УДК 537. 937

Л. М. Герштейн, канд. физ.-мат. наук (Воронеж. высш. воен. авиац. инж. уч-ще)

О СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЕ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

The study of a model system of differential equations which arise from the dynamic problems of thermoelasticity is continued. Shifts of general type are considered. The "commutant method" is used, which is based on the properties of the operator $\Delta(A, B) = AB - BA$.

Продовжено вивчення модельної системи диференціальних рівнянь, що виникають при дослідженні динамічних задач термопружності. Розглядається випадок зсувів загального вигляду. Дослідження проводиться за допомогою "методу комутанта", основаного на властивостях оператора $\Delta(A, B) = AB - BA$.

В настоящей работе рассматривается модельная система дифференциальных уравнений с частными производными, возникающая в задачах термоупругости, которая может быть записана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами вида

$$u' + A_1u + B_1v' = f, \tag{1}$$

$$v'' + A_2v + B_2u = g, \tag{2}$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1. \tag{3}$$

Здесь u, v — неизвестные функции, определенные на отрезке $[0, 1]$, со значениями в банаховом пространстве E; A_k, B_k $(k = 1, 2)$ — линейные неограниченные операторы, действующие в пространстве E; f, g — известные функции со значениями в E, а u_0, v_0, v_1 — элементы этого пространства.

Задача (1) – (3) изучалась различными методами в работах [1 – 3]. В [1] установлено существование обобщенного решения задачи в гильбертовом пространстве и его регулярность по переменной t. В работах [2, 3] доказана разрешимость в банаховом пространстве, при этом предполагается иная, чем в [1], гладкость начальных данных и не требуется их согласование в нуле. В упомянутых работах существенно использовалось предположение о том, что операторы A_1 и A_2 одной "силы", т. е. операторы $A_2A_1^{-1}$ и $A_1A_2^{-1}$ ограничены. Это условие нарушается, например, при рассмотрении уравнений термоупругости в случае смещений общего вида [4, 5]. В подобных системах оператор A_2 имеет "силу" квадрата оператора A_1. Оказывается, что "метод коммутанта", развитый в [6, 7], позволяет установить существование гладкого решения задачи и в этом случае. Предлагаемый ниже подход применим и к системе (1) – (2) с переменными по времени коэффициентами. Кроме того, могут быть рассмотрены системы с другими соотношениями между коэффициентами A_k, B_k.

Относительно операторных коэффициентов задачи сделаем следующие предположения: 1) оператор A_1 сильно позитивен в пространствах E и $D(A_1)$; 2) оператор $A = A_2^{1/2}$ порождает косинус $C(t)$ и синус $S(t)$ функции в пространстве E.

При этих условиях, также, как и в [3], решение задачи (1) – (3) ищется как решение системы интегральных уравнений

 ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1993, т. 45, № 8

$$u(t) - \int_0^t K(t, s)u(s)ds = \varphi(t), \tag{4}$$

$$v(t) = C(t)v_0 + A^{-1}S(t)v_1 + \int_0^t A^{-1}S(t-s)[g(s) - B_2u(s)]ds, \tag{5}$$

где

$$K(t, s) = \int_s^t \exp\{-(t-\tau)A_1\}B_1C(\tau - s)B_2d\tau,$$

$$\varphi(t) = \exp\{-tA_1\}u_0 + \int_0^t \exp\{-(t-\tau)A_1\}[f(\tau) +$$

$$+ B_1S(\tau)Av_0 - \int_0^\tau B_1C(\tau - s)g(s)ds]d\tau. \tag{6}$$

Ясно, что существование гладкого решения u уравнения (4) позволяет по формуле (5) построить функцию v с необходимыми свойствами гладкости и, тем самым, получить решение задачи (1) – (3). Основным этапом при изучении уравнения (4) является получение оценок ядра K. Следуя схеме из [3], разложим оператор-функцию K в сумму операторов K_1 и K_2, K_3. Однако в связи с указанными выше особенностями задачи анализ каждого из слагаемых ядра существенно отличается от проведенного в [3].

