УДК 517.96

С. А. Плакса, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики АН Украины, Киев)

О КОМПОЗИЦИИ И НЕТЕРОВОСТИ ОПЕРАТОРОВ В ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Under minimal assumptions for given spaces, the sufficient conditions are found for the composition BA of operators A and B to be Noetherian and normally solvable. Similar conditions on the operators B and BA are found under which the operator A is Noetherian or normally solvable.

Одержано умови з мінімальними припущеннями про задані простори, достатні для нормальної розв'язності та нетеровості композиції BA операторів A та B, і такого ж типу умови на оператори B та BA, які забезпечують нормальну розв'язність або нетеровість оператора A.

Классическим результатом теории нетеровых операторов в банаховых пространствах является теорема о нетеровости композиции замкнутых нетеровых операторов [1]. Ее обобщения на локально выпуклые пространства имеются в работах [2, 3] (см. также [4], где теоремы композиции изложены для пространств Фреше, и обзор [5]). Эти результаты получены методами, которые носят топологический характер, поскольку тесно связаны с топологическими свойствами заданных пространств и операторов. В [6] изучаются чисто алгебраические свойства композиции операторов, действующих в векторных пространствах без топологии. Другие методы алгебраического характера, по существу, нейтральные к топологическим свойствам заданных пространств и операторов, применены в работе [7] к решению задачи о возмущении полунетеровых операторов.

В данной работе такие же методы алгебраического характера применяются к изучению композиции операторов. В теореме 1 приводятся наиболее общего вида условия, достаточные для нормальной разрешимости и нетеровости композиции BA операторов A и B, а в теоремах 3, 4 — условия на операторы B и BA, обеспечивающие нормальную разрешимость или нетеровость оператора A.

Пусть X и Y — векторные пространства (в. п.), $A\colon D_A \to Y$ — линейный оператор с областью определения D_A, $D_A \subset X$, и со значениями в Y.

Ядром оператора A называется множество $\operatorname{Ker} A := \{x \in D_A\colon Ax = 0\}$, *образом* оператора A — множество $\operatorname{Im} A \equiv A(D_A) := \{y = Ax\colon x \in D_A\}$ (в формульных определениях используются знаки ":=" и "=:", причем двоеточие пишется со стороны вводимого обозначения), *дефектом* оператора A (обозначим $\operatorname{def} A$) — размерность фактор-пространства $Y/\operatorname{Im} A$. Если хотя бы одно из чисел $\dim \operatorname{Ker} A$ (размерность $\operatorname{Ker} A$), $\operatorname{def} A$ конечно, то разность $\dim \operatorname{Ker} A - \operatorname{def} A$ называют *индексом* оператора A и обозначают $\operatorname{Ind} A$. Оператор A_{-1}: $Y \to X$ назовем *обобщенно обратным* к A, если $AA_{-1}A = A$.

Векторное пространство X называют *прямой суммой* своих векторных подпространств X_1 и X_2 (обозначим $X = X_1 \dot{+} X_2$), если $X = X_1 + X_2$, $X_1 \cap X_2 = \{0\}$.

Пусть X — в. п. Через $X^\#$ обозначим *алгебраически сопряженное* к X пространство (т. е. совокупность всех линейных функционалов на X). Если X — топологическое векторное пространство (т. в. п.), то через X^* обозначим *топологически сопряженное* к X пространство (т. е. совокупность всех непрерывных линейных функционалов на X), а через X_σ — пространство X, наделенное слабейшей топологией σ, при которой непрерывны все $g \in X^*$.

Пусть A: $X \to Y$. Линейный оператор $A^\#$: $Y^\# \to X^\#$, определяемый равенством $A^\# g(x) := g(Ax)$ $\forall\, g \in Y^\#$, $\forall\, x \in X$, назовем *алгебраически сопряженным* к оператору A.

Пусть X — в. п. и Y — т. в. п. Оператор A: $X \to Y$ назовем *нормально раз-*

решимым, если уравнение $Ax = y$ имеет решение $x \in X$ тогда, когда $\psi(y) = 0$ $\forall\ \psi \in Y^{\#} \cap \operatorname{Ker} A^{\#}$. Нормально разрешимый оператор конечного индекса назовем *нетеровым*.

