УДК 539.3:51

В. П. Орлов, канд. физ.-мат. наук (Воронеж. ун-т)

УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

It is proved that a one-dimensional physical-linear mathematical model of thermoelasticity is Lyapunov stable. For this purpose, the convergent iteration process is constructed, which consists in successive solving hyperbolic and parabolic problems by using new estimates of the solution of a mixed problem for the wave equation.

Для одновимірної фізично лінійної математичної моделі термопружності встановлена стійкість за Ляпуновим. Для доведення побудовано збіжний ітераційний процес, який полягає у послідовному розв'язанні гіперболічної та параболічної задач, з використанням нових оцінок розв'язку мішаної задачі для хвильового рівняння.

1. Введение. Рассматривается начально-граничная задача

$$u''_{tt} - u''_{xx} - \theta'_x = f(t,x), \quad 0 \le t < +\infty, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u'_t(0,x) = u_1(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad 0 \le t < +\infty, \tag{3}$$

$$\theta'_t - [(1+u'_x)^{-1}\theta'_x]'_x - u''_{tx}\theta = \varphi(t,x), \quad 0 \le t < +\infty, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4}$$

$$\theta(0,x) = \theta_0(x), \quad 0 \le x \le \pi; \quad \theta(t,0) = \theta(t,\pi) = 0, \quad 0 \le t < +\infty, \tag{5}$$

описывающая в лагранжевых координатах движение одномерного термоупругого континуума. В работе [1] установлена локальная разрешимость задачи (1) – (5) в различных функциональных пространствах. В настоящей работе доказывается устойчивость по Ляпунову нулевого решения задачи (1) – (5) и, следовательно, ее нелокальная разрешимость при "малых" начальных данных и правых частях.

Применение схемы работы [1] потребовало оценки производных решения начально-граничной задачи для волнового уравнения. При этом в отличие от известных результатов (см., например, [2, 3]), требующих от правой части задачи дифференцируемости по t или дифференцируемости по x вместе с удовлетворением граничным условиям, мы требуем лишь дифференцируемости по x. Получение требуемых оценок опирается на новую формулу для решения задачи, являющуюся обобщением полученной в [1] для случая $0 \le t < \pi/2$.

2. Формулировка результатов. Обозначим через W_q^α банахово пространство функций, имеющих на $[0,\pi]$ обобщенные производные порядка $\alpha > 0$ (α не обязательно целое), суммируемые со степенью $q \in (1,+\infty)$, а через $W_q^{m,n}$ — банахово пространство определенных на $Q = \{(t,x): 0 \le t < +\infty, 0 \le x \le \pi\}$ функций, имеющих на Q обобщенные производные по t до порядка m и обобщенные производные по x до порядка n, суммируемые со степенью $q \in (1,+\infty)$ [4]. Норму в W_q^α будем обозначать $|\cdot|_\alpha$ ($|\cdot|_0$ обозначает норму в $L_q[0,\pi]$), норму в $W_q^{m,n}$ — $\|\cdot\|_{m,n}$, норму в $L_q(Q)$ — $\|\cdot\|_0$. Наряду с пространствами $W_q^{m,n}$ будем рассматривать весовые пространства $W_{q,*}^{m,n}$, т. е. пространства функций $u(t,x)$ таких, что $\tilde{u}(t,x) = \exp(\gamma t)u(t,x) \in W_q^{m,n}$. Норма в $W_{q,*}^{m,n}$ задается формулой

$$\|u(t,x)\|_{m,n,*} = \|\exp(\gamma t)\,u(t,x)\|_{m,n}. \tag{6}$$

Наконец, нам понадобится банахово пространство $CL \equiv C([0,\infty] : L_q[0,\pi])$ с нормой

$$\|\varphi\|_{CL} = \sup_{t\ge 0} |u(t,x)|_0.$$

Решением задачи (1) – (5) назовем пару функций $u(t,x)$, $\theta(t,x)$ таких, что $\theta \in W^{1,2}_{q,*}$, все производные $u(t,x)$ до порядка два включительно принадлежат CL, $u(t,x)$ и $\theta(t,x)$ удовлетворяют уравнениям и условиям (1) – (5).

