УДК 512.552.8

В. В. Бавула, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

КРАЙНИЕ МОДУЛИ НАД АЛГЕБРОЙ ВЕЙЛЯ A_n

Certain classes of simple modules over generalized Weyl algebras (extreme, polynomial, and with strong D-torsion) are classified. For these algebras, the analogs of the Bernstein theorem and the Stafford theorem are proved.

Класифікуються деякі класи простих модулів над узагальненими алгебрами Вейля (крайні, поліноміальні, з сильним D-скрутом). Для цих алгебр доводяться аналоги теорем Бернштейна і Стаффорда.

В настоящей статье известные результаты, справедливые для алгебр Вейля (неравенство и фильтрация Бернштейна, функция Гильберта, размерность и кратность конечнопорожденных модулей, бернштейновский класс модулей, теоремы Стаффорда, глобальная размерность и размерность Крулля), переносятся на один класс обобщенных алгебр Вейля (определение см. в п. 2), содержащих алгебры Вейля A_n, а также приводятся новые результаты (простота тензорных произведений простых модулей, классификация некоторых классов простых модулей, например, полиномиальных модулей, с сильным D-кручением (последние являются аналогом весовых модулей простых алгебр Ли), классификация крайних A_n-модулей, теорема о кратности простых A_n-модулей).

1. Определение обобщенной алгебры Вейля [1 – 3]. Пусть D— некоторое кольцо, $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — семейство коммутирующих автоморфизмов кольца D, т. е. $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$, $a=(a_1, \ldots, a_n)$ — множество ненулевых элементов центра $Z(D)$ кольца D, причем $\sigma_i(a_j)=a_j$ для любых $i\neq j$. *Обобщенной алгеброй Вейля* $A=D(\sigma, a)$ (сокращенно ОАВ) *степени* n с *базисным* кольцом D будем называть кольцо, которое получается присоединением к D $2n$ символов $X_1^+,\ldots,X_n^+$, $X_1^-,\ldots,X_n^-$, удовлетворяющих следующим определяющим соотношениям:

$$X_i^-X_i^+ = a_i,\quad X_i^+X_i^- = \sigma_i(a_i),\quad X_i^{\pm}\alpha = \sigma_i^{\pm1}(\alpha)X_i^{\pm}\quad \forall\alpha\in D,$$

$$[X_i^-, X_j^-] = [X_i^+, X_j^+] = [X_i^+, X_j^-] = 0\quad \forall i\neq j.$$

Множества a и σ будем называть соответственно *определяющими элементами* и *автоморфизмами* обобщенной алгебры Вейля A. Если D — нетерово кольцо (соответственно без делителей нуля), то A — нетерово кольцо (соответственно без делителей нуля).

Для любого целочисленного вектора $k=(k_1, \ldots, k_n)\in\mathbb{Z}^n$ определяем $v_k=v_{k_1}(1)\ldots v_{k_n}(n)$, где для каждого $1\leq i\leq n$ и целого $m\geq 0$ для удобства записи полагаем $v_{\pm m}(i)=(X_i^{\pm})^m$, $v_0(i)=1$. В случае $n=1$ вместо $v_m(1)$ пишем v_m. Непосредственно из определяющих соотношений следует, что $A=\oplus A_k$ — $\mathbb{Z}^n$-градуированная алгебра ($A_kA_e\subset A_{k+e}$ $\forall\, k, e\in\mathbb{Z}^n$), где $A_k=Dv_k$.

2. Основной объект. В дальнейшем, если не оговорено противное, $D=K[H_1, \ldots, H_n]$ — кольцо многочленов от n переменных с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле K характеристики нуль, $\sigma_i(H)=H_j-\delta_{ij}$ ($1\leq i, j\leq n$, δ_{ij} — дельта-функция Кронекера), многочлены $a_i\in K[H_i]$ имеют положительную степень. Таким образом, ОАВ A-нетерова, без делителей нуля, следовательно, по теореме Голди A имеет тело частных.

Алгеброй Вейля $A_n = A_n(K)$ степени n над полем K называется алгебра с $2n$ образующими $X_1, \ldots, X_n, \delta_1, \ldots, \delta_n$, удовлетворяющими соотношениям $[X_i, X_j] = [\delta_i, \delta_j] = [\delta_i, X_j] = 0$ при $i \neq j$, $[\delta_i, X_i] = 1$.

A_n является ОАВ с базисным кольцом $D = K[H_1, \ldots, H_n]$ и множеством определяющих элементов $\{a_i = H_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ и автоморфизмов $\{\sigma_i\}$.

Очевидно, тензорное произведение обобщенных алгебр Вейля снова является ОАВ и противоположная алгебра $A^0 \simeq A$.

3. Классификация (с точностью до неразложимых элементов евклидового кольца) простых A-модулей. Приводимые в данном пункте результаты являются несложным и очевидным обобщением результатов работы [3]. На протяжении этого пункта $\mathcal{A}$ — ОАВ степени 1 с ненулевым определяющим элементом $a \neq 0$ и базисным дедекиндовым кольцом $\mathcal{D}$, кольцо частных которого обозначим через $k = S^{-1}\mathcal{D}$, $S = \mathcal{D} - \{0\}$. При этом определяющий автоморфизм σ удовлетворяет условию: C) $\sigma^n(\mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}$ $\forall 0 \neq n \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} \subset \mathcal{D}$ — простой идеал.

Для краткости записи положим $X = X_1^+$ и $Y = X_1^-$. Локализация $\mathcal{B} := S^{-1}\mathcal{A}$ кольца $\mathcal{A}$ по S изоморфна кольцу косых лорановских многочленов $k[X, X^{-1}; \sigma]$, которое является евклидовым (выполняется левый и правый алгоритм деления с остатком) относительно функции "длины" l: $l(\alpha X^m + \ldots + \beta X^n) = n - m$, $\alpha, \beta \in k$ — не нулевые, $m < \ldots < n$.

