УДК 517.95

Е. Л. Цветков, канд. физ.-мат. наук (Моск. авиацион. ин-т)

О ГЛАДКОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Unlike the case of elliptic differential equations, the generalized solutions of elliptic difference-differential may appear to be nonsmooth in the domain Q remaining smooth only on certain subdomaines $Q_r \subset Q$. Conditions for the generalized solutions of the third boundary value problem to remain smooth on the boundary of the neighboring subdomaines Q_r are considered.

На відміну від еліптичних диференціальних рівнянь гладкість узагальнених розв'язків еліптичних диференціально-різницевих рівнянь може порушуватися в ділянці Q і зберігатися лише в деяких підділянках $Q_r \subset Q$. Розглядаються умови збереження гладкості узагальнених розв'язків третьої крайової задачі на межі суміжних підділянок Q_r.

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{k,j=1}^{n} (R_{kjQ}u_{x_j})_{x_k} = f(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

с краевым условием

$$\sum_{k,j=1}^{n} R_{kjQ}u_{x_j} \cos(\nu, x_k) + \sigma(x)\, u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь $Q \subset R^n$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^\infty$, $f(x) \in L_2(Q)$, ν — внешняя нормаль к Γ, $0 \not\equiv \sigma(x) \in C(\Gamma)$ — вещественнозначная неотрицательная функция, разностные операторы $P_{kjQ}: L_2(Q) \to L_2(Q)$ вида $R_{kjQ} = P_Q R_{kj} I_Q$, где $I_Q: L_2(Q) \to L_2(R^n)$ — оператор продолжения нулем функции из $L_2(Q)$ в $R^n \setminus Q$, $P_Q: L_2(R^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(R^n)$ на Q, операторы $R_{kj}: L_2(R^n) \to L_2(R^n)$ действуют по формуле

$$R_{kj}u(x) = \sum\nolimits_{h \in T} a_{kjh} u(x+h),$$

где T — конечное множество векторов с целочисленными координатами, a_{kjh} — вещественные числа $(k, j = 1, \ldots, n)$.

***Определение* 1.** *Дифференциально-разностное уравнение* (1) *будем называть эллиптическим, если оператор* $R_Q + R_Q^*$ *положительно определен, где оператор*

$$R_Q = \begin{Vmatrix} R_{11Q} & \ldots & R_{1nQ} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n1Q} & \ldots & R_{nnQ} \end{Vmatrix}$$

действует в $L_2^n(Q)$ *по правилу умножения матрицы на столбец,* $L_2^n(Q) = \prod_p L_2(Q)$ $(p = 1, \ldots, n)$. *Задачу* (1), (2) *при этом будем называть третьей краевой задачей для уравнения* (1).

Первая и вторая краевые задачи исследовались в работах [1, 2] где показано, что, как и в случае дифференциальных уравнений с отклонениями аргументов для функций одной переменной [3], гладкость их решений может нарушаться в области Q и сохраняется лишь в некоторых подобластях $Q_r \subset Q$ $(\bigcup_r \overline{Q}_r = \overline{Q})$. Это явление обусловлено наличием сдвигов аргументов в старших членах

© Е. Л. ЦВЕТКОВ, 1993

уравнения, когда сдвиги отображают точки границы Γ области Q внутрь Q. Как и в [1, 2], в настоящей работе основным является вопрос о гладкости обобщенных решений задачи на границе соседних подобластей Q_r. Наличие младшего члена в краевом условии играет здесь принципиальную роль. Отметим, что к краевым задачам для эллиптических дифференциально-разностных уравнений приводят эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями [4], а также некоторые задачи теории многослойных оболочек и пластин [5].

Обозначим через $H^m(Q)$ пространство Соболева функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные из $L_2(Q)$ вплоть до порядка m.

Всюду в дальнейшем уравнение (1) считаем эллиптическим.

2. Существование и единственность обобщенных решений. В $H^1(Q) \times H^1(Q)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$a(u, v) = \sum_{k,j} (R_{kjQ} u_{x_j} v_{x_k})_{L_2(Q)} + (\sigma(x)u, v)_{L_2(\Gamma)}.$$

Лемма 1. *Существуют константы* $c, c_1 > 0$ *такие, что*

$$|a(u, v)| \le c \| u \|_{H^1(Q)} \| v \|_{H^1(Q)}, \quad \mathrm{Re}\, a(u, u) \ge c_1 \| u \|^2_{H^1(Q)} \tag{3}$$

для всех $u, v \in H^1(Q)$.

Доказательство первого неравенства в (3) вытекает из неравенства Коши — Буняковского, ограниченности операторов $R_{kjQ}: L_2(Q) \to L_2(Q)$ и теоремы 1 из [6, с. 149]. В силу определения 1 оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен в $L_2^n(Q)$. Следовательно, при некотором $c_2 > 0$ $\mathrm{Re}\, a(u, u) \ge c_2 \sum_j \| u_{x_j} \|^2_{L_2(Q)} + (\sigma(x)u, u)_{L_2(\Gamma)}$. Отсюда и из теоремы об эквивалентных нормах в $H^1(Q)$ [4, с. 156] следует второе неравенство в (3).

Введем оператор $\mathfrak{L}: L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(\mathfrak{L}) = \{u \in H^1(Q): \mathfrak{L}u \in L_2(Q)\}$ такой, что для $u \in D(\mathfrak{L})$ и всех $v \in H^1(Q)$ $(\mathfrak{L}u, v)_{L_2(Q)} = a(u, v)$.

