УДК 519.21

І. К. Мацак, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т легк. пром-сті, Київ),
А. М. Плічко, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

ПРО ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ЗВАЖЕНИХ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Assume that (X_n) are independent random variables in a Banach space, (b_n) is a sequence of real numbers, $S_n = \sum_1^n b_i X_i$, and $B_n = \sum_1^n b_i^2$. Under some moment restrictions imposed on the variables X_n, the conditions for the growth of the sequence (b_n) are found, which are sufficient for boundedness and precompactness of the sequence $(S_n/(B_n \ln\ln B_n)^{1/2})$ almost surely.

Нехай (X_n) — незалежні випадкові величини в банаховому просторі, (b_n) — послідовність дійсних чисел, $S_n = \sum_1^n b_i X_i$, $B_n = \sum_1^n b_i^2$. При моментних обмеженнях на величини X_n знайдені умови на ріст послідовності (b_n), достатні для обмеженості й передкомпактності послідовності $(S_n/(B_n \ln\ln B_n)^{1/2})$ майже напевно.

1. Вступ і основні результати. Нехай E — сепарабельний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і спряженим E^*. Через X_n, $n = 1, \infty$, позначимо E-значні незалежні випадкові величини (н. в. в.), задані на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ [1, с. 201; 2], b_n, $n = 1, \infty$, — послідовність дійсних чисел, $S_n = \sum_1^n b_i X_i$, $B_n = \sum_1^n b_i^2$, $L(t) = \ln t$ при $t > e$ і $L(t) = 1$ при $t \le e$, $L_2(t) = L(L(t))$, $\chi(t) = (2tL_2(t))^{1/2}$.

Будемо говорити, що послідовність $b_n X_n$ задовольняє закон повторного логарифма (ЗПЛ), якщо майже напевно (м. н.)

$$\Lambda(b, X) = \overline{\lim_n} \|S_n\| / \chi(B_n) < \infty \tag{1}$$

і м. н.

$$\{S_n/\chi(B_n),\ n \ge 1\} \quad \text{передкомпактна в } E. \tag{2}$$

При накладених в наступному абзаці умовах із закону 0 або 1 випливає, що $\Lambda(b, X)$ — невипадкова величина.

Огляд результатів і досить повну бібліографію про ЗПЛ у банахових просторах можна знайти в роботах [3–6]. У даній статті деякі відомі результати про ЗПЛ для однаково розподілених величин у банаховому просторі перенесені на зважені суми. Далі вважатимемо, що $M X_n = 0$, $D X_n = (M\|X_n\|^2)^{1/2} < \infty$, $B_n \uparrow \infty$ і $B_n / b_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Нехай $\Gamma(b, X) = \overline{\lim}_n M \|S_n\| / \chi(B_n)$, а ε_n — симетричні н. в. в. Бернуллі, $P(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$.

Теорема 1. *Нехай при деяких* $\delta > 0$ *і* $1 < p < \infty$

$$b_n^2 = O(B_n / (L(B_n))^{(1+\delta)/(p-1)}), \tag{3}$$

$$\sup_n M \|X_n\|^{2p} < \infty. \tag{4}$$

Тоді для $d = \sup_n D X_n$

$$\Gamma(b, X) \le \Lambda(b, X) \le d + \Gamma(b, X). \tag{5}$$

Наслідок 1. *Нехай* Π_N *— послідовність лінійних обмежених скінченновимірних операторів у просторі* E *і* $Q_N x = x - \Pi_N x$. *Якщо* $\Gamma(b, X) = 0$ *і*

$$\sup_n D(Q_n X_n) \to 0 \quad при \quad N \to \infty, \tag{6}$$

то в умовах теореми 1 *справедливий ЗПЛ* (1), (2).