Пусть M — $\mathcal{A}$-модуль, тогда в силу условия Оре $\operatorname{tor} M := \{m \in M \mid sm = 0$ для некоторого $s \in S\}$ является подмодулем ($\mathcal{D}$-кручения). Следовательно, каждый простой $\mathcal{A}$-модуль M либо с $\mathcal{D}$-кручением ($M = \operatorname{tor} M$) либо без $\mathcal{D}$-кручения ($\operatorname{tor} M = 0$).

На множестве ненулевых простых идеалов $\mathcal{P} := \operatorname{Specm} \mathcal{D}$ свободно действует группа $\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$, т. е. орбита каждой точки изоморфна $\mathbb{Z}$ (в силу условия C). Поэтому все естественные понятия (порядок, отрезок, полуось и др.), используемые для $\mathbb{Z}$, будем (без оговорок) применять для любой орбиты.

На $\mathcal{P}$ зададим отношение эквивалентности: $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ лежат на одной орбите и любой идеал из отрезка $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ не содержит определяющего элемента a. Т. е. область эквивалентности — либо орбита, каждый элемент которой не содержит a (такие орбиты называются невырожденными, в противном случае — вырожденными), либо множество вида $(-\infty, \mathfrak{p}]$, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$, $(\mathfrak{p}, \infty)$, где $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \ni a$ и ни один другой элемент из этих множеств a не содержит. Вырожденных орбит (соответственно конечных областей эквивалентности) конечное число.

Предложение 1. *Для любого левого (правого) идеала $J \neq 0$ $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{A}/J$ имеет конечную длину, следовательно, размерность Крулля алгебры $\mathcal{A}$ равна $K - \dim \mathcal{A} = 1$.*

Пусть A — некоторое кольцо и Q — некоторое свойство простых A-модулей, инвариантное относительно изоморфизма модулей. Тогда через $\hat{A}(Q)$ обозначим совокупность классов изоморфизма простых A-модулей, имеющих свойство Q.

Теорема 1 (классификация простых $\mathcal{A}$-модулей с $\mathcal{D}$-кручением). *Отображение $\operatorname{Specm}(\mathcal{D}) /\!\sim \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{D}$-кручение), $\Gamma \to [L(\Gamma)]$ является биекцией, где*

1) *если Γ — невырожденная орбита, то $L(\Gamma) = \mathcal{A}/\mathcal{A}\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} \in \Gamma$;*

2) *если* $\Gamma = (-\infty, \mathfrak{p}]$, то $L(\Gamma) = \mathcal{A} / (\mathcal{A}\mathfrak{p} + \mathcal{A}X)$;

3) *если* $\Gamma = (\sigma^{-n}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}]$, *то* $L(\Gamma) = \mathcal{A} / (\mathcal{A}Y^n + \mathcal{A}\mathfrak{p} + \mathcal{A}X)$;

это в точности все простые $\mathcal{A}$-*модули конечной длины* $l_{\mathcal{D}}(L(\Gamma)) = |\Gamma| < \infty$ *как* $\mathcal{D}$-*модули* (*их конечное число равно количеству конечных областей эквивалентности*);

4) *если* $\Gamma = (\mathfrak{p}, +\infty)$, *то* $L(\Gamma) = \mathcal{A} / (\mathcal{A}\sigma(\mathfrak{p}) + \mathcal{A}Y)$.

В $\mathcal{D}$ введем отношение $<$: $\alpha < \beta$, если $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ для любых, принадлежащих одной орбите, простых идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, содержащих соответственно α и β. Элемент $b = v_m\beta_m + \ldots + \beta_0$, $\beta_i \in \mathcal{D}$, $m \le i \le 0$, называется *нормальным*, если $\beta_0 < \beta_m$ и $\beta_0 < a$.

Лемма 1. *Для любого* $b = v_{-m}\beta_{-m} + \ldots + \beta_0 \in \mathcal{A}$ *длины* $m > 0$, $\beta_i \in \mathcal{D}$, $m \le i \le 0$, *существуют ненулевые* $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ *такие, что* $\beta b \alpha^{-1} \in \mathcal{A}$ — *нормальный элемент. При этом достаточно положить*

$$\alpha = \prod\nolimits_{-s \le i \le 0} \sigma^i(\beta_0), \quad \beta = \prod\nolimits_{-m-s \le j \le 1} \sigma^j(\beta_0),$$

где s — *достаточно большое* (*легко вычислимое*) *натуральное число.*

Теорема 2 (классификация простых $\mathcal{A}$-модулей без $\mathcal{D}$-кручения).

1. *Каноническое отображение* S^{-1}: $\hat{A}$ (*без* $\mathcal{D}$-*кручения*) $\to \hat{B}$, $[M] \to [S^{-1}M]$ *является биекцией с обратным* Soc: $[N] \to [\mathrm{Soc}_A N]$, *где* $\mathrm{Soc}_A N$ — *цоколь модуля* ${}_AN$.

2. $\mathcal{A}$-*модуль* M-*простой без* $\mathcal{D}$-*кручения* $\Leftrightarrow$ $M \simeq (\mathcal{A}\alpha + \mathcal{B}b) / \mathcal{B}b$, *где* $b \in \mathcal{A}$ — *неразложимый в* $\mathcal{B}$ (*и однозначно с точностью до подобия определенный*) *элемент такой, что* $\beta b \alpha^{-1}$ — *нормальный для некоторых* $\beta, \alpha \in \mathcal{D}$ (*например, как в лемме* 1).

Примеры алгебр $\mathcal{A}$. 1. $\mathcal{D} = K[H]$ — кольцо многочленов над полем K характеристики 0, $\sigma(H) = H - 1$, $a \ne 0$. В частности, при $a = H$ получается алгебра Вейля A_1.

2. Пусть $U = \mathrm{Usl}(2)$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathrm{sl}(2) = \langle X, Y, H \mid [H, X] = X, [H, Y] = -Y, [X, Y] = 2H \rangle$ над полем K, $C = H(H+1) + YX$ — элемент Казимира. Очевидно, $U \simeq K[H, C](\sigma, a = C - H(H+1))$, где автоморфизм σ базисного кольца $K[H, C]$ определяется следующим образом: $\sigma(H) = H - 1, \sigma(C) = C$. Тогда для любого $\lambda \in K$ фактор-алгебра $U(\lambda) := U / U(C - \lambda)$ изоморфна ОАВ из примера 1 $K[H](\sigma, a = \lambda - H(H+1))$ [4].