Теорема 1. *Пусть* $3 < q < +\infty$, $0 < \gamma < 1$, $\varphi, f, f'_x \in L_{q,*}$ *и, кроме того,* $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}^2_q$, $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_q$, $\theta_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{2-2/q}_q$,

$$1 + u'_0(x) > 0. \tag{7}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что при условии*

$$\max(\|f\|_*, \|f'_x\|_*, |u_0|_2, |u_1|_1, \|\varphi\|_*, |\theta_0|_{2-2/q}) < \delta \tag{8}$$

задача (1) – (5) *однозначно разрешима, и справедливы оценки*

$$\|u''_{xx}\|_{CL} + \|u''_{tx}\|_{CL} + \|u''_{tt}\|_{CL} \le \varepsilon, \tag{9}$$

$$\|\theta\|_{1,2,*} + \sup_{t\ge 0} |\exp(\gamma t)\theta(t,x)|_{2-2/q} \le \varepsilon. \tag{10}$$

3. ***Доказательство теоремы* 1.** Рассмотрим сначала гиперболическую задачу

$$u''_{tt} - u''_{xx} = f(t,x), \quad (t,x) \in Q; \tag{11}$$

$$\begin{gathered} u(0,x) = u_0(x), \quad u'_t(0,x) = u_1(x), \quad 0 \le x \le \pi; \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad 0 \le t < +\infty. \end{gathered} \tag{12}$$

Лемма 1. *Пусть* f, u_0, u_1, γ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда задача* (11), (12) *однозначно разрешима и справедливы оценки*

$$\|u''_{tx}\|_{CL} \le M\mathfrak{M}, \tag{13}$$

$$\|u''_{xx}\|_{CL} \le M\mathfrak{M}, \tag{14}$$

$$\|u''_{tt}\|_{CL} \le M\mathfrak{M}, \tag{15}$$

$$\|u'_x\|_{CL} \le M\mathfrak{M}, \tag{16}$$

где

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}(u_0, u_1, f) = |u_0|_2 + |u_1|_1 + \|f\|_* + \|f'_x\|_*.$$

Здесь и далее M в неравенствах или в цепочке неравенств обозначает, вообще говоря, разные константы.

Перейдем к параболической задаче (4), (5). Вначале рассмотрим более простую задачу

$$\begin{gathered} \theta'_t - \theta''_{xx} = w(t,x), \quad (t,x) \in Q, \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \quad \theta(t,0) = \theta(t,\pi) = 0, \quad 0 \le t < +\infty. \end{gathered} \tag{17}$$

Используя результаты работ [5, 6], можно показать, что эта задача однозначно разрешима в $L_{q,*}$ при $\gamma < 1$, и для ее решения справедливо неравенство

$$\|\theta\|_{1,2,*} + \sup_{t\ge 0} |\exp(\gamma t)\,\theta(t,x)|_{2-2/q} \le M(\|w\|_* + |\theta_0|_{2-2/q}), \tag{18}$$

где M не зависит от θ_0 и w.

Для этого достаточно заметить, что изучение задачи (17) в $L_{q,*}$ с помощью замены $\tilde\theta = \exp(\gamma t)\,\theta$ сводится к изучению в L_q задачи

$$\tilde\theta'_t - \tilde\theta''_{xx} - \gamma\tilde\theta = \tilde w(t,x) \quad (\tilde w = \exp(\gamma t)\,w), \quad (t,x)\in Q,$$

$$\tilde\theta(0,x) = \theta_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \quad \tilde\theta(t,0) = \tilde\theta(t,\pi) = 0, \quad 0 \le t < +\infty,$$

а спектр действующего в $L_q[0,\pi]$ оператора $A\theta = -\theta''_{xx}$ с $D(A) = \mathring{W}_q^2$ состоит из чисел $\lambda_k = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. [7]).

