УДК 517.938

В. Л. Кулик, д-р. физ.-мат. наук,
А. Н. Кулик, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

РЕГУЛЯРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ТОРЕ

Certain structures of linear extensions of dynamical systems on a torus, which have a unique Green's function, are considered.

Розглядаються деякі структури лінійних розширень динамічних систем на торі, які мають єдину функцію Гріна.

Систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

где $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $x \in R^n$, $A(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ назовем слабо регулярной, если она имеет хотя бы одну функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$ задачи об инвариантных торах [1, с. 120] с экспоненциальной оценкой $\| G_0(\tau, \varphi) \| \le K \exp\{-\gamma |\tau|\}$, K, γ — $\text{const} > 0$. Если же система (1) имеет только одну функцию Грина с экспоненциальной оценкой, то ее будем называть регулярной.

Известно [2, с. 127], что каждую слабо регулярную систему (1) всегда можно дополнить до регулярной следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \quad \frac{dy}{dt} = B(\varphi)x - A^*(\varphi)y, \tag{2}$$

где A^* — транспонированная матрица, $B(\varphi)$ — произвольно фиксированная матрица, $B(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, удовлетворяющая условию $\langle B(\varphi)x, x\rangle \ge \beta_0 \| x \|^2$, $\beta_0 - \text{const} > 0$. (Угловыми скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначаем скалярное произведение в R^n, $\langle x, x\rangle = \| x \|^2$.)

В связи с этим возникает задача нахождения других видов, отличных от (2), регулярных систем дифференциальных уравнений.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть две системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_i(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A_i(\varphi)x, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $a_i(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $A_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, *являются слабо регулярными. Тогда система уравнений*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_1(\varphi), \quad \frac{d\psi}{dt} = a_2(\psi),$$

$$\frac{dx}{dt} = [A_2(\psi) + (A_1(\varphi) + A_1^*(\varphi))/2 - B(\varphi, \psi)]x + [A_2^*(\psi) + A_1(\varphi)]y, \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = [-A_2(\psi) + (A_1(\varphi) + A_1^*(\varphi))/2 + B(\varphi, \psi)]x - A_2^*(\psi)y,$$

$$\frac{dz}{dt} = [A_2(\psi) + (A_1^*(\varphi) - A_1(\varphi))/2 + B(\varphi, \psi)]x - [A_1(\varphi) + A_2^*(\psi)]y - A_1^*(\varphi)z,$$

где $B(\varphi, \psi) \in C^0(\mathcal{T}_m \times \mathcal{T}_m)$ *— произвольно фиксированная матрица, удовле-*

творяющая неравенству

$$\langle B(\varphi, \psi)x, x\rangle \geq \beta_0 \| x \|^2, \ \beta_0 = \text{const} > 0, \tag{5}$$

будет регулярной, т. е. иметь единственную $3n \times 3n$*-мерную функцию Грина* $G_0(\tau, \varphi, \psi)$ *с экспоненциальной оценкой.*

Доказательство. Предположение о слабой регулярности систем. уравнений (3) эквивалентно существованию симметричных матриц $S_i(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих неравенству

$$\langle [\dot{S}_i(\varphi) - S_i(\varphi)A_i^*(\varphi) - A_i(\varphi)S_i(\varphi)]x, x\rangle \geq \| x \|^2. \tag{6}$$

Определители матрицы $S_i(\varphi)$ при некоторых $\varphi \in \mathcal{T}_m$ могут превращаться в нуль. Теперь рассмотрим квадратичную форму от переменных x, y, z с параметром $p > 0$, имеющую вид

$$V_p = p^2(\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle) + p\langle S_2(\psi)y, y\rangle + \langle S_1(\varphi)z, z\rangle. \tag{7}$$