Відзначимо один важливий частковий випадок, коли виконується умова (6). Нехай $R\colon\ E^* \to E$ — коваріаційний оператор в. в. Y, $MY = 0$, $DY < \infty$; H_R — гільбертів підпростір простору E, асоційований з R [1, с. 126], тобто поповнення $R(E^*)$ в нормі скалярного добутку $\langle Rf, Rg\rangle = Mf(Y)g(Y)$, $f, g \in E^*$. Нехай $(f_k) \subset E^*$ — тотальна на E ортогональна відносно вказаного скалярного добутку послідовність. Якщо покласти $\Pi_n x = \sum_{k=1}^{N} f_k(x) R f_k$, то $D(Q_n Y) \to 0$ при $N \to \infty$ [4, 5]. Таким чином, коли величини X_n однаково розподілені (отже мають спільний коваріаційний оператор R), то для послідовності (f_k) умова (6) виконується.

Для в. в. Y з коваріаційним оператором R покладемо

$$\sigma(R) = \sup\{|\langle Rf, f\rangle|^{1/2}\colon\ \|f\| = 1\} = \sup\{(M|f(Y)^2|)^{1/2}\colon\ \|f\| = 1\}.$$

Теорема 2. *Якщо в умовах теореми* 1 *величини* X_n *мають спільний коваріаційний оператор* R *і при деякій тотальній на* E *ортогональній послідовності* (f_k) *для величин* $Q_N X_n = X_n - \sum_{k=1}^{N} f_k(X_n) R f_k$ *виконана умова* (6), *то*

$$\max\,(\sigma(R), \Gamma(b, X)) \le \Lambda(b, X) \le \sigma(R) + \Gamma(b, X).$$

Нагадаємо, що E називається простором типу 2, коли для кожної послідовності $(x_n) \in E$ з умови $\sum_1^\infty \|x_n\|^2 < \infty$ випливає збіжність м. н. ряду $\sum_1^\infty \varepsilon_n x_n$, і простором котипу 2, коли із збіжності м. н. ряду $\sum_1^\infty \varepsilon_n x_n$ випливає $\sum_1^\infty \|x_n\|^2 < \infty$ [1, с. 251].

***Наслідок* 2.** *Якщо* E — *простір типу* 2, *то в умовах теореми* 1 *виконується співвідношення* (1), *точніше* $\Lambda(b, X) \le d$, *а в умовах теореми* 2 *виконується ЗПЛ* (1), (2) *і* $\Lambda(b, X) = \sigma(R)$.

Нагадаємо, що коваріаційний оператор R називається гауссівським, коли існує гауссівська в. в. $G(R)$, яка має R своїм коваріаційним оператором.

***Наслідок* 3.** *Якщо* E — *простір котипу* 2, *а в умовах теореми* 2 *оператор* R *гауссівський, то справедливий ЗПЛ* (1), (2) *і* $\Lambda(b, X) = \sigma(R)$.

Для однаково розподілених н. в. в. X_n умову (3) можна трохи послабити. Покладемо $\psi(t) = t / L_2(t)$.

Теорема 3. *Нехай* R — *коваріаційний оператор* X_1, *н. в. в.* X_n *однаково розподілені, виконана умова* (4) *і*

$$b_n^2 = O(\psi(B_n)\, n^{-1/p}). \tag{7}$$

Тоді вірна теорема 2 *і при* $\Gamma(b, X) = 0$ *ЗПЛ* (1), (2).

Теорема 4. *Нехай н. в. в.* X_n *однаково розподілені і симетричні, а* E — *простір типу* 2. *Для справедливості ЗПЛ* (1), (2) *і рівності* $\Lambda(b, X) = \sigma(R)$ *достатня будь-яка із наступних груп умов*:

i) $b_n^2 \downarrow$ *при* $n \uparrow \infty$ *і*

$$b_n^2 = o(\psi(B_n)); \tag{8}$$

ii) *для деякого* $1 < p < \infty$ *виконана умова* (4),

$$b_n^2 \uparrow, \quad B_n / b_n^2 \uparrow \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{9}$$