Определение 2. *Функцию u будем называть обобщенным решением краевой задачи* (1), (2), *если* $u \in D(\mathfrak{L})$ *и* $\mathfrak{L}u = f$.

Определение 3. *Функцию u будем называть обобщенным решением краевой задачи* (1), (2), *если* $u \in H^1(Q)$ *и для всех* $v \in H^1(Q)$

$$a(u, v) = (f, v)_{L_2(Q)}. \tag{4}$$

Очевидно, определения 1 и 2 эквивалентны.

Из теоремы 9.1 [7, с. 230] и леммы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Обобщенное решение u краевой задачи* (1), (2) *существует и единственно для любой* $f \in L_2(Q)$. *Для него справедливо неравенство* $\| u \|_{H^1(Q)} \le c_3 \| f \|_{L_2(Q)}$ $(c_3 > 0)$.

Приведем необходимые и достаточные условия положительной определенности оператора $R_Q + R_Q^*$ в алгебраической форме. Рассмотрим множество $\Gamma_* = Q \cap (\bigcup_{h \in M} (\Gamma + h))$, где M — аддитивная абелева группа, порожденная множеством T. Обозначим через Q_r открытые связные компоненты множества $Q \setminus \Gamma_*$. Очевидно, $\bigcup_r Q_r = Q \setminus \Gamma_*$.

Определение 4. *Подобласти* Q_{r_1} *и* Q_{r_2} *множества* $\{Q_r\}$ *будем называть* *эквивалентными, если существует вектор* $h \in M$ *такой, что* $Q_{r_1} = Q_{r_2} + h$.

Введеное отношение эквивалентности разбивает множество $\{Q_r\}$ на классы; подобласти Q_{r_1} и Q_{r_2} принадлежат одному и тому же классу, если они эквивалентны в смысле определения 4. Легко видеть, что число классов не более чем счетно, а количество элементов в каждом классе конечно. Пусть индекс $r = (s, l)$, где $s = 1, 2, \dots$ — номер класса, а $l = 1, \dots, N = N(s)$ — количество элементов в данном классе.

Обозначим через $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ пространство функций из $L_2(Q)$, равных нулю в $Q \setminus \bigcup_{l=1}^{N} Q_{sl}$. Очевидно, $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ является инвариантным подпространством операторов R_{kjQ}. Введем изометрический изоморфизм $U_s\colon L_2(\bigcup_l Q_{sl}) \to L_2^N(Q_{s1})$ гильбертовых пространств по формуле $(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl})$, $x \in Q_{sl}$, где $l = 1, \dots, N(s)$, векторы $h_{sl} \in M$ таковы, что $Q_{sl} = Q_{s1} + h_{sl}$ $(h_{s1} = 0)$. Тогда, как следует из [1], оператор

$$R_{kjs} = U_s R_{kjQ} U_s^{-1} \tag{5}$$

является оператором умножения на квадратную матрицу порядка $N(s) \times N(s)$ (которую мы также обозначим R_{kjs}), элементы $r_{lm} = r_{lm}(k, j, s)$ которой вычисляются по формуле

$$r_{lm} = \begin{cases} a_{kjh}, & \text{если} \quad h = h_{sl} - h_{sm} \in T, \\ 0, & \text{если} \quad h_{sl} - h_{sm} \notin T. \end{cases} \tag{6}$$

При этом в силу (6) число различных матриц R_{kjs} конечно, а пространство $L_2(Q)$ можно представить в виде ортогональной суммы подпространств $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$. Отсюда вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Оператор* $R_Q + R_Q^*$ *положительно определен тогда и только тогда, когда матрицы* $R_s + R_s^*$ $(s = 1, 2, \dots)$ *положительно определены, где блочные матрицы* R_s *порядка* $nN(s) \times nN(s)$ *имеют вид*

$$R_s = \begin{Vmatrix} R_{11s} & \dots & R_{1ns} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{n1s} & \dots & R_{nns} \end{Vmatrix}.$$

3. Гладкость обобщенных решений в подобластях. Гладкость обобщенного решения u задачи (1), (2) может нарушаться в Q на множестве Γ_*. Это вытекает из примера 2 [2]. Вообще говоря, $u \notin H^2_{\mathrm{loc}}(Q)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* u — *обобщенное решение краевой задачи* (1), (2) *и* $f \in L_2(Q) \cap H^m_{\mathrm{loc}}(Q_{sl})$, $s = 1, 2, \dots$; $l = 1, \dots, N(s)$. *Тогда* $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(Q_{sl})$.

Следствие. *Пусть* u — *обобщенное решение краевой задачи* (1), (2). *Тогда почти всюду в* Q_{sl}, $s = 1, 2, \dots$; $l = 1, \dots, N(s)$ *и удовлетворяет уравнению* (1).

Доказательство теоремы 2 и ее следствия содержатся в работах [1, с. 347] и [2, с. 1769].

Рассмотрим вопрос о гладкости u вблизи границ Γ_{sl} подобластей Q_{sl}. Введем множество $\mathcal{K}$ по формуле $\mathcal{K} = \overline{Q} \cap (\bigcup_{h \in M}(K_\Gamma + h))$, где $K_\Gamma = \overline{\Gamma}_* \cap \Gamma$. Вообще говоря, $\operatorname{mes} \mathcal{K} \neq 0$ [1].