Покажем, что производная квадратичной формы (7) вдоль решений системы (4) при достаточно больших фиксированных значениях параметра p будет положительно определенной. С этой целью сначала вычислим производную квадратичной формы $v = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ вдоль решений системы (4). После соответствующих вычислений получаем

$$\dot{v} = 2\langle B(\varphi, \psi)x, x\rangle. \tag{8}$$

Таким образом, для производной квадратичной формы (7) справедливо равенство

$$\dot{V}_p = 2p^2\langle B(\varphi, \psi)x, x\rangle + p\{\langle \dot{S}_2(\psi)y, y\rangle +$$

$$+ 2\langle S_2(\psi)y, [-A_2(\psi) + (A_1(\varphi) - A_1^*(\varphi))/2 + B(\varphi, \psi)]x\rangle - 2\langle S_2(\psi)y, A_2^*(\psi)y\rangle\} +$$

$$+ \{\langle \dot{S}_1(\varphi)z, z\rangle + 2\langle S_1(\varphi)z, [A_2(\psi) + (A_1^*(\varphi) - A_1(\varphi))/2 + B(\varphi, \psi)]x\rangle -$$

$$- 2\langle S_1(\varphi)z, [A_1(\varphi) + A_2^*(\psi)]y - 2\langle S_1(\varphi)z, A_1^*(\varphi)z\rangle.$$

Учитывая неравенства (5), (6) и равенство (8), имем

$$\dot{V}_p \geq 2\beta_0 p^2 \| x \|^2 + p \| y \|^2 + \| z \|^2 - 2pK_1 \| x \| \| y \| -$$

$$- 2K_2 \| x \| \| z \| - 2K_3 \| y \| \| z \|, \tag{9}$$

где

$$K_1 = \| S_2[-A_2 + (A_1 - A_1^*)/2 + B] \|,$$

$$K_2 = \| S_1[A_2 + (A_1^* - A_1)/2 + B] \|, \ K_3 = \| S_1(A_1 + A_2^*) \|.$$

Рассмотрим правую часть неравенства (9) как квадратичную форму от трех переменных σ_i, $i = \overline{1, 3}$:

$$W_p = 2\beta_0 p^2 \sigma_1^2 + p\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2pK_1\sigma_1\sigma_2 - 2K_2\sigma_1\sigma_3 - 2K_3\sigma_2\sigma_3.$$

Для положительной определенности квадратичной формы W_p необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$2\beta_0 p^3 - K_1^2 p^2 > 0, \quad 2\beta_0 p^3 - p^2(2\beta_0 K_3^2 + K_1^2) - p(K_2^2 + 2K_1K_2K_3) > 0,$$

которые, очевидно, при больших значениях параметра $p > 0$ будут выполняться. Поэтому, в силу неравенства (9) производная $\dot{V}_p$ квадратичной формы (7) вдоль решений системы (4) будет положительно определенной при достаточно больших p.

Покажем, что одновременно с этим квадратичная форма (7) является невырожденной при больших значениях параметра p. Для этого запишем симметричную матрицу, соответствующую квадратичной форме (7):

$$S_p = p^2 J + p\overline{S}_2(\psi) + \overline{S}_1(\varphi), \tag{10}$$

где

$$J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I_n & I_n \\ I_n & 0 & I_n \\ I_n & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \overline{S}_2(\psi) = \mathrm{diag}\{0, S_2(\psi), 0\}, \\ \overline{S}_1(\varphi) = \mathrm{diag}\{0, 0, S_1(\varphi)\}. \end{array}$$

Покажем, что матрица S_p^2 является положительно определенной при больших значениях p. Учитывая представление (10) матрицы S_p, имеем

$$S_p^2 = p^4 J^2 + p^3(J\overline{S}_2(\psi) + \overline{S}_2(\psi)J) + p^2(J\overline{S}_1(\varphi) + \overline{S}_2^2(\psi) + \overline{S}_1(\varphi)J) + \overline{S}_1^2(\varphi). \tag{11}$$

Поэтому, обозначая $u = (x, y, z)$, получаем

$$\langle S_p^2 u, u\rangle = p^4\langle J^2 u, u\rangle + p^3\langle (J\overline{S}_2 + \overline{S}_2 J)u, u\rangle +$$

$$+ p^2\langle (J\overline{S}_1 + \overline{S}_2^2 + \overline{S}_1 J)u, u\rangle + \langle \overline{S}_1^2 u, u\rangle. \tag{12}$$