$$b_n^2 = O(B_n / (L(B_n))^{1/(p-1)}); \tag{10}$$

iii) *виконані умови* (8), (9) *та існує таке* $h > 0$, *що*

$$M \exp(h \| X_1 \|) < \infty.$$

2. ЗПЛ в R^1. Нехай (ξ_n) — послідовність н. в. в. в R^1, $M\,\xi_n = 0$, $D\,\xi_n = 1$, $Z_n = \sum_1^n b_i \xi_i$. Під ЗПЛ в R^1 звичайно розуміють виконання м. н. рівностей

$$\overline{\lim_n}\, Z_n / \chi(B_n) = 1, \tag{11}$$

$$\underline{\lim_n}\, Z_n / \chi(B_n) = -1. \tag{12}$$

Твердження 1. *Для справедливості ЗПЛ* (11), (12) *достатні умови* (3), (4) (*при* $E = R^1$, $X_n = \xi_n$).

Твердження 2. *Нехай н. в. в.* (ξ_n) *однаково розподілені й виконуються умови* (4), (7) (*при* $E = R^1$, $X_n = \xi_n$). *Тоді справедливий ЗПЛ* (11), (12).

Твердження 3. *Нехай н. в. в.* (ξ_n) *однаково розподілені і симетричні. Для справедливості ЗПЛ* (11), (12) *достатня будь-яка з груп умов* i)–iii) *теореми* 4 (*при* $E = R^1$, $X_n = \xi_n$).

***Зауваження* 1.** Умови виконання ЗПЛ в R^1 розглядались у багатьох роботах (див., наприклад, [6 – 8]). У [9] вивчались зважені суми однаково розподілених н. в. в. в R^1 і при $1 \le p < 3/2$ накладалась умова, трохи слабкіша ніж (7).

Лема 1. *Нехай* $I\{A\}$ — *характеристична функція множини* A. *Якщо для будь-якого* $\tau > 0$

$$\sum_n P(|b_n \xi_n| > \tau\, \psi(B_n)^{1/2}) < \infty, \tag{13}$$

$$\lim_{n \to \infty} B_n^{-1} \sum_{i=1}^n b_i^2 M(\xi_i^2 I\{|b_i \xi_i| > \tau\, \psi(B_i)^{1/2}\}) = 0, \tag{14}$$

то послідовність Z_n *задовольняє ЗПЛ* (11), (12).

Лема 2. *В умовах твердження* 3 *при виконанні будь-якої з груп умов* i)–iii) *маємо м. н.* $\lim_{n \to \infty} B_n^{-1} \sum_{i=1}^n b_i^2 \xi_i^2 = 1$.

Лема 1 є наслідком класичного ЗПЛ Колмогорова [7, 10]. Лема 2 випливає з результатів [11].

***Доведення твердження* 1.** Досить встановити співвідношення (13), (14). Маємо

$$P(|b_n \xi_n| > \tau\, \psi(B_n)^{1/2}) \le M |\xi_n b_n|^{2p} / \tau^{2p} \psi(B_n)^p \le C b_n^{2p} / \tau^{2p} \psi(B_n)^p.$$

З умови (3) випливає, що при досить великих n $b_n^{2p} / \psi(B_n)^p \le C_1 b_n^2 / B_n \times \times L(B_n)^{1+\delta/2}$. Оскільки ряд $\sum_n b_n^2 / B_n L(B_n)^{1+\delta/2}$ збігається [7, с. 339], то умова (13) виконується. Застосування нерівності Гельдера дає

$$M(\xi_i^2 I\{|b_i \xi_i| > \tau\, \psi(B_n)^{1/2}\}) \le (M|\xi_i|^{2p})^{1/p} (P(|b_i \xi_i| > \tau\, \psi(B_i)^{1/2}))^{1/q},$$

де $1/p + 1/q = 1$. Звідси і з співвідношень (4), (13) випливає (14).

***Доведення твердження* 2** аналогічне:

$$\sum_n P(|b_n \xi_n| > \tau \psi(B_n)^{1/2}) \le \sum_n P(|\xi_n| > C \tau n^{1/p}) < \infty.$$

Збіжність другого ряду при умові (4) і однаковій розподіленості величин добре відома.