Лемма 3. *Пусть точка* $y \in \Gamma_* \setminus \mathcal{K}$. *Тогда существует* $a > 0$ *такое, что*

$S_a(y) \cap \Gamma_* \in S^\infty$. *Множество* $Q \setminus \Gamma_*$ *содержит две и только две подобласти* Q_{pi} *и* Q_{qj} *такие, что* $y \in (\Gamma_{pi} \cap \Gamma_{qj}) \setminus \mathcal{K}$. *При этом* $S_a(y) \subset (Q_{pi} \cup Q_{qj}) \cup (\Gamma_{pi} \cap \cap \Gamma_{qj})$, *где* $S_a(y)$ — *шар радиуса* a *с центром в точке* y.

Доказательство леммы 3 немедленно следует из лемм 4.3 и 4.4 [1].

Теорема 3. *Пусть* u — *обобщенное решение краевой задачи* (1), (2) *и* $\sigma(x) \in \in C^1(\Gamma)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ $u \in H^2(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}_\varepsilon)$, $s = 1, 2, \ldots;\ l = 1, \ldots, N(s)$, *где* $\mathcal{K}_\varepsilon = \{x \in R^n\colon \rho(x, \mathcal{K}) \le \varepsilon\}$.

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно показать, что для любой фиксированной точки $y \in \Gamma_{pi} \setminus \mathcal{K}$ существует шар $S_\delta(y)$ такой, что $u \in H^2(Q_{pi} \cap \cap S_\delta(y))$.

I. Пусть точка $y \in \Gamma_* \cap (\Gamma_{pi} \setminus \mathcal{K})$, а число $a > 0$ таково, что выполнены утверждения леммы 3. Для простоты будем предполагать, что $y \in (\Gamma_{p1} \cap \Gamma_{q1}) \setminus \mathcal{K}$, а множество $S_a(y) \cap \Gamma_{p1}$ имеет вид $x_n = 0$ (если это не так, то можно применить известный метод "спрямления" границы [6, с. 242] введением новых переменных).

Рассмотрим точки

$$x^{sl} = y + h_{sl} \in \Gamma_{sl} \setminus \mathcal{K}, \tag{7}$$

где $Q_{sl} = Q_{s1} + h_{sl}$, $s = p, q;\ l = 1, \ldots, N(s);\ h_{s1} = 0$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что

$$x^{pl} = x^{ql} \in \Gamma_* \setminus \mathcal{K}, \quad l = 1, \ldots, N_0, \tag{8}$$

$$x^{sl} \in \Gamma \setminus \mathcal{K}, \quad s = p, q; \quad l = N_0 + 1, \ldots, N(s). \tag{9}$$

В противном случае можно перенумеровать подобласти p и q классов.

Введем пространство H^1_δ функций из $H^1(Q)$, равных нулю вне $\Omega_\delta = = \bigcup_{s,l} S_\delta(x^{sl})$. Объединение проводится по всем $s = p,\ q$ и $l = 1, \ldots, N(s)$; $0 < < 4\delta < a$. Следуя [1], построим функцию $\xi(x) \in \dot{C}^\infty(R^n)$ такую, что $0 \le \xi(x) \le 1$,

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_\delta, \\ 0, & x \in R^n \setminus \Omega_\delta. \end{cases}$$

В равенстве (4) положим $v = \xi v_0$, где $v_0 \in H^1_{4\delta}$. Так как операторы R_{kjQ} коммутируют с оператором умножения на функции $\xi(x)$, $\xi_{x_k}(x)$, находим, что

$$a(u, \xi v_0) = a(\xi u, v_0) + \sum\nolimits_{k,j} (R_{kjQ} u_{x_j}, \xi_{x_k} v_0)_{L_2(Q)} - \sum\nolimits_{k,j} (R_{kjQ} \xi_{x_j} u, v_{0x_k})_{L_2(Q)},$$

и следовательно,

$$a(w, v_0) = (F, v_0)_{L_2(Q)} + \sum_{k,j} (R_{kjQ} \xi_{x_j} u, v_{0x_k})_{L_2(Q)}, \tag{10}$$

где $w = \xi u \in H^1_{2\delta}$, $F = \xi f - \sum_{k,j} \xi_{x_k} R_{kjQ} u_{x_j} \in L_2(Q)$.

В формуле (10) положим $v_0 = \delta^r_{-t} v_1$, где $1 \le r \le n - 1$, $0 < t < \delta$, функция $v_1 \in H^1_{3\delta}$, а оператор δ^r_{-t} определен по формуле $(\delta^r_{\pm t} v_1)(x) = ((v_1)^r_{\pm t} - v_1) / (\pm t)$, $x \in \Omega_{3\delta}$, где $(v_1)^r_{\pm t} = v_1(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r \pm t, x_{r+1}, \ldots, x_n)$.

