УДК 530. 61: 517. 589

А. И. Литвин, канд. физ.-мат. наук (Черкас. инж.-техн. ин-т),
С. Д. Симонженков, канд. физ.-мат. наук (Омс. пед. ин-т),
И. Л. Коваленко, ассист. (Черкас. инж.-техн. ин-т)

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

A method for approximate calculation of Cauchy type integrals with logarithmic singularity is proposed. It is based on expansion of a function $f(t)$ in a series with respect to Chebyshev polynomials.

Для інтегралів типу Коші з логарифмічною особливістю пропонується спосіб наближеного обчислення, обгрунтований на розкладанні функції $f(t)$ в ряд за многочленами Чебишова.

При $x \in [-1; 1]$ пусть

$$I = I(f \mid x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|t| \frac{f(t)}{t-x} dt. \tag{1}$$

Этот интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши, встречается в некоторых задачах механики сплошной среды. Для его приближенного вычисления установлен ряд квадратурных формул [1] и найдено разложение в ряд Чебышева [2]. В данной статье предлагается еще один способ в предположении, что функция $f(t)$ в (1) представима равномерно сходящимся на $[-1; 1]$ рядом

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} a_k P_k(t),$$

где $P_k(t)$ — либо многочлены Чебышева $T_k(t)$ первого рода, либо $P_k(t) = P_{2k}(t)$, либо $P_k(t) = P_{2k+1}(t)$. Для отрезка ряда

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k P_k(t) \tag{2}$$

предлагается способ вычисления соответствующего интеграла $I_N = I(f_N \mid x)$, аналогичный известному алгоритму Кленшоу нахождения $f_N(t)$ [3, 4].

Положим

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} \ln|t| \frac{P_n(t)}{t-x} dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Известно [1], что для $P_0(t) = 1$ $p_0(x) = \frac{\pi^2}{2} \operatorname{sign} x - 2N(x)$, где

$$N(x) = \int_{0}^{x} \frac{\operatorname{arcth} t}{t} dt, \quad \operatorname{arcth} t = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}.$$

В работе [5] указаны удобные с точки зрения численных расчетов представления $N(x)$. В добавление к ним приводятся чебышевские коэффициенты этой функции. Заметим, что $N(x)$ фигурирует в явных формулах, полученных в [5] для вычисления интегралов (3) при $P_n = T_n$. Однако здесь для нахождения

$$I_N = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(x) \tag{4}$$

© А. И. ЛИТВИН, С. Д. СИМОНЖЕНКОВ, И. Л. КОВАЛЕНКО, 1993

не нужно вычислять $p_k(x)$, $k \ge 1$; исходными будут лишь $p_0(x)$ и коэффициенты a_k в равенстве (2). Основой такого подхода является разностное уравнение

$$p_{n+1}(x) + \alpha p_n(x) + p_{n-1}(x) = \gamma_n, \quad n \ge 1. \tag{5}$$

В случае $P_n = T_n$

$$\alpha = -2x, \quad \gamma_n = \begin{cases} 0, & n = 2r+1, \\ 4\sigma_r, & n = 2r, \end{cases}$$

при $P_n = T_{2n}$ $\alpha = -2(2x^2-1)$, $\gamma_n = 8x\sigma_n$; при $P_n = T_{2n+1}$ $\alpha = -2(2x^2-1)$, $\gamma_n = 4(\sigma_n + \sigma_{n+1})$, где σ_n имеют вид

$$\sigma_n = \int_0^1 \ln t\, T_{2n}(t)\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Их вычисление проще всего осуществить на основе рекуррентной формулы [2]

$$\left(1 + \frac{1}{2k+2}\right)\sigma_{k+1} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\sigma_k = \frac{1}{2k+1}\left[\frac{1}{(2k+2)(2k+3)} - \frac{1}{(2k-1)2k}\right],$$

где $k \ge 1$, причем $\sigma_0 = -1$, $\sigma_1 = 7/9$.

Равенство (5) легко выводится из определения $p_n(x)$ и рекуррентных формул для многочленов Чебышева.

Теперь опишем алгоритм вычисления (4) на основе (5).