***Доведення твердження* 3.** Скористаємось наступною відомою нерівністю [12]:

$$\overline{\lim}_n \sum_1^n a_i \varepsilon_i / \chi(A_n) \le 1 \text{ м. н.}$$

для $A_n = \sum_1^n a_i^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Для симетричних н. в. в. з неї отримуємо

$$\overline{\lim_n} \sum_1^n b_i \xi_i / \chi(A_n(\xi)) \le 1 \quad \text{м. н.}, \tag{15}$$

якщо м. н.

$$A_n(\xi) = \sum_1^n b_i^2 \xi_i^2 \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Розбіжність ряду $\sum_n b_n^2 \xi_n^2$ в умовах твердження 3 випливає з рівностей [13, с. 53]

$$\sum_n M \min(1, b_n^2 \xi_n^2) = \sum_n (P(b_n^2 \xi_n^2 < 1) + b_n^2 M(\xi_n^2 I\{b_n^2 \xi_n^2 \ge 1\})) = \infty.$$

Нерівність (15) і лема 2 приводять до оцінки

$$\overline{\lim_n} Z_n / \chi(B_n) \le 1 \quad \text{м. н.} \tag{16}$$

У твердженні 3 припускається виконаною умова (8), з якої з урахуванням однакової розподіленості величин ξ_n негайно одержуємо (14). Відомо [14], що з (14) випливає нерівність $\overline{\lim}_n Z_n / \chi(B_n) \ge 1$ м. н. Звідси з урахуванням (16) випливає рівність (11). Рівність (12) одержуємо з (11), переходячи до величин $-\xi_i$.

Наступне допоміжне твердження міститься в доведенні леми 3 роботи [15].

Лема 3. *Нехай* (ζ_n) — *послідовність в. в. в* R^1 *і* A_n — *дійсна послідовність,* $A_n \uparrow \infty$ *при* $n \to \infty$. *Якщо для деяких* $C > 0$, $\beta > 1$, n_0 *і всіх* $t \in (1, \beta)$ $P(\max_{1 \le k \le n} \zeta_k \ge t\chi(A_n)) \le CL(A_n)^{-t^2}$ *при* $n > n_0$, *то м. н.* $\overline{\lim}_n \zeta_n / \chi(A_n) \le 1$.

3. Доведення теорем 1 – 4.

***Доведення теореми* 1.** Зафіксуємо довільне число $0 < \tau < 1/2$ і покладемо

$$X_n' = I\{\|b_n X_n\| \le \tau d \psi(B_n)^{1/2}\} X_n, \quad X_n'' = X_n - X_n'; \quad S_n' = \sum_1^n b_i X_i', \quad S_n'' = S_n - S_n'.$$

Для оцінки величини $\|S_n'\|$ нам потрібен нескінченновимірний аналог відомої експоненціальної нерівності Бернштейна [16]:

$$P\left(\left\| \sum_1^n Y_i \right\| - M \left\| \sum_1^n Y_i \right\| \ge u \right) \le \exp(-u^2 / (2B + 2uV)), \tag{17}$$

де (Y_i) — н. в. в. в E, $u > 0$, $B \ge \sum_1^n M\|Y_i\|^2$, а $V > 0$ таке, що $M\|Y_i\|^m \le$ $\le m!\, M\|Y_i\|^2 V^{m-2}/2$ при $m = 2, 3, \ldots$.