По построению, $v_0 \in H^1_{4\delta}$. Заметим, что оператор $-\delta^r_l$ является формально сопряженным к оператору δ^r_{-l} в $L_2(Q)$ $(L_2(\Gamma))$, а $\delta^r_l(\sigma(x)w(x)) = \sigma(x)\delta^r_l w(x) + w^r_l(x)\delta^r_l\sigma(x)$, $x \in \Gamma$. Тогда из формулы (10) получим

$$a(\delta^r_l w, v_1) = a_1(v_1) + a_2(v_1) + a_3(v_1), \tag{11}$$

где

$$a_1(v_1) = -(F, \delta^r_{-l} v_1)_{L_2(Q)}, \quad a_2(v_1) = \sum\nolimits_{k,j} (\delta^r_l R_{kjQ}(\xi_{xj} u), v_{1x_k})_{L_2(Q)},$$

$$a_3(v_1) = -(w^r_l(x)\, \delta^r_l \sigma(x), v_1)_{L_2(\Gamma)}.$$

Для $a_i(v_1)$ справедливы следующие оценки. В силу теоремы 3 [6, с. 127]

$$|\, a_1(v_1)\,| \le \| F \|_{L_2(Q)} \| v_{1x_r} \|_{L_2(Q)} \le c_4 (\| f \|_{L_2(Q)} + \| u \|_{H^1(Q)}) \| v_1 \|_{H^1(Q)},$$

$$|\, a_2(v_1)\,| \le c_5 \| u \|_{H^1(Q)} \| v_1 \|_{H^1(Q)}. \tag{12}$$

В силу предположения $\sigma(x) \in c^1(\Gamma)$ и теоремы 1 [6, с. 149]

$$|\, a_2(v_1)\,| \le c_6 \| w \|_{L_2(\Gamma)} \| v_1 \|_{L_2(\Gamma)} \le c_7 \| w \|_{H^1(Q)} \| v_1 \|_{H^1(Q)}. \tag{13}$$

Тогда из (11) – (13) имеем

$$|\, a(\delta^r_l w, v_1)\,| \le c_8 (\| f \|_{L_2(Q)} + \| u \|_{H^1(Q)}) \| v_1 \|_{H^1(Q)}, \tag{14}$$

где константы $c_4, \ldots, c_8 > 0$. В (14) положим $v_1 = \delta^r_l w$. Очевидно, $v_1 \in H^1_{3\delta}$. В силу леммы 1 $|\, a(\delta^r_l w, \delta^r_l w)\,| \ge c_1 \| \delta^r_l w \|^2_{H^1(Q)}$ и ввиду (14) $\cdot \| \delta^r_l w \|_{H^1(Q)} \le \le \dfrac{c_8}{c_1}(\| f \|_{L_2(Q)} + \| u \|_{\dot{H}^1(Q)})$. Вновь используя теорему 3 [6, с. 127], получаем, что $w_{x_j x_r} \in L_2(Q)$, т. е. $u_{x_j x_r} \in L_2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$, $l = 1, \ldots, N(p)$; $j + r < 2n$.

Докажем теперь, что $u_{x_n x_n} \in L_2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$ для любого $l = 1, \ldots, N(p)$. По следствию из теоремы 2 функция

$$(R_{nnQ} u_{x_n})_{x_n} = f(x) - \sum_{k+j<2n} (R_{kjQ} u_{x_j})_{x_k} \in L_2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$$

для каждого $l = 1, \ldots, N(p)$. Очевидно, $(R_{nnQ} u_{x_n})_{x_n} = R_{nnQ} u_{x_n x_n}$, $x \in Q_{pl}$. Из определения 1 вытекает, что оператор $R_{nnQ}\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ имеет ограниченный обратный. Так как $L_2(\bigcup_l Q_{pl})$ — инвариантное подпространство оператора R_{nnQ}, отсюда следует, что $u_{x_n x_n} \in L_2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$.

Таким образом, функция $u \in H^2(Q_{pl} \cap S_\delta(x^{pl}))$ для всех $l = 1, \ldots, N(p)$.

II. Пусть точка $y \in \Gamma \cap (\Gamma_{pi} \setminus \mathcal{K})$. Рассмотрим точки $y^l = y - h_{pi} + h_{pl} \in \Gamma_{pl} \setminus \mathcal{K}$, $l = 1, \ldots, N(p)$. Не ограничивая общности, можно считать, что при некотором $l = l_1$ точка $y^{l_1} \in \Gamma_* \cap (\Gamma_{pl_1} \setminus \mathcal{K})$. Тогда, повторяя доказательство п. I, получаем, что $u \in H^2(Q_{pi} \cap S_\delta(y))$. Теорема доказана.

Хотя, по предположению, граница Γ области Q принадлежит классу C^∞, границы Γ_{sl} подобластей Q_{sl}, вообще говоря, не принадлежат C^∞. Гладкость Γ_{sl} может нарушаться на множестве $\mathcal{K}$. Покажем, что, как и в случае первой краевой задачи [1], обобщенное решение краевой задачи (1), (2), вообще говоря, имеет особенности в окрестности множества $\mathcal{K}$.

***Пример* 1.** Рассмотрим третью краевую задачу

$$-\sum_{j=1}^{2}(R_Q u_{x_j})_{x_j} = f(x), \quad x \in Q, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{2} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_j) + \sigma(x)u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{16}$$

Здесь область Q — квадрат $(-1/2, 1) \times (0, 3/2)$ со сглаженными углами внутри кругов $S_\delta(m, p) (m = -1/2, 1; p = 0, 3/2)$, $0 < \delta < 1/8$, функция $\sigma(x) \equiv 0$ на $S_{2\delta}(0, 0)$ и $S_{2\delta}(1, 1)$, а оператор $Ru(x) = 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + 1, x_2 + 1) + u(x_1 - 1, x_2 - 1)$.