С помощью (18) доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi, \theta_0, \gamma$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Пусть, кроме того,* u'_x, u''_{xx}, u''_{tx} *принадлежат* CL. *Тогда найдется достаточно малое* $\delta > 0$ *такое, что при*

$$\max(\|u'_x\|_{CL}, \|u''_{xx}\|_{CL}, \|u''_{tx}\|_{CL}) \le \delta \tag{19}$$

задача (4), (5) *однозначно разрешима, и справедлива оценка*

$$\|\theta\|_{1,2,*} + \sup_{t\ge 0} |\exp(\gamma t)\,\theta'_x|_{2-2/q} \le M(\|\varphi\|_* + |\theta_0|_{2-2/q}), \tag{20}$$

где M *не зависит от* φ *и* θ_0.

Доказательства лемм 1, 2 приведены в п. 4.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть

$$S_R = \{z : z \in W^{1,2}_{q,*},\ \|z\|_{1,2,*} \le R\}.$$

Возьмем произвольную $\theta^1 \in S_R$ и поставим в соответствие ей решение u (если оно существует) задачи (1) – (3). Затем поставим в соответствие u решение θ задачи (4), (5) (если оно тоже существует). Тем самым на S_R определяется оператор $\theta = \mathfrak{N}(\theta^1)$. Покажем, что при любом достаточно малом $R > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при выполнении условия (8) оператор $\mathfrak{N}$ имеет единственную неподвижную точку θ на S_R. Тогда пара функций θ и u, где u — решение задачи (1) – (3) при данном θ, является решением задачи (1) – (5).

Покажем сначала, что оператор $\mathfrak{N}$ определен на всем S_R. Рассмотрим гиперболическую задачу (1) – (3) при некоторой $\theta \in S_R$. Из леммы 1 и неравенства (8) вытекает ее однозначная разрешимость и оценка

$$\begin{gathered}\|u''_{xx}\|_{CL} + \|u''_{tx}\|_{CL} + \|u''_{tt}\|_{CL} + \sup_{(t,x)\in Q} |u'_x(t,x)| \le \\ \le M\,\mathfrak{M}(f-\theta'_x, u_0, u_1) \le M(\|\theta\|_{1,2,*} + \|f\|_{0,1,*} + |u_0|_2 + |u_1|_1) \le M(R+\delta).\end{gathered} \tag{21}$$

Рассмотрим теперь параболическую задачу (4), (5) при полученном значении $u(t,x)$. Для ее разрешимости воспользуемся леммой 2. Из оценки (21) вытекает, что при достаточно малых R и δ выполняется условие леммы 2 на $u(t,x)$. Следовательно, задача (4), (5) однозначно разрешима, и для ее решения справедлива оценка

$$\|\theta\|_{1,2,*} + \sup_{t\ge 0} |\exp(\gamma t)\,\theta(t,x)|_{2-2/q} \le M(\|\varphi\|_* + |\theta_0|_{2-2/q}). \tag{22}$$

Отсюда в силу (8) следует, что $\|\theta\|_{1,2,*} \le R$ при достаточно малом δ, и, следовательно, оператор $\mathfrak{N}$ определен на S_R и переводит S_R в себя.