3. Рассмотрим K-алгебру $\Lambda(b)$, которая является деформацией $\mathrm{Usl}(2)$ и порождается буквами X, Y, H, удовлетворяющими следующим соотношениям: $[H, X] = X, [H, Y] = -Y, [X, Y] = b \in K[H]$ — произвольный ненулевой многочлен. Тогда [2] $\Lambda(b) \simeq K[H, C](\sigma, a = C - \alpha)$, где σ такое, как в примере 2, $\alpha \in K[H]$ удовлетворяет уравнению $\alpha - \sigma(\alpha) = b$. Очевидно, центр алгебры $\Lambda(b)$ равен $K[C]$. Аналогично предыдущему примеру для любого $\lambda \in K$ фактор-алгебра $\Lambda(b, \lambda) := \Lambda(b) / \Lambda(b)(C - \lambda)$ изоморфна ОАВ из примера 1 с определяющим элементом равным $\lambda - \alpha$.

4. $\mathcal{D} = K[H, (H - \mu(1-\lambda)^{-1})^{-1}]$, $\sigma(H) = \lambda H + \mu$, где $\lambda \ne 0 \in K$ не является корнем из единицы, $\mu \in K$.

4. Классификация простых A-модулей с сильным D-кручением, критерий простоты, глобальная размерность и размерность Крулля алгебры A. Пусть $\mathcal{A}_i := \mathcal{D}_i(\sigma_i, a_i)$ — ОАВ степени 1 с базисным кольцом $\mathcal{D}_i = K[H_i]$, $1 \le i \le n$. Тогда $A = \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ и на множестве максимальных идеалов кольца D $\operatorname{Specm} D \simeq \prod_{i=1}^n \operatorname{Specm} \mathcal{D}_i \simeq K^n$ (теорема Гильберта о корнях) действует группа $\mathbb{Z}^n = \prod_{i=1}^n \langle\sigma_i\rangle$ и определено отношение эквивалентности $\sim$ как прямое произведение ранее введенных эквивалентностей из $\operatorname{Specm} \mathcal{D}_i$. A-модуль M называется модулем с *сильным D-кручением* (сокращенно с. D-кручением) либо *весовым*, если для любого $1 \le i \le n$: M-модуль с $\mathcal{D}_i$-кручением.

Теорема 3 (классификация простых A-модулей с сильным D-кручением). *Отображение* $\operatorname{Specm} D /\!\sim \longrightarrow \hat{A}$ *(с. D-кручение),* $\Gamma = \prod_{i=1}^n \Gamma_i \to [L(\Gamma) := \otimes_{i=1}^n L_i(\Gamma_i)]$ *является биекцией, где* $L_i(\Gamma_i)$ *такие, как в теореме* 1. *В частности, это отображение осуществляет биекцию между конечными областями эквивалентности (которых конечное число) и простыми конечномерными A-модулями,* $\dim L(\Gamma) = \prod_{i=1}^n |\Gamma_i|$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1 и того очевидного факта, что любой простой A-модуль с сильным D-кручением является фактор-модулем модуля $A / A(H_1 - \lambda_1, \ldots, H_n - \lambda_n) \simeq \otimes_1^n \mathcal{A}_i / \mathcal{A}_i(H_i - \lambda_i)$ для некоторых $\lambda_i \in K$.

Естественно вводится "однородный" базис, превращающий $L(\Gamma)$ в градуированный A-модуль.

Непосредственно из результатов [3], полученных при $n = 1$, следует такая теорема.

Теорема 4. 1. *Алгебра A имеет лишь конечное число двусторонних идеалов, каждый из которых однороден относительно градуировки.*

2. *Алгера A — простая $\Leftrightarrow$ разность двух различных корней каждого многочлена a_i не целое число.*

3. *Если алгебра A простая и каждый многочлен a_i не имеет кратных корней, то глобальная размерность* $\operatorname{gl.dim} A = n$.

4. *Размерность Крулля алгебры A равна* $K - \dim A = n$.

5. Аналог неравенства Бернштейна, функция Гильберта, фильтрации. На алгебре A рассмотрим следующие фильтрации:

B: $B_m = \Sigma\{D_i v_j \mid 2|i| + s_1|j_1| + \ldots + s_n|j_n| \le m\}$, где $\{D_i\}$ — обычная фильтрация по степеням кольца многочленов D, s_k — степень (определяющего) многочлена a_k, $1 \le k \le n$, $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$; очевидно, B_m — конечномерное пространство, $m \ge 0$;

Σ: $\Sigma_m = \Sigma\{D v_j \mid |j_1| + \ldots + |j_n| \le m\}$.

Градуированная алгебра $\operatorname{gr}_B(A)$ порождается $3n$ коммутирующими переменными x_i, y_i, h_i, которые удовлетворяют соотношениям $h_i^{s_i} = x_i y_i$, $1 \le i \le n$.

Будем говорить, что функция $\chi: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ имеет *полиномиальный* рост, если для некоторого натурального d существует ненулевой предел $\lambda = \lim_{t\to\infty} \chi(t) / t^d$. Для фильтрации B аналогично случаю алгебры Вейля [5, 6] на каждом конечнопорожденном A-модуле M существует *хорошая* фильтрация $\Gamma = \{\Gamma_i\}$ и функция полиномиального роста (которую будем называть функцией Гильберта модуля M):

$$\chi(M, \Gamma, t) = \frac{e}{d!}t^d + \dots, \quad es^d, \ d \in \mathbb{Z}_+, \quad s = \text{НОК}(s_1, \dots, s_n, 2),$$

для которой $\dim \Gamma_j = \chi(M, \Gamma, j)$ при $j >> 0$, где тремя точками обозначены члены "меньшего порядка".