Очевидно, множество $Q \setminus \Gamma_*$ состоит из двух классов подобластей Q_{sl}; подобласти Q_{11} и Q_{21} совпадают вне кругов $S_\delta(-1/2, 0)$ и $S_\delta(1, 3/2)$ соответственно с квадратами $(-1/2, 0) \times (0, 1/2)$ и $(1/2, 1) \times (1, 3/2)$, а подобласть $Q_{21} = Q \setminus (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$. Множество $\mathcal{K}$ состоит из точек $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, 3/2)$.

Заметим, что уравнение (15) эллиптическое в смысле определения 1. Это следует из леммы 2 и положительной определенности матриц

$$R_1 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad R_2 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Введем функцию

$$u(x) = \begin{cases} 10u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2), & x \in Q_{11}, \\ u_1(x_1 - 1, x_2 - 1) + 10u_2(x_1 - 1, x_2 - 1), & x \in Q_{12}, \\ b(u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1 - 1, x_2 - 1)), & x \in Q_{21}, \end{cases}$$

где функции u_1 и u_2 при переходе к полярным координатам имеют вид $u_1(r, \varphi) = \xi(r) r^\lambda \cos \lambda\varphi$, $u_2(r, \varphi) = \xi(r) r^\lambda \cos \lambda(\varphi - 3\pi/2)$, функция $\xi(r) \in \dot{C}^\infty(R^1)$, $0 \le \xi(r) \le 1$, $\xi(r) = 1$ при $0 \le r \le \delta$, $\xi(r) = 0$ при $r \ge 2\delta$, $\lambda\pi = 2 \arccos 2/7$, $b = 99/14$. Имеем

$$R_Q u(x) = \begin{cases} 21u_1(x_1, x_2) + 12u_2(x_1, x_2), & x \in Q_{11}, \\ 12u_1(x_1 - 1, x_2 - 1) + 21u_2(x_1 - 1, x_2 - 1), & x \in Q_{12}, \\ 2b(u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1 - 1, x_2 - 1)), & x \in Q_{21}. \end{cases}$$

Легко проверить, что $u \in H^1(Q)$ и $\mathfrak{L}u \in L_2(Q)$ на основании следующих утверждений.

1) $u \in H^1(Q_{sl})$, так как $0 < \lambda < 1$. При этом $u\big|_{x_1=0+0} = u\big|_{x_1=0-0}$, $u\big|_{x_2=1+0} = u\big|_{x_2=1-0}$, так как $10u_1 + u_2 = bu_1 (\varphi = \pi/2)$, $u_1 + 10u_2 = bu_2$ $(\varphi = \pi)$.

2) $\sum_j (R_Q u_{x_j})_{x_j} = R_Q \Delta u \in L_2(Q_{sl})$. При этом $R_Q u_{x_1}\big|_{x_1=0+0} = R_Q u_{x_1}\big|_{x_1=0-0}$, $R_Q u_{x_2}\big|_{x_2=1+0} = R_Q u_{x_2}\big|_{x_2=1-0}$, так как $d(21u_1 + 12u_2)/d\varphi = 2b\, du_1/d\varphi$, $\varphi = \pi/2$, $d(12u_1 + 21u_2)/d\varphi = 2b\, du_2/d\varphi$, $\varphi = \pi$.

3) Функция u удовлетворяет краевым условиям (16), так как $d(21u_1 +$

$12u_2)/d\varphi = 0$ $(\varphi = \pi)$, $du_1/d\varphi = 0$ $(\varphi = 0)$, $d(12u_1 + 21u_2)/d\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $du_2/d\varphi = 0$, $\varphi = 3\pi/2$.

Следовательно, $u \in D(\mathfrak{L})$. Однако, $u \notin H^2(Q_{11} \cap S_\varepsilon(0))$ ни при каком $\varepsilon > 0$.

В силу примера 1 теорема 3 при $\varepsilon = 0$ неверна.

3. Гладкость обобщенных решений на границе соседних подобластей. Пусть точка $y \in \Gamma_* \setminus \mathcal{K}$. Выясним, при каких условиях на коэффициенты a_{kjh} разностных операторов R_{kj} обобщенное решение u третьей краевой задачи принадлежит $H^2(S_\delta(y))$ при малом $\delta > 0$ для любой $f(x) \in L_2(Q)$. Будем предполагать при этом, что точка y принадлежит границе соседних подобластей Q_{p1} Q_{q1}, $0 < 2\delta < a$, а множество $S_a(y) \cap \Gamma_{p1}$ имеет вид $x_n = 0$, где число $a > 0$ таково, что выполнены утверждения леммы 3.

Рассмотрим точки $x^{sl} \in \Gamma_{sl} \setminus \mathcal{K}$, $s = p, q$; $l = 1, \ldots, N(s)$, введенные по формуле (7). Как и при доказательстве теоремы 3, будем предполагать, что x^{sl} удовлетворяет условиям (8), (9).