Крім того, користуватимемось наступними нерівностями для н. в. в. (Y_i) в E [16, 17]:

$$P\left(\sup_{1\le k\le n}\Big\|\sum_{i=1}^{k} Y_i\Big\| > t\right) \le 2P\left(\Big\|\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big\| > t - \left(\sum_{i=1}^{n} M\|Y_i\|^2\right)^{1/2}\right) \tag{18}$$

при $MY_i = 0$,

$$M\left|\Big\|\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big\| - M\Big\|\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big\|\right|^2 \le \sum_{i=1}^{n} M\|Y_i\|^2. \tag{19}$$

З означення X_n'' маємо

$$\sum_n P(X_n'' \ne 0) \le \sum_n (b_n/\tau d)^{2p} M\|X_n\|^{2p}\psi(B_n)^{-p} < \infty.$$

Остання нерівність при умові (4) встановлена при доведенні твердження 1. Тоді, за лемою Бореля – Кантеллі

$$\sup_n \|S_n''\| = S < \infty \quad \text{м. н.} \tag{20}$$

Отже, для доведення правої нерівності в (5) досить встановити оцінку

$$\overline{\lim_n}\, \|S_n'\|/\chi(B_n) \le d + \Gamma(b, X). \tag{21}$$

Застосовуючи оцінки (19), (20), одержуємо

$$\frac{1}{2} \ge P(|\,\|S_n''\| - M\|S_n''\|\,| \ge \sqrt{2}\, B_n^{1/2}) \ge P(M\|S_n''\|B_n^{-1/2} \ge \|S_n''\|B_n^{-1/2} + \sqrt{2}) \ge$$

$$\ge P(M\|S_n''\|B_n^{-1/2} \ge SB_n^{-1/2} + \sqrt{2}).$$

Звідси і з (20) випливає

$$M\|S_n''\| \le CB_n^{1/2}. \tag{22}$$

Далі покладаємо в (17) $Y_i = b_i X_i'$, $B = d^2 B_n$, $V = \tau d\psi(B_n)^{1/2}$; тоді

$$P(\|S_n'\| - M\|S_n'\| > u) \le \exp\left(-u^2/[2B_n d^2 + 2u\tau d\psi(B_n)^{1/2}]\right).$$

Підставляючи сюди $u = vd(1+2\tau)^{1/2}\chi(B_n)$ при $v \in (1+\beta)$, $\beta = (2/(1+$ $+ 2\tau))^{1/2}$, маємо

$$P(\|S_n'\| - M\|S_n'\| \ge vd(1+2\tau)^{1/2}\chi(B_n)) \le L(B_n)^{-V^2}. \tag{23}$$

При фіксованому τ для досить великих n

$$M\|S_n\| \le (\Gamma(b, X) + \tau)\,\chi(B_n). \tag{24}$$

Оскільки $|M\|S_n\| - M\|S_n'\|\,| \le M\|S_n''\|$, то з оцінок (22)–(24) при досить великих n і $v \in (1, \beta)$ маємо

$$P(\|S_n'\| \ge [\Gamma(b, X) + 2\tau + vd(1+2\tau)^{1/2}]\,\chi(B_n)) \le L(B_n)^{-v^2}. \tag{25}$$

Оскільки $MS_n' + MS_n'' = MS_n = 0$, то

$$M\|S_n'\| \le M\|S_n''\| \le CB_n^{1/2}. \tag{26}$$

З оцінок (18), (25) і (26) випливає, що при досить великих n і $v \in (1, \beta)$

$$P\left(\sup_{1\le k\le n}\|S_k' - MS_k'\| \ge\right.$$

$$\left.\ge v\,[\Gamma(b, X) + 4\tau + d(1+2\tau)^{1/2}]\,\chi(B_n)\right) \le L(B_n)^{-v^2}.$$

Застосовуючи лему 3, одержуємо нерівність

$$\overline{\lim}_n \| S'_n - MS'_n \| / \chi(B_n) \le \Gamma(b, X) + 4\tau + d(1 + 2\tau)^{1/2}$$

м. н. Але τ — довільне число з інтервалу $(0, 1/2)$, тому

$$\overline{\lim}_n \| S'_n - MS'_n \| / \chi(B_n) \le d + \Gamma(b, X) \text{ м. н.}$$

Звідси і з (26) випливає (21), тобто права нерівність в (5) встановлена. Ліва нерівність в (5) випливає з леми Фату (див. [5]).