Для оператор-функции, задаваемой формулой (6), справедливо равенство

$$K(t, s) = B_1A^{2\alpha}\int_s^t \exp\{-(t-\tau)A_1\}C(\tau - s)A^{-2\alpha}B_2d\tau -$$

$$-\int_s^t [\Delta(B_1, \exp\{-(t-\tau)A_1\})C(\tau - s)B_2]d\tau - B_1\int_s^t \Delta(A^{2\alpha},$$

$$\exp\{-(t-\tau)A_1\}C(\tau - s)A^{-2\alpha}B_2d\tau = K_1(t, s) - K_2(t, s) - K_3(t, s). \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и условия:*

3) *операторы* $B_2A_2^{-\alpha}$, $B_1A_2^{-(1/2)+\alpha}$, $A_1A_2^{-1/2}$, $A_2^{1/2}A_1^{-1}$ *ограничены, а операторы* $A_2^{-\alpha}B_2$, $A_1^{-1}A_2^{1/2}$ *допускают замыкание до ограниченных операторов в пространстве* E *при некотором* $\alpha \in (0, 1/4]$;

4) *существуют такие* $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1/4]$, *что оператор* $A_1^{-\beta}\Delta(B_1, A_1)A_1^{-\gamma}$ *при* $\beta + \gamma \geq 1 + \alpha - \rho_1$ *и оператор* $A_1^{-\beta}\Delta(A_1, A_2)A_1^{-\gamma}$ *при* $\beta + \gamma \geq 3 - \rho_2$ *допускают замыкание до ограниченных операторов в пространствах* E *и* $D(A_1)$.

Тогда оператор-функции K_2 *и* K_3 *допускают замыкание до ограниченных операторов при всех* $0 \leq s \leq t \leq 1$, *и справедливы оценки* $\|\overline{K_j(t, s)}\| \leq \mu$, $j = 2, 3$, *в нормах пространств* E *и* $D(A_1)$.

Доказательство этого утверждения основано на оценках коммутаторов операторных коэффициентов задачи (1) – (3) и своствах дробных степеней позитивных операторов и повторяет, в основном, рассуждения из [3].

Исследование оператор-функции K_1 в работе [3] опиралось на то, что главную часть подынтегральной оператор-функции можно представить как полугруппу, порожденную возмущенным по сравнению с A_1 оператором. При этом существенно использовалась подчиненность оператора A дробной степени A_1^{α} оператора A_1 при $\alpha < 1$. В рассматриваемом случае такая подчиненность не имеет места. Запишем поэтому оператор-функцию K_1 в виде

$$K_1(t, s) = [B_1 A^{2\alpha} A_1^{-1}][A_1 \int_s^t \exp\{-(t-\tau)A_1\} C(\tau - s) d\tau [A^{-2\alpha} B_2]. \tag{8}$$

Операторы $B_1 A^{2\alpha} A_1^{-1}$ и $A^{-2\alpha} B_2$ ограничены или допускают замыкание до ограниченных во всем пространстве. Рассмотрим оператор-функцию $Q(t, s)$, заданную равенством

$$Q(t, s) = \int_s^t \exp\{-(t-\tau)A_1\} C(\tau - s) d\tau. \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и условие:* 5) *оператор* $I + A_1^{-2} A_2$ *ограниченно обратим.*

Тогда оператор-функция $A_1 Q(t, s)$ *допускает при всех* $0 \le s \le t \le 1$ *замыкание до ограниченного оператора, и справедлива оценка* $\| \overline{A_1 Q(t, s)} \| \le M$ *в нормах пространств* E *и* $D(A_1)$.

Доказательство. Интеграл в правой части формулы (9) есть операторный аналог интеграла Эйлера. После двукратного интегрирования по частям получаем

$$Q(t, s) = A_1^{-1} \exp\{-(t-\tau)A_1\} C(\tau - s) \Big|_s^t + \int_s^t A_1^{-1} \exp\{-(t-\tau)A_1\} \times$$

$$\times A S(\tau - s) d\tau = A_1^{-1} \exp\{-(t-\tau)A_1\} C(\tau - s) \Big|_s^t + A_1 \exp\{-(t-\tau)A_1\} \times$$

$$\times A S(\tau - s) \Big|_s^t - A_1^{-2} \int_s^t \exp\{-(t-\tau)A_1\} A_2 C(\tau - s) d\tau. \tag{10}$$