Пусть u — обобщенное решение задачи (1), (2). Тогда

$$\sum_{k,j=1}^{n} (R_{kjQ} u_{x_j})_{x_k} \in L_2(Q), \tag{17}$$

и легко понять, что функция u удовлетворяет следующим условиям сопряжения на границах соседних подобластей Q_{pl} и Q_{ql}:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{njQ} u_{x_j}\Big|_{\gamma_{pl}} = \sum_{j=1}^{n} R_{njQ} u_{x_j}\Big|_{\gamma_{ql}} \tag{18}$$

при $l = 1, \ldots, N_0$. Здесь и далее $\gamma_{sl} = \Gamma_{sl} \cap S_a(x^{sl})$.

Согласно следствию из теоремы 3 функция u удовлетворяет краевым условиям

$$\sum_{j=1}^{n} R_{njQ} u_{x_j} + \sigma(x') \cos(\nu, x_n) u = 0, \quad x' \in \gamma_{sl}, \tag{19}$$

при $s = p., q$; $l = N_0 + 1, \ldots, N(s)$.

Рассмотрим матрицы R_{kjs} с коэффициентами $r_{lm} = r_{lm}(k, j, s)$ по формуле (6). Условия (18) и (19) запишем в алгебраической форме с помощью соотношения (5). Для этого введем вектор-функции V_s и W_{js}, $s = p, q$; $j = 1, \ldots, n$, по формулам

$$V_s = (U_s P_s u)\Big|_{\gamma_{s1}}, \quad W_{js} = (U_s P_s u)_{x_j}\Big|_{\gamma_{s1}}, \tag{20}$$

где $P_s\colon L_2(Q) \to L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ — оператор проектирования.

Рассмотрим матрицы A_{js} и B_{js}, получающиеся из матриц R_{njs} вычеркиванием, соответственно, последних $N(s) - N_0$ строк, и первых N_0 строк. Рассмотрим также соответствующие им матрицы и векторы со штрихами: матрицы (векторы) L' и L'' получаются из матрицы (вектора) L вычеркиванием соответственно последних $N(s) - N_0$ столбцов (элементов) и первых N_0 столбцов (элементов).

Заметим, что в силу предположений (8), (9) и формулы (6) $A'_{jp} = A'_{jq}$. Очевидно, $w'_{jp} = w'_{jq}$ $(j < n)$.

Для каждого $s = p, q$ построим также диагональную матрицу $\sigma_s = \sigma_s(x')$ порядка $N(s) - N_0$ с элементами $r_{mm} = \sigma(x' + h_{s, N_0+m}) \cos(\nu, x_n)$, $x' \in \gamma_{s1}$; $m = 1, \ldots, N(s) - N_0$, по главной диагонали.

Тогда с помощью введенных матриц и формулы (5) условия (18) и (19) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} A_{jp} W_{jp} = \sum_{j=1}^{n} A_{jq} W_{jq},$$

$$\sum_{j=1}^{n} B_{js} W_{js} + \sigma_s V_s'' = 0, \quad s = p, q. \tag{21}$$

Введем вектор-функцию $z = z(x')$, $x' \in \Gamma_* \cap S_a(y)$ размерности $N(p)$ вида

$$z = \begin{pmatrix} W_{np}' - W_{nq}' \\ W_{np}'' \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Очевидно, первые N_0 компонент вектор-функции z суть скачки u_{x_n} на множествах $\Gamma_* \cap S_\delta(x^{pl})$, $l = 1, \ldots, N_0$.

Легко проверить [2, с. 177], что система уравнений (21) эквивалентна системе уравнений

$$R_{nnp} z = -\sum_{j \ge 1} T^j H^j - S_0 V, \tag{23}$$

$$W_{nq}'' = -\sum_{j \ge 1} G^j H^j - SV, \tag{24}$$

где блочные матрицы имеют вид

$$T^n = \begin{pmatrix} A_{nq}'' B^{-1} B_{nq}' \\ B_{np}' \end{pmatrix}, \quad G^n = B^{-1} B_{nq}',$$

$$T^j = \begin{pmatrix} A_{nq}'' B^{-1} B_{jq}' & A_{jp}'' & (A_{nq}'' B^{-1} B_{jq}'' - A_{jq}'') \\ B_{jp}' & B_{jp}'' & 0 \end{pmatrix},$$

$$G^j = \begin{pmatrix} B^{-1} B_{jq}' & 0 & B^{-1} B_{jq}'' \end{pmatrix}, \quad j < n,$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & A_{nq}'' B^{-1} \sigma_q \\ \sigma_p & 0 \end{pmatrix}, \quad S = (0 \ B^{-1} \sigma_q),$$

матрица B^{-1} обратная к B_{nq}'' (такая матрица существует, см. [2]), вектор-функции H^j размерности $m(j)$, $j = 1, \ldots, n$, имеют вид

$$H^n = W_{nq}', \quad H^j = \operatorname{colon}(W_{jp}', W_{jp}'', W_{jq}''), \tag{25}$$

при этом

$$m(j) = \begin{cases} N_0, & j = n, \\ N(p) + N(q) - N_0, & j < n, \end{cases}$$

вектор-функция V размерности $N(p) + N(q) - 2N_0$ имеет вид

$$V = \operatorname{colon}(V_p'', V_q''). \tag{26}$$

Обозначим Λ^j_{lk} и $\mathfrak{B}_{lk} = \mathfrak{B}_{lk}(x')$ квадратные матрицы порядка $N(p)$, полученные из матрицы R_{nnp}: Λ^j_{lk} — заменой l-го столбца R_{nnp} k-м столбцом матрицы T^j; $\mathfrak{B}_{lk}$ — заменой l-го столбца R_{nnp} k-м столбцом матрицы S_0.