Алгоритм. Считая заданным N и коэффициенты $a_0, \ldots, a_N$ в (2), задаем массив $\{b_0, \ldots, b_{N+2}\}$, полагая $b_n = -\alpha b_{n+1} - b_{n+2} + a_n$, $n = N, N-1, \ldots, 1, 0$. После этого при $P_n = T_n$ получаем

$$\pi I_N = (b_0 - b_1 x) p_0(x) + \sum_{i=0}^{N-1}{}' b_{i+1}\gamma_i ;$$

при $P_n = T_{2n}$

$$\pi I_N = [b_0 - (2x^2-1) b_1] p_0(x) + \sum_{i=0}^{N-1}{}' b_{i+1}\gamma_i ; \tag{6}$$

при $P_n = T_{2n+1}$

$$\pi I_N = (b_0 - b_1)(x p_0(x) - 2) + \sum_{i=0}^{N-1} b_{i+1}\gamma_i .$$

Знак штрих в первых двух суммах означает, что при $i = 0$ соответствующее слагаемое берется с коэффициентом $1/2$.

Коэффициенты разложения полиномами $N(x)$ функции $T_{2n+1}(2x)$:

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n+1}(2x), \quad 0 \le x \le 1/2:$$

n	b_n	n	b_n
0	0,5112991663343523	6	0,0000000003835009
1	0,0039246536277776	7	0,0000000000206339
2	0,0000997619038739	8	0,0000000000011513
3	0,0000036206134903	9	0,0000000000000661
4	0,0000001563266957	10	0,0000000000000039
5	0,0000000074827832	11	0,0000000000000002

Если $1/2 < x \leq 1$, то следует воспользоваться формулой [5]

$$N(x) = \frac{\pi^2}{8} + \ln x \operatorname{arcth} x - N\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Если $-1 \leq x < 0$ — использовать свойство нечетности.

Пример. Вычислим интеграл (1), приняв $f(t) = 1/(t^2+1)$. Такой пример рассматривался в [1] в связи с анализом одной квадратурной формулы. Имеем [4]

$$f(t) = \sum_{k \geq 0}{}' 2^{1/2}(8^{1/2}-3)^k T_{2k}(t).$$

Следовательно, коэффициенты a_k в (2) имеют вид

$$a_k = \begin{cases} 2^{-1/2}, & k = 0, \\ 2^{1/2}(8^{1/2}-3)^k, & k > 0. \end{cases}$$

Для вычислений с удвоенной точностью достаточно положить $N = 21$, так как $a_{21} = -0,11 \ldots \cdot 10^{-15}$. Заметим, что в рассматриваемом случае интеграл (1) является нечетной функцией, поэтому для его табуляции ограничиваемся промежутком $[0, 1]$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода, соответствующие односторонние пределы равны $\pm\pi/2$. Результаты вычислений согласно (6) приведены в таблице

n	I	G
0,1	1,549876767734809	0,9159655941772193
0,2	1,499540888094396	0,9159655941772180
0,3	1,424561635222786	0,9159655941772182
0,4	1,331539394705946	0,9159655941772185
0,5	1,227431721072560	0,9159655941772188
0,6	1,118360125716641	0,9159655941772188
0,7	1,008896648326012	0,9159655941772189
0,8	0,9017041649036044	0,9159655941772189
0,9	0,7969463725731925	0,9159655941772189
1,0	0,6842599857295429	0,9159655941772189

где G — постоянная Каталана, связанная с рассматриваемым интегралом соотношением [1

$$I = \frac{1}{\pi(x^2+1)}[2xG + p_0(x)].$$

Это равенство использовалось для контроля вычислений: величина G выражалась через . Как видно, получаемое таким образом значение G расходится с истинным $G = 0,9159655941772190$ лишь в двух последних знаках. Это позволяет предположить, что значения интеграла подсчитаны с 14 – 15 верными десятичными знаками.

1. *Кулич Н. В.* О вычислении некоторых интегралов типа Коши и сингулярных интегралов с логарифмическими особенностями // Изв. АН БССР. Сер. физ. – мат. – 1974. – №1. – С 90 – 94.
2. *Применения* полиномов Чебышева в численном анализе / Васильев Н. И. и др. – Рига Зинатне, 1984. – 240 с.
3. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. –М.: Мир, 1980. – 608 с.
4. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука 1983. – 384 с.
5. *Белых В. Н.* Вычисление некоторых интегралов типа Коши с логарифмической особенностью // Динамика сплошной среды, №40. – Новосибирск, 1979. – С. 14 – 29.

Получено 08. 01. 92