Покажем теперь, что на S_R оператор $\mathfrak{N}$ является сжимающим. Пусть $\overline{\theta}$, $\overline{\overline{\theta}} \in S_R$, $\overline{u}$, $\overline{\overline{u}}$ — соответствующие решения задачи (1) – (3), а $\hat{\theta}$ и $\check{\theta}$ — решения задачи (4), (5) при $\overline{u}$ и $\overline{\overline{u}}$ соответственно. Тогда

$$\begin{gathered} u''_{tt} - u''_{xx} = \overline{\theta}'_x - \overline{\overline{\theta}}'_x, \\ u(0,x) = u'_t(0,x) = 0, \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \theta'_t - \theta''_{xx} = -[\overline{u}'_x(1+\overline{u}'_x)^{-1}\hat{\theta}'_x]'_x + [\overline{\overline{u}}'_x(1+\overline{\overline{u}}'_x)^{-1}\check{\theta}'_x]'_x + \hat{\theta}\overline{u}''_{tx} - \check{\theta}\overline{\overline{u}}''_{tx}, \\ \theta(0,x) = 0, \quad \theta(t,0) = \theta(t,\pi) = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Здесь

$$\theta = \hat{\theta} - \check{\theta}, \quad u = \overline{u} - \overline{\overline{u}}. \tag{25}$$

Из леммы 1 вытекает, что для решения $u(t,x)$ задачи (23) справедливы оценки

$$\begin{gathered} \sup_{t,x} |u'_x(t,x)| \le M\|\overline{\theta} - \overline{\overline{\theta}}\|_{1,2,*}, \\ \sup_{t,x} |u''_{tx}(t,x)|_0 \le M\|\overline{\theta} - \overline{\overline{\theta}}\|_{1,2,*}, \\ \sup_{t\ge 0} |u''_{xx}(t,x)|_0 \le M\|\overline{\theta} - \overline{\overline{\theta}}\|_{1,2,*}. \end{gathered} \tag{26}$$

Из той же леммы следует, что для решений $\overline{u}$ и $\overline{\overline{u}}$ задачи (1) – (3) справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \sup_{t,x} |\overline{u}'_x(t,x)| + \sup_{t\ge 0} |\overline{u}''_{xx}(t,x)|_0 + \sup_{t\ge 0} |\overline{u}''_{tx}(t,x)|_0 \le M(R+\delta), \\ \sup_{t,x} |\overline{\overline{u}}'_x(t,x)| + \sup_{t\ge 0} |\overline{\overline{u}}''_{xx}(t,x)|_0 + \sup_{t\ge 0} |\overline{\overline{u}}''_{tx}(t,x)|_0 \le M(R+\delta). \end{gathered} \tag{27}$$

В частности, при достаточно малых R и δ

$$\begin{gathered} \sup_{t,x} |\overline{u}'_x(t,x) + 1|^{-1} \le (1 - M(R+\delta))^{-1} \le \frac{1}{2}, \\ \sup_{t,x} |\overline{\overline{u}}'_x(t,x) + 1|^{-1} \le (1 - M(R+\delta))^{-1} \le \frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{28}$$

С помощью элементарных преобразований получаем

$$\begin{gathered} \theta'_t - \theta''_{xx} = -\overline{u}'_x(1+\overline{u}'_x)^{-1}\theta''_{xx} - \overline{u}''_{xx}(1+\overline{u}'_x)^{-1}\theta'_x + \\ + \overline{u}'_x(1+\overline{u}'_x)^{-2}\overline{u}''_{xx}\theta'_x - \overline{u}'_x[(1+\overline{\overline{u}}'_x)^{-1} + \overline{u}'_x(1+\overline{u}'_x)^{-1}(1+\overline{\overline{u}}'_x)^{-1}] \times \\ \times \check{\theta}''_{xx} - \check{\theta}'_x u''_{xx}[(1+\overline{\overline{u}}'_x)^{-1} + \overline{u}'_x(1+\overline{u}'_x)^{-1}(1+\overline{\overline{u}}'_x)^{-1}] - \check{\theta}'_x u'_x \times \\ \times [-(1+\overline{\overline{u}}'_x)^{-2}\overline{\overline{u}}''_{xx} + \overline{u}''_{xx}(1+\overline{u}'_x)^{-1}(1+\overline{\overline{u}}'_x)^{-1} - \overline{u}'_x(1+\overline{u}'_x)^{-2}(1+\overline{\overline{u}}'_x)^{-1} \times \\ \times \overline{u}''_{xx} - \overline{u}'_x(1+\overline{u}'_x)^{-1}(1+\overline{\overline{u}}'_x)^{-2}\overline{\overline{u}}''_{xx}] + \overline{u}''_{tx}\theta + u''_{tx}\check{\theta} = \sum_{i=1}^{8} S_i \equiv S. \end{gathered} \tag{29}$$