При этом константы $d = d(M)$ и $e = e(M)$ будем называть соответственно *размерностью* и *кратностью* модуля M. Они не зависят от фильтрации Γ и для них справедливы все свойства, что и в случае алгебры Вейля. В частности, для любой точной последовательности A-модулей $0 \to M \to N \to L \to 0$, $d(N) = \max\{d(M), d(L)\}$ и если $d(M) = d(L)$, то $e(N) = e(N) + e(L)$.

Размерность Гельфанда — Кириллова ОАВ A равна $GK - \dim A = 2n$, поскольку $\dim B_j = j^{2n} / (2n)! s_1 \dots s_n + \dots$. Как и в случае алгебры Вейля [7], выполнено неравенство Бернштейна.

Теорема 5. *Пусть A — простая алгебра и $M \neq 0$ — конечнопорожденный A-модуль. Тогда $d(M) \geq n$.*

Если A — не простая, то среди тензорных сомножителей $\mathcal{A}_i$ имеется $1 \leq t \leq n$ не простых алгебр и в предыдущей теореме справедливо неравенство $d(M) \geq n - t$.

6. Бернштейновский класс A-модулей.

Лемма 2. *Пусть M и N — конечнопорожденные модули над обобщенными алгебрами Вейля A' и A'' соответственно. Тогда, очевидно, тензорное произведение модулей $M \otimes N$ является модулем над* ОАВ $A' \otimes A''$ *и* $d(M \otimes N) = d(M) + d(N)$, $e(M \otimes N) = e(M)e(N)$.

Клас конечнопорожденных ненулевых A-модулей, имеющих минимально возможную размерность (n в случае A_n), будем называть *бернштейновским* и обозначать $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A)$. Очевидно, бернштейновский класс является полной подкатегорией в категории A-модулей, каждый модуль из которого имеет конечную длину. Пусть $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ и $\mathcal{B}$ — бернштейновские классы модулей для алгебр A', A'' и $A = A' \otimes A''$ соответственно. Тогда в силу предыдущей леммы $\mathcal{B}' \otimes \mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}$. В частности, из включения $\hat{A}_1 \subset \mathcal{B}(A_1)$ следует $\hat{A}_1 \otimes \dots \otimes \hat{A}_1 \subset \mathcal{B}(A_n)$, т. е. тензорное произведение n простых A_1-модулей является A_n-модулем конечной длины и размерности n.

7. Классификация крайних A_n-модулей. Модуль из бернштейновского класса, имеющий минимально возможную кратность, будем называть *крайним*. Крайний модуль всегда прост, это в некотором смысле самый "маленький" простой модуль. Очевидно, A_n-модуль M-крайний, если $d(M) = n$ и $e(M) = 1$. Обозначим через $\mathcal{K}_n$ совокупность всех крайних A_n-модулей. Тогда в силу леммы 2 $\mathcal{K}_n \otimes \mathcal{K}_m \subseteq \mathcal{K}_{n+m}$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$. Примерами крайних A_n-модулей являются $W := A_n / A_n(\partial_1, \dots, \partial_n) = (K[x_1, \dots, x_n], \ \partial_j(F) = \delta F / \delta x_j$ — формальная производная, $x_j(F) = x_j F$ — умножение) и $V := A_n / A_n(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть $\mathrm{Aut}_B(A_n)$ — группа автоморфизмов алгебры A_n, сохраняющих фильтрацию Бернштейна ($\sigma B_n = B_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$). Эта группа естественным образом отождествляется с подгруппой обратимых операторов пространства $V = \langle 1, x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$, сохраняющих кососимметрическую (вырожденную) форму $[u, v] = uv - vu$.

Теорема 6. *M-крайний A_n-модуль $\Leftrightarrow M \simeq {}^{\tau}W$ (подкрученный модуль) для некоторого $\tau \in \mathrm{Aut}_B(A_n)$, где $W = A_n / A_n(\partial_1, \dots, \partial_n)$.*

8. Тензорные произведения простых модулей. В данном пункте каждое кольцо $\mathcal{D}_i$, $1 \le i \le n$, и $\mathcal{D}$ являются коммутативной областью с ограниченным условием минимальности (т. е. любой собственный фактор-модуль $\mathcal{D}$ имеет конечную длину) и конечнопорожденной K-алгеброй над алгебраически замкнутым полем K, каждый элемент которого неподвижен относительно действия σ $(\sigma(\lambda) = \lambda \ \forall \lambda \in K)$.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{A}$ — ОАВ степени 1 с базисным кольцом $\mathcal{D}$ и M — простой $\mathcal{A}$-модуль без $\mathcal{D}$-кручения. Тогда для любого $m \ne 0 \in M$ существует $p \in \mathcal{A}$ такой, что $\mathrm{Ker}\,(p_M) = Km$.*

Доказательство. Очевидно, $M = \mathcal{A}m \simeq M_p := \mathcal{A} / \mathcal{A} \cap \mathcal{B}p$ для некоторого неразложимого в $\mathcal{B}$ элемента $p \in \mathcal{A}$, $pm = 0$. Тогда

$$0 \to V_p := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}p \ / \mathcal{A}p \to \mathcal{A} / \mathcal{A}p \to M_p \to 0 \tag{1}$$

— точная последовательность $\mathcal{A}$-модулей, причем V_p — модуль с $\mathcal{D}$-кручением, следовательно, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V_p, M) = 0$. Применяя к (1) функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, M)$, имеем $K \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_p, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} / \mathcal{A}p, M) \simeq \mathrm{Ker}\,(p_M)$. Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{A}_i$ — ОАВ степени 1 с базисным кольцом $\mathcal{D}_i$, $1 \le i \le n$. Тогда $\hat{\mathcal{A}}_1 \otimes \dots \otimes \hat{\mathcal{A}}_n \subset (\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)^\wedge$. Более подробно, пусть M_i, N_i — простые $\mathcal{A}_i$-модули. Тогда $M = \otimes M_i$ — простой $A = \otimes \mathcal{A}_i$-модуль и A-модули $\otimes M_i$ и $\otimes N_i$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_i$-модули M_i и N_i изоморфны для каждого i.*

Доказательство. Для доказательства простоты A-модуля M достаточно показать, что M порождается любым $u \ne 0 \in M$. Покажем, что Au содержит ненулевой "однородный" элемент вида $z = z_1 \otimes \dots \otimes z_n$, где $z_i \ne 0 \in M_i$. Предположим, что это так. Тогда $Au \subset Az = \otimes Az_i = M$, следовательно, M — простой модуль.

