УДК 517. 5

А. Ю. Константинов, канд. физ.-мат. наук, **А. Г. Стаднюк,** студ. (Киев. ун-т)

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

An abstract theorem on expansion of multiparameter problems for Hermite operators in generalized eigenvectors is established. Applications to differential operators are given.

Встановелена абстрактна теорема про розклад за узагальненими власними векторами багатопараметричних задач для ермітових операторів. Вказані застосування до диференціальних операторів.

1. Изучение полноты собственных функций многопараметрических спектральных задач началось с работ А. С. Диксона и Д. Гильберта в начале столетия. В недавних работах [1 – 3] предложен общий подход к получению разложений по обобщенным собственным векторам таких задач. С историей вопроса и библиографией можно ознакомиться в монографиях [4, 5] (см. также [3]).

Настоящую статью следует рассматривать как дополнение к работе [3]. Мы показываем, что абстрактная теорема о разложении по обобщенным собственным векторам задачи (1), установленная в [1–3] в случае самосопряженных операторов A_j, остается справедливой и для общих эрмитовых (не обязательно самосопряженных) операторов. На этот случай распространяются результаты [2, 3], полученные для многопараметрических задач для дифференциальных операторов. В связи с многопараметрическими задачами для эрмитовых операторов отметим работу [6], посвященную изучению индекса дефекта таких задач.

2. Пусть $H_1, \dots, H_n$ — сепарабельные гильбертовы пространства, A_j — эрмитов, B_{jk} — ограниченный самосопряженный оператор в H_j, $j, k = 1, \dots, n$. Рассмотрим в тензорном произведении $H = \otimes_{j=1}^n H_j$ эримитовы операторы $\hat{A}_j = \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1} \otimes A_j \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}$ (A_j находится на j-м месте) и аналогично определяемые ограниченные самосопряженные операторы $\hat{B}_{jk}$. Набор $\left(\hat{A}_j\right)_{j=1}^n$ имеет общую плотную в H область определения $\mathcal{D} := a.\otimes_{l=1}^n \mathcal{D}(A_l)$. Здесь $\mathcal{D}(A)$ — область определения оператора A, $a.\otimes_{l=1}^n \mathcal{D}_l$ — алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{D}_l$. Будем говорить, что $0 \neq \varphi = \varphi(\lambda) \in \mathcal{D}$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, если

$$\hat{A}_j \varphi = \sum\nolimits_{k=1}^n \lambda_k \hat{B}_{jk} \varphi, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

В дальнейшем предполагается, что задача (1) равномерно правоопределена [5], т. е. оператор $\Delta = \det (\hat{B}_{jk})_{j,k=1}^n$ положительно определен в H, т. е. для некоторого $m > 0$

$$(\Delta f, f)_H \geq m \, \|f\|_H^2, \quad f \in H. \tag{2}$$

Введем в H новое скалярное произведение (топологически эквивалентное исходному) $\langle f, g \rangle = (\Delta f, g)_H$, $f, g \in H$. Рассмотрим некоторое оснащение [7, 8] пространства H позитивным и негативным гильбертовыми пространствами H_+, H_-:

$$H_- \supset H \supset H_+ \supset D, \tag{3}$$

где D — сепарабельное линейное топологическое пространство, вложенное плотно и топологически в H_+. Двойственность между H_- и H_+ задается с помощью $(\cdot,\cdot)_H$.

Предположим, что $D \subset \mathcal{D}$ и соответствующие сужения

$$\hat{A}_j \in L(D, H_+),\ \hat{B}_{jk} \in L(D, D), \quad j, k = 1, \dots, n, \Delta, \Delta^{-1} \in L(H_+, H_+). \tag{4}$$

Здесь $L(F, G)$ — класс линейных непрерывных операторов из F в G. Будем говорить, что $0 \neq \varphi = \varphi(\lambda) \in H_-$ — обобщенный собственный вектор задачи (1), отвечающий собственному числу $\lambda \in \mathbb{R}^n$, если $\forall\ u \in D$

$$(\varphi, \hat{A}_j u)_H = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\varphi, \hat{B}_{jk} u)_H, \quad j = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Отметим, что если $\varphi \in \mathcal{D}$, то $\hat{A}_j$ и $\hat{B}_{jk}$ можно перебросить на φ и получить (1).

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что вложение $H_+ \subset H$ квазиядерно (т. е. оператор вложения — оператор Гильберта — Шмидта) и выполнены условия* (2), (4). *Тогда существует конечная борелевская мера ρ на $\mathbb{R}^n$ такая, что для ρ-п.в. $\lambda \in \mathbb{R}^n$ определен набор $(\varphi_\alpha(\lambda))_{\alpha=1}^{N(\lambda)} (N(\lambda) \leq \infty)$ обобщенных собственных векторов задачи* (1), *и для преобразования Фурье*

$$H_+ \ni u \to \tilde{u}(\lambda) = (\langle u, \varphi_\alpha(\lambda)\rangle)_{\alpha=1}^{N(\lambda)} \in l_2(N(\lambda)), \tag{6}$$

$$l_2(\infty) = l_2, \quad \forall N < \infty \quad l_2(N) = \mathbb{C}^N,$$

справедливо равенство Парсеваля: $\forall u, v \in H_+$

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\tilde{u}(\lambda), \tilde{v}(\lambda))_{l_2(N(\lambda))} d\rho(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{\alpha=1}^{N(\lambda)} \langle u, \varphi_\alpha(\lambda)\rangle \overline{\langle v, \varphi_\alpha(\lambda)\rangle} d\rho(\lambda). \tag{7}$$