Пусть $A\colon X \to Y$, $B\colon D_B \to Z$, $D_B \subset Y$. Оператор $BA\colon D_{BA} \to Z$ с областью определения $D_{BA} = \{x \in X\colon Ax \in D_B\}$ называют *композицией* операторов A и B.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть X — в. п., Y и Z — т. в. п., $A\colon X \to Y$, $\operatorname{def} A < \infty$, $B\colon D_B \to Z$, D_B плотно в Y. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $|\operatorname{Ind} A| < \infty$ *или* $|\operatorname{Ind} B| < \infty$, *то* $\operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B \le \operatorname{Ind}(BA) \le \le \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{Ind} B$; *если, к тому же,* $\operatorname{Im} A$ *замкнут в* Y, *то*

$$\operatorname{Ind}(BA) = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B; \tag{1}$$

2) *если оператор* B *нормально разрешим,* $\dim \operatorname{Ker} B < \infty$ *и* $B_{-1}^{\#}(\operatorname{Ker} A^{\#}) \subset \subset Z^*$ *при некотором обобщенно обратном к* B *операторе* B_{-1}, *то оператор* $BA\colon D_{BA} \to Z$ *нормально разрешим;*

3) *если* $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$, *оператор* B *нетеров и* $B_{-1}^{\#}(\operatorname{Ker} A^{\#}) \subset Z^*$ *при некотором обобщенно обратном к* B *операторе* B_{-1}, *то оператор* $BA\colon D_{BA} \to Z$ *нетеров.*

Доказательство. Справедливо разложение $Y = \operatorname{Im} A \dotplus L$, где $\dim L = = \dim \operatorname{Ker} A^{\#}$. Если $\operatorname{Im} A$ замкнут в Y, то $\operatorname{Ker} A^{\#} \subset Y^*$ и можно выбрать $L \subset \subset D_B$ [1, с. 30]. Если же $\operatorname{Im} A$ не замкнут в Y, то не всегда можно выбрать $L \subset D_B$. Учитывая сделанные замечания, так же, как и в [6, с. 35], убеждаемся в справедливости утверждения 1 теоремы.

Докажем утверждение 2. Поскольку оператор B нормально разрешим, то уравнение

$$BAx = z, \quad x \in D_{BA}, \quad z \in Z, \tag{2}$$

эквивалентно (в смысле разыскания решений $x \in D_{BA}$ при каждом $z \in Z$) системе

$$Ax = B_{-1}z + \sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i =: z_0, \tag{3}$$

$$\varphi(z) = 0 \quad \forall\ \varphi \in Z^* \cap \operatorname{Ker} B^{\#}, \tag{4}$$

где $\nu := \dim \operatorname{Ker} B$; $\{\psi_j\}_{j=1}^{\nu}$ — базис в $\operatorname{Ker} B$; a_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ — произвольные постоянные (суммы вида $\sum_{i=1}^{0}$ считаем равными нулю).

Условия разрешимости уравнения (3) имеют вид

$$\psi_j(z_0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \mu, \tag{5}$$

где $\mu := \dim \operatorname{Ker} A^{\#}$, $\{\psi_j\}_{j=1}^{\mu}$ — базис в $\operatorname{Ker} A^{\#}$ (при $\mu = 0$ условия (5) отсутствуют).

Условия (5) представляются в виде

$$\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ji} a_i = \psi_j^{\#}(z), \quad j = 1, 2, \ldots, \mu, \tag{6}$$

где $\psi_j^\# := B_{-1}^\# \psi_j$, $\gamma_{ji} := -\psi_j(y_i)$. По условию теоремы $\psi_j^\# \in Z^* \ \forall j \in \overline{1, \mu}$.

Система (5) относительно $a_1, a_2, \dots, a_\nu$ аналогична системе (11) работы [7], условия ее разрешимости аналогичны условиям (12) из [7]. Эти условия и условия (4) необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (2). Функционалы, входящие в указанные условия, очевидно, принадлежат $Z^* \cap \mathrm{Ker}(BA)^\#$.

Поэтому оператор $BA\colon D_{BA} \to Z$ нормально разрешим. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3 следует из утверждений 1, 2 теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* X — *в. п.*, Y *и* Z — *т. в. п., операторы* $A\colon X \to Y$, $B\colon D_B \to Z$ (D_B *плотно в* Y) *нетеровы и существует непрерывный обобщенно обратный к* B *оператор* $B_{-1}\colon Z_\sigma \to Y_\sigma$. *Тогда оператор* $BA\colon D_{BA} \to Z$ *нетеров и выполняется равенство* (1).

При доказательстве следующей теоремы будем следовать методу Ф. Нетера [8. с. 181].