Теорема 4. *Для того чтобы для данного* l, $1 \le l \le N_0$, *обобщенное решение краевой задачи* (1), (2) *принадлежало* $H^2(S_\delta(x^{pl}))$ *для любой* $f(x) \in L_2(Q)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det \Lambda^j_{lk} = 0, \quad j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, m(j), \tag{27}$$

$$\det \mathfrak{B}_{lk}(x') = 0, \quad k = 1, \ldots, N(p) + N(q) - 2N_0, \tag{28}$$

для всех $x' \in \Gamma_* \cap S_\delta(x^{p1})$.

Доказательство. Введем матрицы $\Lambda^j = \| \det \Lambda^j_{lk} / \Delta \|$, $l = 1, \ldots, N(p)$; $k = 1, \ldots, m(j)$; $\mathfrak{B} = \| \det \mathfrak{B}_{lk} / \Delta \|$, $l = 1, \ldots, N(p)$; $k = 1, \ldots, N(p) + N(q) - 2N_0$, где $\Delta = \det R_{nnp} \neq 0$ (из определения 1 и леммы 2 вытекает, что R_{nnp} не вырождена). Тогда из (23) следует

$$z = -\sum_{j \ge 1} \Lambda^j H^j - \mathfrak{B} V. \tag{29}$$

I. *Достаточность.* Пусть условия (27), (28) теоремы 4 выполнены. По теореме 3 $u \in H^2(Q_{sl} \cap S_\delta(x^{pl}))$, $s = p, q$. Так как $\det R_{nnp} \neq 0$, из (29) следует, что элемент z_l вектор-функции z равен нулю, т. е. $u_{x_n}\Big|_{\gamma_{pl}} = u_{x_n}\Big|_{\gamma_{ql}}$. Отсюда вытекает, что $u \in H^2(S_\delta(x^{pl}))$.

II. *Необходимость.* Пусть условия (27), (28) теоремы 4 нарушены и для некоторых j и k либо $\det \Lambda^j_{lk} \neq 0$, либо $\det \mathfrak{B}_{lk}(x') \neq 0$, $x' \in \Gamma_* \cap S_\delta(y)$. Построим функцию $u(x) \in D(\mathfrak{L})$ такую, что $u(x) \notin H^2(S_\delta(x^{pl}))$. Без ограничения общности положим, что точка $y = 0$. Пусть

$$u(x) = \begin{cases} (U_i^{-1} u_i)(x), & x \in \bigcup\limits_l Q_{il}; \quad i = p, q, \\ 0, & x \in Q \setminus \bigcup\limits_{i,l} Q_{il}, \end{cases} \tag{30}$$

где

$$u_i(x) = (A_i(x') x_n + B_i(x')) \eta(x_n), \quad x \in Q_{i1}, \tag{31}$$

функция $\eta(x_n) \in \dot{C}^\infty(R^1)$, $\eta(x_n) = 1$ $(x_n \in (-\delta, \delta))$, $\eta(x_n) = 0$, $x_n \notin (-a/2, a/2)$; $x = (x', x_n) \in R^n$; $A_i(x')$, $B_i(x') \in \dot{C}^{\infty, N(i)}(\Gamma_* \cap S_{a/2}(0))$.

Заметим, что $u(x)$ принадлежит $H^1(Q)$ тогда и только тогда, когда $B'_p(x') = B'_q(x')$. При этом на основании формул (30), (31), (20), (22), (25), (26) получаем

$$\begin{cases} z = \operatorname{colon}(A'_p - A'_q, A''_p), \\ H^j = \begin{cases} A'_q(x'), & j = n, \\ \operatorname{colon}((B_p)_{x_j}, (B''_q)_{x_j}), & j < n, \end{cases} \\ V = \operatorname{colon}(B''_p, B''_q), \ W''_{nq} = A''_q. \end{cases} \tag{32}$$

Обозначим $[\Lambda^j]_r$, $[G^j]_r$, S_r, $\mathfrak{B}_r$ r-е столбцы матриц соответственно Λ^j, G^j, S,

$\mathfrak{B}$. Пусть функция $\xi(x') \in \dot{C}^\infty(R^{n-1})$, $\xi(x') = 1$, $x' \in \Gamma_* \cap S_\delta(0))$, $\xi(x') = 0$ $(x' \notin \notin \Gamma_* \cap S_{a/2}(0)$.

Вектор-функции $A_i(x')$ и $B_i(x')$ построим следующим образом.

а) Пусть при $j = n$, $k = r$ $\det \Lambda^j_{lk} \neq 0$, $1 \le r \le N_0$. Тогда

$$A'_p = (e - [\Lambda^n]'_r)\xi(x'), \quad A''_p = -[\Lambda^n]''_r \xi(x'),$$

$$A'_q = e\xi(x'), \quad A''_q = -[G^n]_r \xi(x'), \quad B_i = 0, \ i = p, q,$$

где e — столбец с координатами δ_{mr}; $\delta_{mr} = 1 (m = r)$, $\delta_{mr} = 0$, $m \neq r$, символ Кронекера.