Покажем, что для слагаемого S_i, содержащего u, справедлива оценка

$$\|S_i\|_* \le M(R+\delta)\|\bar\theta - \bar{\bar\theta}\|_{1,2,*}, \quad i = 4, 5, 6, 8, \tag{30}$$

а для каждого слагаемого S_i, содержащего θ, — оценка

$$\|S_i\|_* \le M(R+\delta)\|\theta\|_{1,2,*}, \quad i = 1,2,3,7. \tag{31}$$

Установим сначала (31). Считая R и δ достаточно малыми и пользуясь неравенствами (27) и (28), получаем (31) при $i = 1$.

Применяя неравенство

$$\|\varphi'(x)\|_{C[0,\pi]} \le M|\varphi|_{2-2/q}, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2-2/q}, \quad 3 < q < +\infty \tag{32}$$

(см. [4]) и (27), (28), имеем

$$|S_2(t,x)|_0 \le M|\bar u''_{xx}(t,x)|_0|\theta'_x(t,x)|_{C[0,\pi]} \le M(R+\delta)\,|\theta(t,x)|_2.$$

Отсюда следует (31) для $i = 2$.

Аналогично устанавливаются оценки (31) для $i = 3, 7$.

Перейдем к доказательству оценок (30). Заметим сначала, что из (22) и (32) вытекает

$$\|\check\theta(t,x)\|_{1,2,*} + \sup_{t\ge 0}\|\exp(\gamma t)\check\theta(t,x)\|_{C[0,\pi]} \le M(\|\varphi\|_* + |\theta_0|_{2-2/q}) \le M\delta. \tag{33}$$

Пользуясь (26) и (33), получаем

$$\|S_4\|_* \le M\sup_{t,x}|u'_x(t,x)|\,\|\check\theta\|_{1,2,*} \le M(R+\delta)\|\bar\theta - \bar{\bar\theta}\|_{1,2,*}.$$

Для S_5 имеем

$$\|S_5\|_* \le M\sup_{t\ge 0}|u''_{xx}(t,x)|_0\|\check\theta'_x\|_{1,2,*} \le M(R+\delta)\|\bar\theta - \bar{\bar\theta}\|_{1,2,*}.$$

Аналогично устанавливаются остальные неравенства (30).

Используя неравенство (20) для уравнения (29) и оценки (30), (31), находим

$$\|\theta\|_{1,2,*} \le M\|S\|_* \le M\sum_{i=1}^{8}\|S_i\|_* \le$$

$$\le M(R+\delta)\|\bar\theta - \bar{\bar\theta}\|_{1,2,*} + M(R+\delta)\|\theta\|_{1,2,*}.$$

Отсюда при малых R и δ следует

$$\|\theta\|_{1,2,*} \le M(R+\delta)\|\bar\theta - \bar{\bar\theta}\|_{1,2,*} \le q\|\bar\theta - \bar{\bar\theta}\|_{1,2,*}$$

при некотором $0 < q < 1$. Другими словами,

$$\|\mathfrak{N}(\bar\theta) - \mathfrak{N}(\bar{\bar\theta})\|_{1,2,*} \le q\|\bar\theta - \bar{\bar\theta}\|_{1,2,*}.$$

Таким образом, мы показали, что оператор $\mathfrak{N}$ на S_R удовлетворяет всем условиям принципа сжимающих отображений, и поэтому имеет на S_R единственную неподвижную точку θ. Легко видеть, что пара функций θ, u, где u — решение задачи (1) – (3) при данном θ, будет решением задачи (1) – (5), и для θ и u справедливы оценки (9), (10). Теорема 1 доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 1 мы следовали схеме работы [1].

