{r}_x'(x, at, \tau)d\tau.$$

Отсюда находим $u_{tt} - a^2u_{xx} = g(x, t)$, т. е. функция $u(x, t) = (Pg)(x, t)$ является решением уравнения (1).

Учитывая обозначение (7), для $g \in A$ имеем $r(0, ay, \tau) = 0$, $r(\pi, ay, \tau) = 0$.

Теперь на основании (9) и (10) получаем, что функция $u(x, t) = (Pg)(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2), что и требовалось доказать.

Далее, выясним при каких соотношениях между параметром a уравнения (1) и периодом T правой части $g(x, t)$ этого уравнения оператор P, определяемый формулой (10), удовлетворяет условию

$$(Pg)(x, t + T, a, b) = (Pg)(x, t, a, b). \tag{11}$$

Имеем

$$(Pg)(x, t + T, a, b) = \int_0^{t+T} d\tau \int_\tau^{t+T} r(x, ay, \tau)dy - \int_{t+T}^b d\tau \int_\tau^{t+T} r(x, ay, \tau)dy =$$

$$= \int_0^T d\tau \int_\tau^{t+T} r(x, ay, \tau)dy + \int_T^{t+T} d\tau \int_\tau^{t+T} r(x, ay, \tau)dy - \int_{t+T}^b d\tau \int_\tau^{t+T} r(x, ay, \tau)dy.$$

Производя сначала во внешнем интеграле замену переменной $\tau = z + T$, а потом во внутреннем интеграле замену $y = T + v$, получаем

$$(Pg)(x, t + T, a, b) = \int_{-T}^0 dz \int_{z+T}^{t+T} r(x, ay, z + T)dy +$$

$$+ \int_0^t dz \int_{z+T}^{t+T} r(x, ay, z + T)dy - \int_t^b dz \int_{z+T}^{t+T} r(x, ay, z + T)dy =$$

$$= \int_{-T}^0 dz\int_z^t r(x, av, z + T)dv + \int_0^t dz\int_z^t r(x, av, z + T)dv -$$

$$-\int_{t}^{b} dz \int_{z}^{t} r(x, av, z+T)dv - \int_{b}^{b-T} dz \int_{z}^{t} r(x, av, z+T)dv.$$

Теперь, предполагая, что $g \in A$, т. е. $g(x, t+T) = g(x, t)$, и производя в последнем интеграле замену переменной, находим

$$(Pg)(x, t+T, a, b) = (Pg)(x, t, a, b) + \int_{-T}^{0} d\tau \int_{\tau}^{t} r(x, av, \tau)dv -$$

$$- \int_{0}^{-T} d\tau \int_{b+\tau}^{t} r(x, av, b+\tau)dv = (Pg)(x, t, a, b) + \int_{-T}^{0} d\tau \int_{\tau}^{t} r(x, av, \tau)dv +$$

$$+ \int_{-T}^{0} d\tau \int_{\tau}^{t} r(x, av, b+\tau)dv - \int_{-T}^{0} d\tau \int_{\tau}^{\tau+b} r(x, av, b+\tau)dv.$$

Упростить последнее равенство можно при выполнении условия $r(x, av, b + + \tau) = r(x, av, \tau)$. С учетом обозначения (7), очевидно, для этого необходимо и достаточно выполнения условия

$$g(x \pm ab \pm a(v-\tau), b+\tau) = -g(x \pm a(v-\tau), \tau), \tag{12}$$

которое в пространстве функций $g \in A$ равносильно равенствам

$$b = Tq, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

$$ab = (2p-1)\pi, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Таким образом, если выполнены условия (13) и (14) и $g \in \tilde{A}_{ab}$, то, учитывая (4), из последних интегральных равенств получаем $(Pg)(x, t+T, a, b) = (Pg)(x, t, a, b)$, т. е. в этих случаях всегда выполняется условие (11).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (13), (14) *и* $g \in A$. *Тогда* $g \in \tilde{A}_{ab}$.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий леммы 4 функция $g \in \tilde{A}_{ab}$, т. е. всегда выполняется условие (4). Действительно, вычисляя внутренний интеграл равенства (4) для функций $g(x, t)$, получаем соотношения

$$\int_{0}^{Tq} \{g(x+ay, \tau) + g(x-ay, \tau)\}dy =$$

$$= \int_{0}^{Tq/2} \{g(x+ay, \tau) + g(x-ay, \tau)\}dy +$$

$$+ \int_{Tq/2}^{Tq} \{g(x+ay, \tau) + g(x-ay, \tau)\}dy =$$

$$= \int_{0}^{Tq/2} \{g(x+ay, \tau) + g(x-ay, \tau)\}dy +$$

$$+ \int_{0}^{Tq/2} \{g(x-az+aTq, \tau) + g(x+az+aTq, \tau)\}dz = 0,$$

что и требовалось доказать.