***Случай* 1.** Пусть M_1-модуль без $\mathcal{D}_1$-кручения. Тогда, как несложно видеть, u можно представить в виде суммы

$$u = \sum\nolimits_1^m u_j \otimes w_j, \quad u_j \in M_1, \ w_j \in \otimes_2^n M_i = N, \tag{2}$$

например, m ненулевых слагаемых так, чтобы i) $Ku_i \cap Ku_j = 0$, если $i \ne j$; ii) $\{w_j\}$ — линейно независимые элементы.

В силу леммы 3 существует $p \in \mathcal{A}_1$ такой, что $\mathrm{Ker}\,(p_{M_1}) = Ku_1$. Тогда в силу условий i), ii) $u' := pu = \sum\nolimits_2^m pu_j \otimes w_j \ne 0$ и доказательство завершается применением индукции сначала по m, а затем по n.

***Случай* 2.** Пусть M_1-модуль с $\mathcal{D}_1$-кручением. Тогда $M_1 = \Sigma(M_1)_k$ — сумма неизоморфных между собой простых R-модулей, где R в зависимости от ситуации равно либо $\mathcal{D}_1$ либо некоторому кольцу L_* [8]. Значит, существует $d_1 \in R$ такое, что $du = u_k \otimes w_k$ для некоторых $u_k \in (M_1)_k$, $w_k \in N$. Доказательство завершается применением индукции.

Очевидно, $\mathcal{A}_i$-модуль $\otimes M_j$ является полупростым и каждое простое слагаемое изоморфно M_i. Следовательно, A-модули $\otimes M_i$ и $\otimes N_i$ изоморфны тогда и только тогда, когда $M_i \simeq N_i$ $\forall\, 1 \le i \le n$. Теорема доказана.

Следствие. 1. $\hat{A}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{A}_1 \subset \hat{A}_n$.

2. $\mathrm{sl}\,(2)\hat{} \otimes \ldots \otimes \mathrm{sl}\,(2)\hat{} \subset (\mathrm{sl}\,(2) \times \ldots \times \mathrm{sl}\,(2))\hat{}$.

9. Кратность простого A_n-модуля размерности n.

Теорема 8. *Для каждого натурального $m \in \mathbb{N}$ существует простой A_n-модуль M размерности $d(M) = n$ и кратности $e(M) = m$.*

Доказательство. В силу леммы 2 и теоремы 7 достаточно доказать теорему в случае A_1.

Лемма 4. *Пусть $p = 1 - \alpha X$, $\alpha \ne 0 \in K[H]$, $\deg \alpha = \nu$ (соответственно $p = \beta - X$, где многочлен $\beta \in K[H]$ степени $\mu \ge 1$ не имеет целых корней), $M = A_1 / A_1 p$. Тогда в обоих случаях M-простой A_1-модуль размерности $d(M) = 1$ и кратности $e(M) = 2\nu + 1$ (соответственно $e(M) = 2\mu$).*

Доказательство. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично). Обозначим чертой (которую будем по возможности опускать) естественный эпиморфизм модулей $A_1 \to M$, $v \to \bar{v}$. Тогда

$$M = K[H] \oplus \{KH^iX^j \mid 0 \le i \le \nu - 1,\ 1 \le j\}.$$

Если $\nu = 0$, то $M = K[H]$ и для любого целого $k \ge 0$ размерность пространства $M_k := B_k \cdot \bar{1} = \langle 1, H, \ldots, H^k \rangle$ равна $k + 1$, где $\{B_k\}$ — фильтрация Бернштейна на A_1. Следовательно, кратность и степень M равна 1. Если $\nu \ge 1$, то, обозначая $F_n := \langle H^iX^j \mid\ 2i + j \le n \rangle$ и $G_n := \langle H^iY^j \mid\ 2i + j \le n \rangle$, $B_n = F_n + G_n$, имеем $\overline{F}_{2n} := \langle H^i, H^j X^k \mid\ \nu \le i \le n,\ 0 \le j \le \nu - 1,\ 2j + i \le 2n \rangle$ и $\dim \overline{F}_{2n} = (\nu + 1)2n + \ldots$ при $n >> 0$.

Очевидно, $H^iY^{2(n-i)} \to H^i\Pi\{\sigma^k(\gamma) \mid 2(-n + i) < k \le 0\}$ — многочлен степени $d_{n,i} = i + (\nu + 1)2(n - i)$, где $\gamma = \sigma^{-1}(\alpha)a$. Из равенств $d_{n,i} - d_{n,i+1} = 2\nu + 1$, $d_{n,i} - d_{n-1,i-1} = 1$ следуют включения

$$K[H]_{(\nu+1)2n-(2\nu+1)^2} \subset \overline{G}_{2n} \subset K[H]_{(\nu+1)2n},$$

где пространство $K[H]_t$ состоит из многочленов степени не больше t. Отсюда $\dim \overline{G}_{2n} = (\nu + 1)2n + \ldots$ и $\dim (\overline{F}_{2n} \cap \overline{G}_{2n}) = 2n + \ldots$ при $n >> 0$. Следовательно, $e(M) = 2\nu + 1$ и $d(M) = 1$.

В обоих случаях простота модуля M следует из предложения 8 и следствия 1 из [4], примененных в случае $a = H$. Теорема доказана.

10. Полиномиальные модули. Модуль над ОАВ будем называть *полиномиальным*, если он является свободным модулем ранга 1 над базисным кольцом ОАВ.