***Доведення наслідку* 1.** З рівності $\Gamma(b, X) = 0$ та з (5) випливає (1), а також (враховуючи, що в скінченновимірному просторі $\Pi_N E$

$$\Gamma(b, \Pi_N X) = 0, \tag{27}$$

а тому й $\Gamma(b, Q_N X) = 0$)

$$\Lambda(b, X) \le \Lambda(b, \Pi_N X) + \Lambda(b, Q_N X) \le \sup_n D(\Pi_N X_n) + \sup_n D(Q_N X_n).$$

Внаслідок (6) другий доданок прямує до 0 при $N \to \infty$, а перший (враховуючи (4)) для кожного N менший від ∞. Тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина $\{S_n / \chi(B_n), n \ge 1\}$ покривається м. н. скінченною кількістю куль радіуса ε, отже, передкомпактна.

***Доведення теореми* 2.** Ліва нерівність теореми є наслідком ЗПЛ в R^1 (твердження 1) і леми Фату. Для доведення правої попередньо встановимо рівність $\Lambda(b, X) = \sigma(R)$ у скінченновимірному випадку ($E = R^m$).

Внаслідок лівої нерівності теореми досить показати, що $T = \Lambda(b, X) \le \sigma(R)$. З твердження 1 маємо $T < \infty$. У наших умовах із закону 0 або 1 випливає (див. [3–5]) існування такої вимірної підмножини $\Omega_c \subset \Omega$, що $P(\Omega_c) = 1$ і $\overline{\lim}_n \| S_n(\omega) \| / \chi(B_n) = T$ при $\omega \in \Omega_c$. Оскільки в R^m обмежена множина передкомпактна, то для кожного $\omega \in \Omega_c$ існують (випадкові) послідовність n_k і точка x, для яких

$$\lim_k \| S_{n_k}(\omega) \| / \chi(B_{n_k}) = T \quad \text{і} \quad \lim_k \| S_{n_k}(\omega) / \chi(B_{n_k}) - x \| = 0,$$

отже $\| x \| = T$. Згідно з твердженням 1 для будь-якого $f \in E^*$, $\|f\| = 1$ маємо

$$(M |f(X_1)|^2)^{1/2} = \overline{\lim}_n f(S_n) / \chi(B_n) \ge \lim_k f(S_{n_k}) / \chi(B_{n_k}) \ge f(x).$$

Тоді

$$\sigma(R) = \sup \{ (M |f(X_1)|^2)^{1/2} : \|f\| = 1 \} \ge \sup \{ |f(x)| : \|f\| = 1 \} \ge \| x \| = T.$$

Таким чином, для будь-якого N $\Lambda(b, \Pi_N X) = \sigma(R_N)$, де R_N — (спільний) коваріаційний оператор величин $\Pi_N X_n$. З останньої рівності та (5) маємо

$$\Lambda(b, X) \le \Lambda(b, \Pi_N X) + \Lambda(b, Q_N X) \le \sigma(R_N) + \sup_n D(Q_N X_n) + \Gamma(b, Q_N X).$$

Оскільки $\sigma(R_N) \le \sigma(R)$ [5] і внаслідок (27) $\Gamma(b, Q_N X) = \Gamma(b, X)$, то, переходячи до границі по N та використовуючи (6), одержуємо праву нерівність теореми.

У просторі типу 2 $M \| S_n \|^2 \le C(E)\, d^2 B_n$, а в просторі котипу 2

$$M \| S_n \|^2 \le C(E)\, M \| G(R) \|^2 B_n \ [2].$$

Отже, в обох випадках $\Gamma(b, N) = 0$. Ця рівність забезпечує справедливість наслідків 2, 3.

***Доведення теореми* 3** аналогічне доведенню теореми 2 (перехід від умов (3) до (7) міститься в доведенні твердження 2).