На основании сказанного выше справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (13), (14) *и* $g \in G_x \cap \tilde{A}_{ab}$. *Тогда*

$$P \in L(C \cap Q_T^1 \cap Q_\pi \cap Q_{2\pi},\ C^1 \cap Q_T^1 \cap Q_\pi \cap Q_{2\pi}),$$

$$P \in L(G_x \cap Q_T^1 \cap Q_\pi \cap Q_{2\pi},\ C^2 \cap Q_T^1 \cap Q_\pi \cap Q_{2\pi}).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (13) *и* (14) *для параметра* a *уравнения* (1) *и периода* T *правой части* $g(x, t)$ *этого уравнения. Тогда для* $g \in G_x \cap \tilde{A}_{ab}$ *функция* $u = Pg$ *является единственной функцией из* $C^2 \cap \tilde{A}_{ab}$, *удовлетворяющей* (1) – (3).

***Следствие* 1.** *Если* $g \in C \cap \tilde{A}_{ab}$, *то* $u = Pg \in C^1 \cap \tilde{A}_{ab}$.

***Следствие* 2.** *Пусть* $T = \pi$, $q = 1$, *и* $g \in G_x \cap \tilde{A}_{ab}$. *Тогда функция* $u = Pg$ *является единственной функцией из класса* $C^2 \cap \tilde{A}_{ab}$, *удовлетворяющей* (1) – (3) *при нечетном значении* a, *т. е.* $a = 2m - 1$, $m = \mathbb{N}$.

Заметим, что такой результат $(a = 2m - 1)$ впервые был получен в работе [6].

2. Нелинейная задача. Целый ряд задач теории колебаний приводит к необходимости нахождения периодических решений нелинейных уравнений в частных производных.

Нелинейная задача о колебаниях струны представляет задачу подобного типа, которую можно сформулировать следующим образом: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(\varepsilon, x, t, u, u_t, u_x) \tag{15}$$

(a — постоянная, ε — малый параметр, F — периодическая функция времени t с периодом T, нелинейная, содержащая u, u_t, u_x и при $\varepsilon = 0$ обращающаяся в функцию, зависящую только от x и t), граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \tag{16}$$

условиям периодичности

$$u(x, t + T) = u(x, t) \tag{17}$$

и непрерывную вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в области $\Omega = \{0 \le x \le \pi,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Не ограничивая общности, можно полагать, что краевые условия (16) по x заданы в точках $x = 0$, $x = \pi$, так как с помощью линейной замены переменных вида $y = x\pi / l$ задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(\varepsilon, x, t, u, u_t, u_x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

сводится к задаче типа (15), (16).

В данной работе мы рассмотрим простейший частный случай нелинейной задачи, когда правая часть уравнения (15) имеет вид

$$F(\varepsilon, x, t, u, u_t, u_x) = g(x, t) + \varepsilon f(u),$$

и докажем, что в зависимости от ряда условий эта задача может иметь или не иметь решения в указанном выше классе функций $\tilde{A}_{ab}$.

Окончательно можно сформулировать поставленную задачу следующим образом: исследовать, при каких значениях чисел a и ε и при каких свойствах функций $g(x, t)$ и $f(u)$ задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t) + \varepsilon f(u), \quad (x, t) \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}; \tag{18}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \tag{20}$$

имеет непрерывное, гладкое и классическое решение в области Ω.