Пусть $\mathcal{A}$ — ОАВ степени 1 с базисным кольцом $\mathcal{D}$, являющимся коммутативной областью главных идеалов с условием C), например $\mathcal{D} = K[H]$, $\sigma(H) = H - 1$, либо $\mathcal{D} = K[H, H^{-1}]$, $\sigma(H) = qH$, $q \ne 0 \in K$ — не корень из 1, либо произвольная локализация этих колец.

Приведем свойства полиномиальных $\mathcal{A}$-модулей.

П1. *Каждый полиномиальный $\mathcal{A}$-модуль является неразложимым модулем конечной длины и изоморфен некоторому модулю вида $W_f := \mathcal{A} / \mathcal{A}(X - f, Y - a / \sigma^{-1}(f))$, где $f \ne 0 \in \mathcal{D}$ такой, что $f \mid \sigma(a)$, верно и обратное.*

П2. *Каждый собственный подмодуль (если он существует) полиномиального модуля W_f является полиномиальным и существенным. Более подробно, $\mathcal{D}h$-подмодуль в $W_f \Leftrightarrow \sigma(h)f = h\alpha$ для некоторого $\alpha \neq 0 \in \mathcal{D}$ такого, что $\alpha \mid \sigma(a)$. Каждый собственный фактор-модуль полиномиального модуля является модулем с $\mathcal{D}$-кручением и, следовательно, имеет конечную длину как $\mathcal{D}$-модуль.*

П3. *Любой ненулевой гомоморфизм полиномиальных модулей является вложением. Если полиномиальные модули M и N не изоморфны и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \neq 0$, то обязательно $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, M) = 0$.*

П4. *Модули W_f и W_g изоморфны в том и только в том случае, когда существует обратимый элемент $\lambda \in \mathcal{D}$ такой, что $\sigma(\lambda)g = \lambda f$.*

Если множество обратимых элементов $\mathcal{D}^*$ кольца $\mathcal{D}$ совпадает с множеством неподвижных точек автоморфизма σ, т. е. $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^{\sigma}$ (например, $\mathcal{D} = K[H]$, $\sigma(H) = H - 1$), то

П4′. $W_f \simeq W_g \Leftrightarrow f = g$.

На множестве полиномиальных модулей Pol введем отношения порядка $<$ и эквивалентности $\sim$: $M < N$ $(M \sim N)$, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \neq 0$ (соответственно существует в Pol конечная цепочка модулей с началом M и концом N такая, что существуют ненулевые гомоморфизмы между соседними модулями, порядок не имеет значения).

П5′. *Каждая область эквивалентности состоит лишь из конечного числа элементов и в ней существует наименьший элемент, который в силу свойства* П3 *содержится в любом модуле из этой области.*

Доказательство. П1. Пусть $M = \mathcal{D}$ — полиномиальный модуль. Тогда $X1 = f$ и $Y1 = g$ для некоторых $f, g \in \mathcal{D}$, кроме того, $a = YX1 = \sigma^{-1}(f)g$, следовательно, $M \simeq W_f$ — модуль конечной длины в силу предложения 1, а неразложимость следует из равенства ${}_{\mathcal{D}}M = \mathcal{D}$. Обратное очевидно.

П2. $\sigma(h)f = Xh = \alpha h$ и $Yh = \beta h$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$. Тогда $\sigma(a)h = XYh = X(\beta h) = \sigma(\beta)\alpha h$. Остальное очевидно.

П3. Доказательство непосредственно следует из того, что полиномиальный модуль имеет конечную длину и не имеет $\mathcal{D}$-кручения.

П4. Изоморфизм $\varphi\colon W_f \to W_g$ полностью определяется своим значением $\varphi(1) = \lambda$, которое, очевидно, является обратимым в $\mathcal{D}$. Тогда $\lambda f = \varphi(X) = X\lambda = \sigma(\lambda)g$.

П4′ следует из П4 и равенства $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^{\sigma}$.

П5′. Пусть M — некоторый минимальный элемент из области эквивалентности E (например, пересечение всех ненулевых подмодулей некоторого полиномиального модуля из E) и F — совокупность $N \in E$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \neq 0$. Очевидно, модуль M-простой. Если $F \neq E$, то существует модуль $L \in E \setminus F$ такой, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, N) \neq 0$ для некоторого $N \in F$. Тогда $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, L) \neq 0$, поскольку можно считать, что M и L являются подмодулями в N, а M к тому же простой и существенный. Полученное противоречие завершает доказательство.

Совокупность неразложимых элементов $\mathcal{M}$ кольца $\mathcal{D}$ называется *выделенной*, если любой неразложимый элемент из $\mathcal{D}$ кратный некоторому элементу из $\mathcal{M}$ и если при этом $p = \lambda\sigma^i(q)$ для некоторых $p, q \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{Z}$,

$\lambda \in \mathcal{D}^*$, то $\lambda = 1$. Зафиксируем некоторое выделенное множество $\mathcal{M}$ (например, если $\mathcal{D} = K[H]$, то $\mathcal{M}$ — совокупность неразложимых полиномов с коэффициентом при старшей степени равным 1). Тогда на $\mathcal{M}$ действует группа $\mathbb{Z} = \langle\sigma\rangle$. Для любого $\alpha \neq 0 \in \underset{\sim}{k}$ (= поле частных $\mathcal{D}$) через $\mathcal{O}(\alpha)$ обозначим совокупность орбит из $\mathcal{M}/\mathbb{Z}$, которым принадлежат неразложимые сомножители из несократимой записи элемента α в виде дроби. Тогда $\alpha = \alpha^*\Pi\{\alpha_O \mid O \in \mathcal{O}(\alpha)\}$, где в сомножитель $\alpha_O \in \underset{\sim}{k}$ входят все неразложимые элементы, принадлежащие орбите O, $\alpha^* \in \mathcal{D}^*$ — однозначно определенный элемент. Пусть $\nu(p, \alpha)$ — кратность вхождения $p \in \mathcal{M}$ в несократимую дробь α.