Замечание. При дополнительном условии самосопряженности операторов A_j теорема установлена в [1 – 3]. Также как и в [3], теорему 1 можно переформулировать в терминах оператора $P(\lambda): H_+ \to H_-$, "проектирующего на обобщенное собственное подпространство, отвечающее λ".

С задачей (1) стандартно связан набор операторов $(X_k)_{k=1}^n$, формально определяемый как решение системы

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{B}_{jk} X_k = \hat{A}_j. \tag{8}$$

Точнее, определим X_k с помощью правила Крамера

$$X_k = \Delta^{-1} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jk} \hat{A}_j. \tag{9}$$

Здесь Δ_{jk} — алгебраическое дополнение к операторам $\hat{B}_{jk}$ в матрице $\left(\hat{B}_{il}\right)_{i,l=1}^{n}$. Положим $\mathcal{D}(X_k) = \mathcal{D}$, $k = 1, \dots, n$. Из коммутации Δ_{jk} и A_j на $\mathcal{D}$ (они действуют по разным переменным) легко вытекает, что X_k — эрмитовы относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ операторы в H. Более того [4], $\forall f \in \mathcal{D}$

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{B}_{jk} X_k f = \hat{A}_j f. \tag{10}$$

В случае самосопряженности операторов A_j, X_k $\langle\cdot,\cdot\rangle$-существенно самосопряжены на $\mathcal{D}$ и их замыкания попарно коммутируют [9]. Этот факт лежит в основе доказательства теоремы 1 в этом случае [3]. В рассматриваемом случае рассчитывать на существенную самосопряженность операторов X_k не приходится, тем не менее справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Предположим, что выполнено условие* (2). *Тогда набор* $(X_k)_{k=1}^n$ *допускает расширение до коммутирующего набора самосопряженных операторов* $\left(\tilde{X}_k\right)_{k=1}^n$, *действующего в, вообще говоря, более широком пространстве* $\tilde{H} \supset H$.

Поясним, что скалярное произведение в $\tilde{H}$ должно расширять $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Отметим также, что из результатов [9] немедленно следует, что в том случае, когда A_j имеют равные индексы дефекта, $(X_k)_{k=1}^n$ можно расширить до коммутирующего набора $\langle\cdot,\cdot\rangle$-самосопряженных операторов без выхода из H.

3. Сначала поясним, как теорема 1 выводится из теоремы 2, а потом докажем последнюю. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится понятие обобщенного собственного вектора набора операторов $(X_k)_{k=1}^n$. Отметим, что из соотношения (4), (9) и коммутации Δ_{jk} и $\hat{A}_j$ на $\mathcal{D}$ следует, что $X_k \in L(D, H_+)$, $k = 1, \dots, n$. Тем самым можно ввести такое определение: будем говорить, что $0 \neq \varphi = \varphi(\lambda) \in H_-$ — совместный обобщенный собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, если $\forall\, u \in D$

$$\langle \varphi, X_k u \rangle = \lambda_k \langle \varphi, u \rangle, \quad k = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Так как операторы X_k — $\langle\cdot,\cdot\rangle$-симметричны, то (11) обобщает понятия обычного совместного собственного вектора.

***Доказательство теоремы* 1.** В силу теоремы 2 набор $(X_k)_{k=1}^n$ эрмитовых операторов допускает расширение до набора $\left(\tilde{X}_k\right)_{k=1}^n$ самосопряженных операторов (возможно, с выходом из пространства H). Так как X_k непрерывно переводит D в H_+, то набор $(X_k)_{k=1}^n$ удовлетворяет всем условиям проекционной спектральной теоремы [7]. Таким образом, справедливы все утверждения теоремы 1 с заменой обобщенных собственных векторов задачи (1) на совместные обобщенные собственные векторы набора $(X_k)_{k=1}^n$. Остается проверить, что каждый обощенный собственный вектор набора $(X_k)_{k=1}^n$ будет и обобщенным собственным вектором задачи (1), что проводится так же, как и в [3].

Замечание. Легко показать, то сотношения (5) и (11) эквивалентны, т. е. понятия обобщенного собственного вектора задачи (1) и совместного обобщенного собственного вектора набора $(X_k)_{k=1}^n$ совпадают.