***Доведення теореми* 4.** Згідно з ЗПЛ в R^1 (твердження 3), для кожного $f \in E^*$ м. н.

$$\overline{\lim_n} f(S_n)/\chi(B_n) = (M|f(X_1)|^2)^{1/2}. \tag{28}$$

Тоді для будь-якого N м. н.

$$\Lambda(b, \Pi_N X) = \sigma(R_N) \tag{29}$$

(див. доведення теореми 2).

У просторі типу 2 для симетричних н. в. в. (X_n)

$$\overline{\lim_n} \|S_n\| / \chi\Big(\sum_1^n b_i^2 \|X_i\|^2 \Big) \le C < \infty \quad \text{м. н.} \tag{30}$$

при

$$\sum_1^n b_i^2 \|X_i\|^2 \uparrow \infty, \quad n \to \infty \quad \text{м. н.} \tag{31}$$

(див. [15]; справедливість умови (31) встановлена у твердженні 3).

Із леми 2 та оцінки (30) випливає $\Lambda(b, X) \le Cd$. Далі повторюються аргументи доведення теореми 2 з використаниям цієї нерівності та (29).

***Зауваження* 2.** Нехай K — одинична куля гільбертового простору H_R. Відомо [3], що коли виконані співвідношення (2), (28) (зокрема, вони виконані в умовах теорем 2–4 при $\Gamma(b, X) = 0$), то м. н. $\inf\{\| S_n/\chi(B_n) - x \| : x \in K\} \to 0$ при $n \to \infty$, а коли додатково H_R — нескінченновимірний простір, то м. н. $C(\{S_n/\chi(B_n)\}) = K$, де $C(\{x_n\})$ — множина граничних точок послідовності $\{x_n\}$.

1. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
2. *Araujo A., Gine E.* The central limit theorem for real and Banach valued random variables. – New York : Wiley, 1980. – 233 p.
3. *Kuelbs J.* A strong convergence theorem for Banach space valued random variables // Ann. Probab. – 1976. – **4**, № 5. – P. 744–771.
4. *Goodman V., Kuelbs J., Zinn J.* Some results on the LIL in Banach space with applications to weighted empirical processes // Ibid. – 1981. – **9**, № 5. – P. 713–752.
5. *Acosta A., Kuelbs J., Ledoux M.* An inequality for the law of the iterated logarithm // Lect. Notes Math. – 1983. – **990**. – P. 1–29.
6. *Bingam N. H.* Variants on the law of the iterated logarithm // Bull. London Math. Soc. – 1986. – **18**, № 5. – P. 433–467.
7. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 414 с.
8. *Мартикайнен А. И., Петров В. В.* О необходимых и достаточных условиях для закона повторного логарифма // Теория вероятностей и ее применения. – 1977. – **22**, вып. 1. – С. 18–26.
9. *Клесов О. И.* Закон повторного логарифма для взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин // Там же. – 1986. – **31**, вып. 2. – С. 389–391.
10. *Tomkins R. J.* Lindeberg functions and the law of the iterated logarithm // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1983. – **65**, № 1. – P. 135–143.
11. *Мацак И. К.* О суммировании независимых случайных величин методом Рисса // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 641–647.
12. *Weiss M.* On the law of the iterated logarithm // J. Math. Mech. – 1959. – **8**, № 2. – P. 121–132.
13. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. – М.: Мир, 1973. – 304 с.
14. *Мартикайнен А. И.* Об одностороннем законе повторного логарифма // Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – **30**, вып. 4. – С. 694–705.
15. *Мацак И. К., Пличко А. Н.* Неравенства Хинчина и асимптотическое поведение сумм $\sum \varepsilon_n x_n$ в банаховых решетках // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 639–644.
16. *Пинелис И. Ф., Саханенко А. И.* Замечания о неравенствах для вероятностей больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – **30**, вып.1. – С. 127–131.
17. *Саханенко А. И.* О неравенствах Леви – Колмогорова для случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Там же. – 1984. – **29**, вып. 4. – С. 793–799.

Одержано 02. 04. 91