Лемма 5. *Пусть $\alpha \neq 0 \in \underset{\sim}{k}$. Тогда решение $h \in \underset{\sim}{k}$ уравнения $\sigma(h) = \alpha h$ существует тогда и только тогда, когда существует решение $h^* \in \mathcal{D}^*$ при $\alpha = \alpha^*$ и для любой орбиты $O \in \mathcal{O}(\alpha)$:*

$$\langle\alpha, O\rangle := \sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}} \nu(\sigma^i(p), \alpha) = 0.$$

При этом решение имеет вид

$$h = h^*\prod\nolimits_{O\in\mathcal{O}(\alpha)}\prod\nolimits_{p\in O} p^{\Sigma(p)},$$

где $\Sigma(p) = -\sum_{i\geq 0} \nu(\sigma^{-i}(p), \alpha)$. Если решение существует, то оно принадлежит кольцу $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда для любой орбиты $O \in \mathcal{O}(\alpha)$ и любого $p \in \mathcal{O}(\alpha)$: $\Sigma(p) \geq 0$.

Следствие (критерий простоты модуля W_f). *Полиномиальный $\mathcal{A}$-модуль $W_f, f \mid \sigma(a)$-простой тогда и только тогда, когда для любого необратимого $\alpha' \neq 0 \in \mathcal{D}$ такого, что $\alpha' \mid \sigma(a)$, не выполняется предыдущая лемма при $\alpha = \alpha'/f$.*

Приведем свойства полиномиальных A-модулей.

1. *W — полиномиальный A-модуль $\Leftrightarrow W \simeq W_f := \otimes_1^n W_{f_i}$ для некоторого однозначно определенного вектора $f = (f_1, \ldots f_n)$, $f_i \in K[H_i], f_i \mid \sigma_i(a_i)$, $1 \leq i \leq n$.*

2. *W_f-простой A-модуль $\Leftrightarrow W_{f_i}$-простой $\mathcal{A}_i$-модуль для любого $1 \leq i \leq n$.*

3. *Полиномиальные модули W_f и W_g изоморфны тогда и только тогда, когда $f = g$, т. е. $f_i = g_i$ для любого $1 \leq i \leq n$.*

4. *Если пространство гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_A(W_f, W_g) \neq 0$, то оно одномерно и порождается вложением $\varphi = \otimes \varphi_i$, где φ_i: $W_{f_i} \to W_{g_i}$ — вложение $\mathcal{A}_i$-модулей. Тогда $\mathrm{Hom}_A(W_f, W_g) = 0$.*

5. *Полиномиальный модуль W_f содержит наименьший (относительно включения) ненулевой подмодуль, который тоже является полиномиальным модулем W_g, где W_{g_i} — наименьший подмодуль в W_{f_i} для любого i.*

6. *Любой полиномиальный модуль неразложим и имеет конечную длину.*

Доказательство. 1. Следует из соотношений $Y_iX_i = a_i$ и $X_iY_i = \sigma_i(a_i)$ и факториальности кольца многочленов над полем.

2. Является следствием теоремы 7.

5. Достаточно показать, что для любого $w \neq 0 \in W_f$ подмодуль Au содержит ненулевой элемент вида $\otimes u_i$, где $u_i \in W_{f_i}$. Аналогично доказательству теоремы 7 (случай 1) представим w в виде (2):

$$w = \sum_1^m u_j \otimes w_j,\quad u_j \in W_{f_1},\quad w_j \in \bigotimes_2^n W_{f_k}.$$

Поскольку ядро оператора $b = \sigma_1(u_1)f_1 - u_1X_1$ в пространстве W_{f_1} равно Ku_1, то в силу условий i), ii) $bw = \sum_2^m bu_j \otimes w_j \neq 0$ и доказательство завершаем индукцией по m и n.

6. Поскольку полиномиальный модуль не имеет D-кручения, то любой ненулевой гомоморфизм полиномиальных модулей является вложением, следовательно, полиномиальный модуль неразложим, а конечность длины следует из свойства П1 и теоремы 7.

4. Так как W_f-модуль конечной длины и без D-кручения, то его кольцо эндоморфизмов является телом T над полем K. В силу алгебраической замкнутости поля K и конечнопорожденности алгебры A $T = K$.

3. Следует из свойств 4 и П4′.

Исторически первыми примерами полиномиальных модулей являются A_n-модули $W_\lambda \simeq A_n / A_n(\partial_1 - \lambda_1, \ldots, \partial_n - \lambda_n) = (K[X_1, \ldots, X_n],\ (\partial_i - \lambda_i)(F) = \partial F / \partial X_i$ — формальная производная, $X_i(F) = X_iF$ — умножение), $\lambda = (\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_n \neq 0) \in K^n$ и простые $\mathrm{sl}(2)$-модули Уиттеккера $W_\lambda(\mu)$, $\mu \neq 0$, $\lambda \in K$ [9], пространство представления которых равно кольцу многочленов

$$K[h]:\ Hh^n = h^{n+1},\ Xh^n = \mu(h-1)^n,\ Yh^n = -\mu^{-1}(h+1)^n(h-\lambda)(h+\lambda+1),\quad n \geq 0.$$

Другие примеры полиномиальных $\mathrm{sl}(2)$-модулей приведены в [10]. Е. К. Склянин [11], в частности, рассматривал конечномерные A-модули, реализуя их как фактор-модуль полиномиального.

11. Модульная структура A. Стаффорд [12] поставил вопрос о нахождении более широкого класса колец, чем алгебры Вейля над полем характеристики нуль, для которых верны результаты, изложенные в § 3 из [12]. Оказывается, примером такого класса колец могут быть простые обобщенные алгебры Вейля, рассматриваемые в данной работе. Прежде чем сформулировать результаты, приведем одно определение.

Пусть R — нетерова область с телом частных Q и M — конечнопорожденный левый R-модуль. Определим ранг модуля M так: $\operatorname{rank} M = s$: $Q \otimes_R M \simeq Q^{(s)}$.