Обозначим через $\psi(t, s)$ все внеинтегральные члены в равенстве (10): $\psi(t, s) = A_1^{-1} C(t-s) - A_1^{-1} \exp\{-(t-s)A_1\} + A_1^{-2} A$. Тогда (10) может быть записано в виде

$$Q(t, s) = \psi(t, s) - A_1^{-2} A_2 Q(t, s) +$$

$$+ A_1^{-2} \int_s^t \Delta(A_2, \exp\{-(t-\tau)A_1\}) \quad C(\tau - s) d\tau.$$

В силу условия 5) отсюда следует равенство

$$Q(t, s) = [I + A_1^{-2} A_2]^{-1} [\psi(t, s) +$$

$$+ A_1^{-2} \int_s^t \Delta(A_2, \exp\{-(t-\tau)A_1\}) C(\tau - s) d\tau],$$

которое позволяет с использованием условия 4) доказать утверждения леммы.

Из леммы 2 и формулы (8) следует, что ядро K_1 допускает замыкание до ограниченного оператора при всех $0 \le s \le t \le 1$ и справедлива оценка

$\| \overline{K_1(t, s)} \| \leq$ в нормах пространств E и $D(A_1)$.

Последняя оценка, лемма 1 и формула (7) позволяют утверждать, что ядро K уравнения (4) также допускает замыкание до равномерно ограниченной оператор-функции в пространствах E и $D(A_1)$. Это означает, что при гладких входных данных задачи (1) – (3) существует единственное решение u уравнения (4). Гладкость полученного решения и соответствующие свойства функции v, заданной равенством (5), устанавливаются на основании общих свойств операторных уравнений Вольтерра по схеме из [3]. Кроме того, интегральные уравнения (4) и (5) дают возможность получить оценки их решений. Наконец, гладкость функций u и v позволяет доказать, что пара (u, v) является единственным решением задачи Коши (1) – (3). Тем самым установлена следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1) – 5) *и условия:* 6) *функция* $B_1 g$ *определена и* $f,\ B_1 g \in C^{\alpha}(0, 1; E)$; 7) $u_0 \in D(A_1)$, $v_0 \in D(A_2^{1+\alpha})$, $v_1 \in D(A_2^{(1/2)+\alpha})$.

Тогда существует единственное решение (u, v) *задачи* (1) – (3), *для которого функции* $u,\ u',\ A_1 u,\ B_2 u,\ v,\ v',\ v'',\ A_2 v,\ B_1 v'$ *определены и непрерывны на отрезке* $[0, 1]$, *и справедливы оценки*

$$\| u' \|_C + \| A_1 u \|_C \leq M_1(\| A_1 u_0 \|_E + \| f \|_{C^\alpha} + \| B_1 v' \|_{C^\alpha}),$$

$$\| v'' \|_C + \| A_2 v \|_C + \| B v' \|_C \leq M_2(\| A_1^{1/2} u_0 \|_E +$$

$$+ \| A_2 v_0 \|_E + \| A_2^{1/2} v_1 \|_E + \| f \|_{C^\alpha} + \| B_1 g \|_{C^\alpha}).$$

1. *Боценюк А. Н., Панков А. А.* Некоторые сцепленные системы абстрактных дифференциальных уравнений типа уравнений термоупругости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 10. – С. 6 – 8.
2. *Герштейн Л. М., Сильченко Ю. Т., Соболевский П. Е.* О полугрупповых подходах к исследованию задач термоупругости // Методы исследований дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 46 – 54.
3. *Герштейн Л. М.* Об одной связанной системе дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 7. – С. 898 – 905.
4. *Максудов Ф. Г., Леонов К. Я.* О разрешимости и единственности решения одной нелинейной смешанной задачи термоупругости // Докл. АН СССР. – 1986. – **287**, № 6. – С. 1310 – – 1312.
5. *Карнаухов В. А.* Связанные задачи термовязкоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
6. *Герштейн Л. М., Соболевский П. Е.* Об одном новом подходе к исследованию разрешимости эволюционных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 10. – С. 9 – 12.
7. *Герштейн Л. М.* О методе коммутанта исследования новых классов дифференциальных уравнений с частными производными // Общая теория граничных задач. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 47.

Получено 06. 08 91