Введем обозначение

$$F(u)(x, ay, \tau) = \frac{1}{4}(f(u(x + a(y-\tau), \tau)) + f(u(x - a(y-\tau), \tau))). \tag{21}$$

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма

$$u(x, t) = \int_0^b Q d\tau \int_\tau^t \{r(x, ay, \tau) + \varepsilon F(u)(x, ay, \tau)\} dy \equiv$$

$$\equiv (P(r + \varepsilon F))(x, t, a, b), \tag{22}$$

где

$$Q = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau \le t, \\ -1, & t < \tau \le b, \quad b = Tq. \end{cases} \tag{23}$$

Определение. *Непрерывное решение* $u(x, t)$ *интегрального уравнения* (22) *будем называть непрерывно обобщенным или просто непрерывным решением краевой задачи* (18), (19).

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 5. *Пусть* $u \in G_x \cap \tilde{A}_{ab}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(-u) = -f(u)$. *Тогда* $z = f(u) \in \in C^1 \cap \tilde{A}_{ab}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (13) *и* (14) *для параметра* a *и периода* T *функции* $g(x, t)$ *уравнения* (18), $g(x, t) \in C \cap \tilde{A}_{ab}$, $f(u) \in \mathrm{Lip}\,(M; \mathbb{R})$, $M = \mathrm{const}$, $f(-u) = -f(u)$. *Тогда при достаточно малом по модулю* ε *нелинейная задача* (18) – (20) *имеет единственное гладкое решение* $u(x, t) \in C^1$, *периодическое по* t *с периодом* $T = (2p-1)\pi / aq$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (13) *и* (14) *для параметра* a *и периода* T *функции* $g(x, t)$ *уравнения* (18), $g \in G_x \cap \tilde{A}_{ab}$, $|f'(u)| \le M_1$, $|f''(u)| \le \le M_2$ $(\forall u \in \mathbb{R},\ M_1,\ M_2 = \mathrm{const})$, $f(-u) = -f(u)$. *Тогда при достаточно малом по модулю* ε *нелинейная задача* (18) – (20) *имеет единственное классическое решение* $u(x, t) \in C^2$, *периодическое по* t *с периодом* $T = (2p-1)\pi / aq$.

Доказательство теорем 3 и 4 проводится методом последовательных приближений с использованием ранее полученных свойств оператора P и интегрального уравнения (22).

Замечания. **1.** Примером уравнения, коэффициенты и функции которого удовлетворяют всем условиям теоремы 4, является уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = = g(x, t) + \varepsilon \sin u$, где $g(x, t)$ — любая функция из пространства $\tilde{A}_{ab}$, а примером, для которого не выполняются условия теоремы 4, является уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t) + \varepsilon u^2$.

2. Применение принципа Шаудера позволяет установить существование решения интегрального уравнения (22), а следовательно, волнового дифференциального уравнения (18) при более слабых предположениях относительно функции $f(u)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (13) *и* (14) *для параметра a и периода T функции $g(x, t)$ уравнения* (18), $g(x, t) \in C \cap \tilde{A}_{ab}$, $|f(u)| \leq M$ $(\forall u \in \in \mathbb{R}$, $M = \text{const})$, $f(-u) = -f(u)$ *и $f(u)$ непрерывна по u равномерно.*

Тогда краевая задача (18) – (20) *имеет, по крайней мере, одно непрерывное $T = (2p-1)\pi / aq$-периодическое решение.*

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 2.10 работы [5, с. 70].

Согласно теореме 5 уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t) + \sin u$ имеет одно непрерывное $T = (2p-1)\pi / aq$-периодическое решение.

***Замечание* 3.** Полученные результаты применимы при исследовании решений краевых задач (15) – (16) асимптотическими методами [5, 7]. Действительно, при $\varepsilon = 0$ получаем линейную краевую задачу вида (1), (2), о поведении решения которой в пространстве A можно судить на основании свойств оператора P_0 (см. (9)), а о существовании периодических решений как линейной, так и нелинейной задачи (15), (16) — на основании свойств оператора P (см. (10)) и теорем 1 – 5.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. I // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 5. – С. 593 – 600.
2. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. II // Там же. – № 6. – С. 733 – 739.
3. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. III // Там же. – 1987. – **39**, № 3. – С. 347 – 353.
4. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. IV // Там же. – 1988. – **40**, № 6. – С. 757 – 763.
5. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
6. *Артемьев Н. А.* Периодические решения одного класса уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – № 1. – С. 15 – 50.
7. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. – Киев: Наук. думка, 1983. – 212 с.

Получено 20.01.93