б) Пусть при $j = t$, $k = r$ $\det \Lambda^j_{lk} \neq 0$, $t < n$; $1 \le r \le N(p) + N(q) - 2N_0$. Тогда

$$A_p = -\sum_{j<n} [\Lambda^j]_r (x_t \xi)_{x_j} - (x_t \xi)\mathfrak{B} h,$$

$$A'_q = 0; \quad A''_q = -\sum_{j<n} [G^j]_r (x_t \xi)_{x_j} - (x_t \xi) S h,$$

$$B_i = (x_t \xi) e_i, \quad i = p, q,$$

где столбцы e_i таковы, что $e'_p = e'_q$, столбец $e = \mathrm{colon}\,(e'_p, e''_p, e''_q)$ имеет координаты δ_{mr}, а столбец $h = \mathrm{colon}\,(e''_p, e''_q)$.

в) Пусть при $k = r$, $x' = x'_0$ $\det \mathfrak{B}_{lk}(x') \neq 0$, $1 \le r \le N(p) + N(q) - 2N_0$. Не ограничивая общности, полагаем $x'_0 = 0$. Тогда

$$A_p = -\sum_{j<n} [\Lambda^j]_{N_0+r} \xi_{x_j} - \mathfrak{B}_r \xi;$$

$$A'_q = 0; \quad A''_q = -\sum_{j<n} [G^j]_{N_0+r} \xi_{x_j} - S_r \xi;$$

$$B'_p = B'_q = 0, \quad B''_i = e_i \xi, \quad i = p, q,$$

где столбцы e_i таковы, что столбец $e = \mathrm{colon}\,(e_p, e_q)$ имеет координаты δ_{mr}.

Легко проверить, что в силу а), б), в) и формул (32) функция $u \in H^1(Q)$ удовлетворяет соотношениям (29), (24), а следовательно, и условию (17). Таким образом, $u \in D(\mathfrak{L})$. Однако, по построению, $(A_p)_l \neq (A_q)_l$, т. е. $u_{x_n}\Big|_{\gamma_{pl}} \neq \neq u_{x_n}\Big|_{\gamma_{ql}}$. Теорема доказана.

Заметим, что если условия сохранения гладкости теоремы 4 выполняются в случае третьей краевой задачи, то они выполнены и в случае второй краевой задачи [2]. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 2. Рассмотрим третью краевую задачу

$$-\sum_{j=1}^{2} (R_Q u_{x_j})_{x_j} = f(x), \quad x \in Q, \tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^{2} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_j) + \sigma(x) u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{34}$$

где $Q = (-1, 1) \times (-1, 1)$, $Ru(x) = u(x_1, x_2) + \gamma(u(x_1, x_2 + 1) + u(x_1, x_2 - 1))$, $0 < |\gamma| < 1$.

Рассмотрим два класса эквивалентных подобластей Q_{sl} множества $Q \setminus \Gamma_*$: подобласти $Q_{11} = (-1, 1) \times (-1, 0)$, $Q_{12} = (-1, 1) \times (0, 1)$, а подобласти второго класса получаются из Q_{1l} их перенумерацией — $Q_{21} = Q_{12}$, $Q_{22} = Q_{11}$. Множество $\mathcal{K}$ состоит из точек вида (k, p), где $k = \pm 1$, $p = 0, \pm 1$.

Очевидно, матрицы

$$R_{221} = R_{222} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} \gamma^2 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma\sigma^{-1} \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{11}^2 = \begin{pmatrix} \gamma^2 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{1k}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\mathfrak{G}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \sigma^1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{G}_{12} = \begin{pmatrix} -\gamma\sigma^{-1} & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sigma^1 = \sigma^1(x_1)$, $\sigma^{-1} = \sigma^{-1}(x_1)$ — значения функции $\sigma(x)$ на сторонах квадрата Q соответственно, $x_2 = 1$ и $x_2 = -1$, $-1 < x_1 < 1$.

Так как $0 < |\gamma| < 1$, с помощью леммы 2 легко проверить, что уравнение (33) эллиптическое. Очевидно, утверждение теоремы 1 для случая негладкой области Q примера 2 остается справедливым и обобщенное решение $u(x) \in H^1(Q)$ задачи (33), (34) существует и единстенно для любой $f(x) \in L_2(Q)$.

В силу теоремы 3 $u(x) \in H^2(Q_{1l} \setminus \mathcal{K}_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, $l = 1, 2$.

Очевидно, условия (27), (28) сохранения гладкости теоремы 4 выполнены, а функция $u(x) \in H^2(S_\delta(0))$, $0 < \delta < 1$, тогда и только тогда, когда $\sigma^1(x_1) = \sigma^{-1}(x_1) = 0$, $|x_1| < 1$.

В заключение отметим, что полученные условия сохранения гладкости третьей краевой задачи являются принципиально отличными от соответствующих условий первой краевой задачи [1].

Автор благодарит А. Д. Мышкиса и А. Л. Скубачевского за внимание к работе и ряд ценных советов.

1. *Skubachevskii A.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. Different. Equat. – 1986. – **63**, № 3. – P. 332 – 361.
2. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 10. – С. 1766 – 1776.
3. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 3. – С. 409 – 418.
4. *Скубачевский А. Л.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых нелокальных краевых задач // Там же. – 1989. – **25**, № 1. – С. 127 – 136.
5. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 5. – С. 39 – 47.
6. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.– 424 с.
7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.– М.: Мир, 1974. – 371 с.

Получено 16.12.91