***Доказательство теоремы* 2.** Введем гильбертовы пространства $\tilde{H}_j = H_j \oplus \oplus H_j$ и операторы $A'_j = A_j \oplus (-A_j)$, $\tilde{B}_{jk} = B_{jk} \oplus B_{jk}$, действующие в $\tilde{H}_j$, $j, k = 1, \dots, n$, A'_j — эрмитовы операторы с одинаковыми индексами дефекта [8]. Пусть $\tilde{A}_j$ — некоторое самосопряженное расширение A'_j в пространстве $\tilde{H}_j$. Положим $\tilde{H} = \otimes_{j=1}^n \tilde{H}_j$ и определим действующие в $\tilde{H}$ операторы $\hat{\tilde{A}}_j = \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1} \otimes \tilde{A}_j \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}$ ($\tilde{A}_j$ находится на j-м месте) и аналогично определяемые операторы $\hat{\tilde{B}}_{jk}$; $\hat{\tilde{A}}_j$ существенно самосопряжен на $\tilde{\mathcal{D}} = a.\otimes_{k=1}^n \mathcal{D}(\tilde{A}_k)$; $\hat{\tilde{B}}_{jk} \in L(\tilde{H})$, $j, k = 1, \dots, n$. Определим оператор $\tilde{\Delta} = \det(\hat{\tilde{B}}_{jk})_{j,k=1}^n$. Легко видеть, что в представлении $\tilde{H} = \oplus_{i=1}^n (H_i \oplus H_i) = \oplus_{l=1}^{2^n} (H_1 \otimes \dots \otimes H_n)$ оператор $\tilde{\Delta}$

действует как $\oplus_{l=1}^{2^n}\Delta$. Отсюда, в частности, следует, что $\tilde{\Delta}$ положительно определен. Ясно, то операторы $\hat{\hat{A}}_j$, $\hat{\hat{B}}_{jk}$, $\tilde{\Delta}$ являются расширениями соответственно операторов $\hat{A}_j$, $\hat{B}_{jk}$, Δ с выходом в гильбертово пространство $\tilde{H} \supset H$. Введем в $\tilde{H}$ новое скалярное произведение (топологически эквивалентное исходному): $\langle f, g\rangle_{\sim} = (\tilde{\Delta} f, g)_{\tilde{H}}$, $f, g \in \tilde{H}$. Построим аналогично (9) операторы

$$X'_k = (\tilde{\Delta})^{-1}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\Delta}_{jk}\hat{\hat{A}}_j, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\tilde{\Delta}_{jk}$ — алгебраическое дополнение к $\hat{\hat{B}}_{jk}$ в матрице $(\hat{\hat{B}}_{il})_{i,l=1}^{n}$. Обозначим через $\tilde{X}_k$ замыкание X'_k с области $\tilde{\mathcal{D}}$. Согласно [9] $(\tilde{X}_k)_{k=1}^{n}$ — коммутирующий набор $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\sim}$-самосопряженных операторов. Очевидно также, что $\tilde{X}_k$ расширяет X_k.

4. Остановимся кратко на приложениях полученных результатов к многопараметрическим задачам для дифференциальных операторов вида

$$(L_j, x_j u)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k b_{jk}(x_j)u(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n. \tag{12}$$

Здесь b_{jk} — вещественные ограниченные функции, L_{j, x_j} — формально самосопряженное дифференциальное выражение, действующее по переменной $x_j \in G_j$, где G_j — некоторая область в $\mathbb{R}^{d_j}$, $d_j = 1, 2, \dots; j, k = 1, \dots, n$. В [2, 3] дополнительно предполагалось, что минимальный оператор, построенный по L_j, имеет самосопряженные расширения в $L_2(G_j)$. Из теоремы 1 настоящей статьи следует, что теоремы 6, 7 работы [3], установленные для задачи (12), справедливы и без этого предположения.

В заключение отметим, что теорема 8 работы [3], устанавливающая гладкость обобщенных собственных функций вплоть до границы, равно как и теоремы 5, 9, основанные на использовании карлемановости операторов A_j, непосредственно не переносятся на рассматриваемый случай.

1. *Березанский Ю. М., Константинов А. Ю.* Разложение по собственным векторам многопараметрических спектральных задач // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, №6. – С. 158 – 159.
2. *Березанский Ю. М., Константинов А. Ю.* О разложении по собственным векторам многопараметрических спектральных задач // Функцион. анализ и его прил. – 1992. – **26**, №1. – С. 81 – 83.
3. *Berezansky Yu. M., Konstantinov A. Yu.* Expansion in eigenvectors of multiparameter spectral problems // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №7. – С. 901 – 913.
4. *Sleeman B. D.* Multiparameter spectral theory in Hilbert space. – London : Pitmann Press, 1978. – 140 p.
5. *Volkmer H.* Multiparameter eigenvalue problems and expansion theorems // Lect. Notes Math. – 1988. – **1356**. – 157 p.
6. *Browne P. J., Isaev H.* Symmetric multiparameter problems and deficiency index theory // Proc. Edinburg Math. Soc. – 1988. – **31**. – P. 448 – 488.
7. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
8. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональний анализ. Курс лекций. – Киев : Вища шк. 1990. – 600 с.
9. *Volkner H..* On multiparameter theory // J. Math. Anal. and Appl. – 1982. – **86**. – P. 44 – 53.

Получено 25.06.92