Теорема 3. *Пусть* X *и* Z — *в. п.*, Y — *т. в. п*; $A\colon X \to Y$; $B\colon Y \to Z$; $\dim \mathrm{Ker}\, B < \infty$; $\dim \mathrm{Ker}\, (BA) < \infty$;

$$(B^\#(\mathrm{Ker}\,(BA)^\#) + \mathrm{Ker}\, B_{-1}^\# + B^\# \Gamma^\# A^\# (\mathrm{Ker}\, B_{-1}^\#)) \subset Y^*, \tag{7}$$

где B_{-1} — *некоторый обобщенно обратный к* B *оператор*, Γ — *некоторый обобщенно обратный к* BA *оператор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *оператор* A *нормально разрешим и* $\dim \mathrm{Ker}\, A < \infty$;

2) *если* $\mathrm{def}\,(BA) < \infty$, *то оператор* A *нетеров и*

$$\mathrm{Ind}\, A = \mathrm{Ind}\,(BA) - \mathrm{Ind}\, B. \tag{8}$$

Доказательство. Если уравнение

$$Ax = y \tag{9}$$

при некотором $y \in Y$ имеет решение $x \in X$, то при том же y то же решение x имеет уравнение

$$BAx = By. \tag{10}$$

Уравнение (10) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$B^\#\psi(y) = 0. \quad \forall \psi \in \mathrm{Ker}\,(BA)^\#. \tag{11}$$

Если условие (11) выполнено, то решение уравнения (10) представляется в виде

$$x = \Gamma By + \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i, \tag{12}$$

где $n := \dim \mathrm{Ker}\,(BA)$; $\{\chi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $\mathrm{Ker}\,(BA)$; c_i, $i = 1, 2, \dots, n$ — произвольные постоянные (суммы вида $\sum_{i=1}^0$ считаем равными нулю).

Очевидно, при $\nu := \dim \mathrm{Ker}\, B = 0$ (12) является решением уравнения (9), а при $\nu > 0$ (12) удовлетворяют соотношению

$$Ax - y = \sum_{j=1}^{\nu} a_j \xi_j, \tag{13}$$

где $\{\xi_j\}_{j=1}^{\nu}$ — базис в $\operatorname{Ker} B$; a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ — некоторые постоянные. При этом (12) является решением уравнения (9) тогда и только тогда, когда $a_j = 0 \ \ \forall\, j \in \overline{1, \nu}$.

Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\nu}$ — базис в $\operatorname{Ker} B_{-1}^{\#}$, биортогональной системе $\{\xi_j\}_{j=1}^{\nu}$. Тогда, учитывая (13) и (12), получаем

$$a_j = \varphi_j(Ax) - \varphi_j(y) = \varphi_j(A\Gamma By - y) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_j(\chi_i).$$

Теперь условия $a_j = 0 \ \ \forall\, j \in \overline{1, \nu}$ выражаются в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} c_i = \delta_j^{\#}(y), \quad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{14}$$

где $\gamma_{ji} := \varphi_j(\chi_i)$, $\delta_j^{\#} := \varphi_j - B^{\#}\Gamma^{\#}A^{\#}\varphi_j$.

Система (14) относительно $c_1, c_2, \ldots, c_n$ аналогична системе (11) работы [7], условия ее разрешимости аналогичны условиям (12) из [7]. Эти условия и условие (11) необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (9). Функционалы, входящие в указанные условия, в силу (7) принадлежат $Y^* \cap \operatorname{Ker} A^{\#}$. Поэтому оператор A нормально разрешим. Кроме того, $\dim \operatorname{Ker} A < \dim \operatorname{Ker} (BA)$ и утверждение 1 доказано.

Теперь очевидно, что при условии $\dim \operatorname{Ker} (BA)^{\#} < \infty$ оператор A нетеров и равенство (8) следует из (1). Теорема доказана.

Аналогично доказывается и следующее утверждение.

Теорема 4: *Пусть* X *— в. п.,* Y *и* Z *— т. в. п.,* $A\colon X \to Y$, *оператор* $B\colon Y_\sigma \to Z_\sigma$ *непрерывен,* $\operatorname{Ker} B = \{0\}$. *Тогда из нормальной разрешимости* (*или нетеровости*) *оператора* $BA\colon\ X \to Z$ *следует нормальная разрешимость* (*или соответственно нетеровость*) *оператора* A.

1. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
2. *Schaefer H. H.* Über singulär Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen // Math. Z. – 1056. – **66**, № 2. – P. 147 – 163.
3. *Pietsch A.* Unstetige lineare Abbildungen in lokalkonvexen Vektorräumen // Math. Ann. – 1960. – **140**, № 2. – P. 153 – 164.
4. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 493 с.
5. *Крачковский С. Н., Диканский А. С.* Фредгольмовы операторы и их обобщения // Итоги науки. Сер. Мат. анализ. 1968; ВИНИТИ, 1969. – С. 39 – 71.
6. *Przeworska-Rolewicz D., Rolewicz S.* Equations in linear spaces. – Warszawa, 1968. – 380 p.
7. *Плакса С. А.* О возмущении полунетеровых операторов в неполных пространствах. // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 3. – С. 398–403.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

Получено 26.12.91