Теорема 9. *Пусть обобщенная алгебра Вейля A-проста. Тогда*

1. *Любой правый идеал из A порождается двумя элементами. Более того, если правый идеал $I = aA + bA + cA$ и $d \neq 0 \in A$, то существуют f и $g \in A$ такие, что $I = (a + cfd)A + (b + cgd)A$.*

2. *Любой конечнопорожденный A-модуль M изоморфный $N \oplus A^{(s)}$, где модуль N имеет ранг ≤ 1.*

3. *Пусть M — конечнопорожденный A-модуль, $\operatorname{rank} M \geq 2$. Предположим, что $M \oplus A \simeq N \oplus A$ для некоторого A-модуля N. Тогда $M \simeq N$.*

Пусть $\mathcal{A}_1 := K[H_1](\sigma_1,\ a_1)$ — ОАВ степени 1 и $\mathcal{B}_1$ — локализация $\mathcal{A}_1$ из п. 3. Если $L \supset K$ — расширение поля K, то обозначим $\mathcal{A}_1(L) = L \otimes \mathcal{A}_1$.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{A}_1$ — простая алгебра, $b_1, \ldots, b_r \in \mathcal{A}_1$ — линейно независимые над K элементы. Пусть $S = \mathcal{A}_1$ либо $\mathcal{B}_1$ и выберем $t \neq 0 \in S$. Тогда $\mathcal{A}_1(b_1, \ldots, b_r)tS = S^{(r)}$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $S = \mathcal{A}_1$ и $t = 1$. Для достаточно большого натурального s: $b_iX^s \in K\langle H, X\rangle$ для всех i, поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что эти включения выполняются. Если α — многочлен из $K[H]$ степени n, то $\sigma(\alpha)-\alpha$ имеет степень $n-1$. Отсюда существует такое натуральное m, что

$$(\operatorname{ad} X)^m(b_1, \dots, b_r) = (\lambda_1 X^{n_1}, \dots, \lambda_r X^{n_r}), \tag{3}$$

где $\lambda_i \in K$ и $(\operatorname{ad} X)u = Xu - uX$, $u \in \mathcal{A}_1$. Переобозначая b_i, если это необходимо, и делая замены вида $b_j \to \Sigma\mu_i b_i$, $\mu_i \in K$, $\mu_j = 1$ (все эти операции перестановочны с $\operatorname{ad} X$), можно считать, что $n_1 > n_2 \geq \dots$. Умножая (3) слева на Y^{n_1} и применяя $\operatorname{ad} Y$ достаточное число раз, например n раз, имеем $(\lambda Y^n, 0, \dots, 0)$ для некоторого $\lambda \neq 0 \in K$. Поскольку $\mathcal{A}_1$ — простая алгебра, то $(\mathcal{A}_1, 0, \dots, 0)$ содержится в $\mathcal{A}_1(b_1, \dots, b_r)S$. Доказательство завершается индукцией по r. Лемма доказана.

Теперь доказательство утверждений 1 – 3 дословно повторяет рассуждения Стаффорда, если под введенными в [12] кольцами $R, S, \dots$ подразумевать следующие кольца.

а). Пусть $R = A_T \supseteq A$ — локализация алгебры A по мультипликативно замкнутому множеству, порожденному $T = \{H_2, \dots, H_m\}$ для некоторого m. Определим $S = \mathcal{A}_1(K(H_2, \dots, H_m)) \supseteq U = S \cap A \supseteq \mathcal{A}_1$.

b). Пусть $R = A_T \supseteq A$, где $T = \{H_1, \dots, H_n, X_1, \dots, X_{r-1}\}$ для некоторого $r \leq n$. Если Q — полное кольцо частных подалгебры в A, порожденной множеством T, то можно написать $R = Q\langle X_r, \dots, X_n, Y_r, \dots, Y_n\rangle$. Положим $S = Q\langle X_r, Y_r\rangle = Q[X_r, X_r^{-1}; \sigma_r]$ — кольцо косых лорановских многочленов $= T_{r-1}(H_r, \dots, H_n)[X_r, X_r^{-1}; \sigma_r]$, где T_r — кольцо частных алгебры $A(r) := \otimes_1^r \mathcal{A}_i$, $U = S \cap A = A_{(r)}[H_{r+1}, \dots, H_n] \supseteq \mathcal{A}_1$.

Автор выражает благодарность Ю. М. Березанскому, Ю. А. Дрозду, Ю. С. Самойленко за полезные обсуждения и замечания.

1. *Бавула В. В.* Обобщенные алгебры Вейля и их представления: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1990. – 111 с.
2. *Бавула В. В.* Конечномерность Ext-в и Tor-в простых модулей над одним классом алгебр // Функцион. анализ и его прил. – 1991. – **25**, вып. 3. – С. 80 – 82.
3. *Бавула В. В.* Обобщенные алгебры Вейля и их представления // Алгебра и анализ. – 1992. – **4**, вып. 1. – С. 74 – 95.
4. *Бавула В. В.* Классификация простых sl(2)-модулей и конечномерность модуля расширений простых sl(2)-модулей // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 9. – С. 1174 – 1180.
5. *Björk J.E.* Rings of differential operators. – Amsterdam : North Holland, 1979. – 374 p.
6. *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Гомологическая алгебра // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ. – 1989. – **38**. – 238 с.
7. *Бернштейн И. Н.* Модули над кольцом дифференциальных операторов. Изучение фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 2. – С. 1 – 16.
8. *Бавула В. В.* Простые $D[X, Y; \sigma, a]$-модули // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 12. – С. 1628 – 1644.
9. *Block R. E.* Classification of the irreducible representations of sl (2, $\mathbb{C}$) // Bull. Amer. Math. Soc. – 1979. – **1**, № 1. – P. 247 – 250.
10. *Бавула В. В.* Вычисление H^*(sl (2), M) с коэффициентами в простом sl (2)-модуле // Функцион. анализ и его прил. – 1992. – **26**, вып. 1. – С. 46 – 47.
11. *Sklyanin E. K.* Functional Bethe Ansatz // Integrable and superintegrable system. Ed. by B. A. Kupershmidt World Sci., Singapore, 1991.
12. *Stafford J. T.* Module structure of Weyl algebras // J. London Math. Soc. – 1978. – **18**, № 2. – P. 429 – 442.

Получено 04. 07. 91