Учитывая ограниченность матричных функций $\overline{S}_2(\psi)$, $\overline{S}_1(\varphi)$, очевидно, можно записать неравенства

$$\langle (J\overline{S}_2(\psi) + \overline{S}_2(\psi)J)u, u\rangle \geq -M_2 \| u \|^2,$$

$$\langle (J\overline{S}_1(\varphi) + \overline{S}_2^2(\psi) + \overline{S}_1(\varphi)J)u, u\rangle \geq -M_1 \| u \|^2, \tag{13}$$

$$\langle \overline{S}_1^2(\varphi)u, u\rangle \geq -M_0 \| u \|^2,$$

где $M_i = \mathrm{const} > 0$. Наряду с этим легко заметить, что

$$\langle J^2 u, u\rangle = \frac{1}{4}(\| x + y + z \|^2 + \| u \|^2) \geq \frac{1}{4}\| u \|^2. \tag{14}$$

Неравенства (13), (14) позволяют оценить квадратичную форму (12):

$$\langle S_p^2 u, u\rangle \geq (p^4/4 - p^3 M_2 - p^2 M_1 - M_0)\| u \|^2.$$

Отсюда видно, что матрица (11) при достаточно больших значениях p будет положительно определенной, следовательно, $\det S_p^2 \neq 0$, а значит, и $\det S_p \neq 0$.

Из невырожденности матрицы (10) и положительной определенности производной $\dot{V}_p$ вытекает регулярность системы (4). Этим и завершается доказательство теоремы.

***Замечание* 1.** Из доказательства теоремы видно, что замена неравенства (5) на следующее: $\langle B(\varphi, \psi)x, x\rangle \leq -\beta_0 \| x \|^2$, $\beta_0 > 0$, не влияет на регулярность системы (4).

2. Приведенная схема доказательства невырожденности матрицы S_p позволяет устанавливать невырожденность матриц более общего вида

$$p^n D_0(\varphi, \psi) + p^{n-1} D_1(\varphi, \psi) + \ldots + p D_{n-1}(\varphi, \psi) + D_n(\varphi, \psi),$$

где $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_m$. При этом достаточно требовать $\det D_0(\varphi, \psi) \neq 0$.

Следствие. *Полагая в теореме* $a_1(\varphi) \equiv a_2(\varphi)$, $A_1(\varphi) \equiv A_2(\varphi)$, *получаем, что при условии слабой регулярности системы* (1) *система*

$$d\varphi / dt = a(\varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = [3A(\varphi)/2 + A^*(\varphi)/2 - B(\varphi)]x + (A(\varphi) + A^*(\varphi))y,$$

$$\frac{dy}{dt} = [-(A(\varphi) + A^*(\varphi))/2 + B(\varphi)]x - A^*(\varphi)y,$$

$$\frac{dz}{dt} = [(A(\varphi) + A^*(\varphi))/2 + B(\varphi)]x - (A(\varphi) + A^*(\varphi))y - A^*(\varphi)z$$

будет регулярной при каждой матрице $B(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, *удовлетворяющей условию* $|\langle B(\varphi)x, x\rangle| \geq \beta_0 \|x\|^2$, β_0 — const > 0.

Приведем пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \sin n\varphi_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \cos m\varphi_2,$$

$$\frac{dx}{dt} = (\cos n\varphi_1 - \sin m\varphi_2 - b)x + (\cos n\varphi_1 - \sin m\varphi_2)y,$$

$$\frac{dy}{dt} = (\sin m\varphi_2 + b)x + (\sin m\varphi_2)y, \tag{15}$$

$$\frac{dz}{dt} = (-\sin m\varphi_2 + b)x + (\sin m\varphi_2 - \cos n\varphi_1)y - (\cos n\varphi_1)z,$$

где $n, m \in N$, $b > 0$. Непосредственно проверяем, что производная квадратичной формы

$$V = p^2(xy + xz + yz) + p(\sin m\varphi_2)y^2 - (\cos n\varphi_1)z^2 \tag{16}$$

вдоль решений системы (15) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \geq 2p^2bx^2 + py^2 + z^2 - 2p(b+1)|x||y| - 2(b+1)|x||z| - 4|y||z|.$$

Отсюда находим, что при выполнении условия $p > 0{,}7(b + 1/b) + 7$ производная $\dot{V}$ будет положительно определенной. Таким образом, учитывая невырожденность при больших значениях $p > 0$ квадратичной формы (16) получаем, что система уравнений (15) при любых целых n, m и произвольном $b \neq 0$ имеет единственную функцию Грина $G_0(\tau, \varphi_1, \varphi_2)$ задачи об инвариантных торах.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.

Получено 26.06.91