При этом, в отличие от [1], где условия принципа сжимающих отображений обеспечивались за счет малости промежутка $0 \le t \le t_0$, здесь эти условия обеспечиваются малостью данных задачи (1) – (5).

4. Доказательства вспомогательных утверждений.

***Доказательство леммы* 1.** Рассмотрим сначала случай $u_0 = u_1 = 0$. Считая $f(t, x)$ гладкой на Q, представим решение задачи (11), (12) в виде [8]

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \tag{34}$$

где

$$u_k(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \sin k(t-s) f_k(s)\, ds, \quad f_k(t) = \int_0^{\pi} f(t, x) \sin kx\, dx \quad . \tag{35}$$

Преобразуем формулу (34) к удобному для нас виду. Рассмотрим последовательность функций

$$\tilde{u}_N(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{N} u_k(t) \sin kx, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Если $f(t, x)$ достаточно гладкая, то функции $\tilde{u}_N(t, x)$ сходятся вместе с производными к $u(t, x)$ в нормах тем более сильных, чем глаже функция $f(t, x)$. Полагая

$$\psi(t, x) = \int_0^t f(\tau, x)\, d\tau,$$

интегрируя в (35) по частям и используя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_N(t, x) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \Bigg(\int_0^{\pi} &\sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right)(x + t - s - y)\right)\left(\sin\tfrac{1}{2}(x + t - s - y)\right)^{-1} \psi(s, y)\, dy + \\
&+ \int_0^{\pi} \sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right)(t - s - x + y)\right)\left(\sin\tfrac{1}{2}(t - s - x + y)\right)^{-1} \psi(s, y)\, dy + \\
&+ \int_0^{\pi} \sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right)(t + x - s + y)\right)\left(\sin\tfrac{1}{2}(t + x - s + y)\right)^{-1} \psi(s, y)\, dy + \\
&+ \int_0^{\pi} \sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right)(t - x - s - y)\right)\left(\sin\tfrac{1}{2}(t - x - s - y)\right)^{-1} \psi(s, y)\, dy \Bigg) ds = \\
&= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \left(\sum_{i=1}^{4} \vartheta_i \right) ds.
\end{aligned} \tag{36}$$

Рассмотрим ϑ_1. С помощью замены переменной $y = x + t - s - 2z$ имеем

$$\vartheta_1 = 2 \int_{\frac{1}{2}(x+t-s-\pi)}^{\frac{1}{2}(x+t-s)} \sin((2N+1) z)(\sin z)^{-1} \psi(s, x + t - s - 2z)\, dz.$$

Интеграл ϑ_1 при $N \to +\infty$ может иметь отличный от нуля предел лишь в том случае, когда промежуток интегрирования содержит $k\pi$ (k — целое). Тогда

$$\hat{\mathfrak{I}}_1 = \lim_{N\to+\infty} \mathfrak{I}_1 = 2\psi(s, x+t-s-2k\pi).$$

Учитывая легко доказываемую ограниченность подынтегральной функции в $\mathfrak{I}_1$ и применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [9], получаем

$$\mathfrak{I}_1^* = \lim_{N\to+\infty} \int_0^t \mathfrak{I}_1(x,t,s,N)\,ds = \int_0^t \lim_{N\to+\infty} \mathfrak{I}_1(x,t,s,N)\,ds = \int_0^t \hat{\mathfrak{I}}_1(x,t,s)\,ds.$$

При фиксированных t и x подынтегральная функция в $\mathfrak{I}_1$ отлична от нуля лишь при $s \in [x+t-(2k+1)\pi, x+t-2k\pi] \equiv I_k$. Промежуток I_k имеет непустое пересечение с $[0,t]$ лишь при $k = 0, 1, \ldots, [(x+t)/(2\pi)]$ ($[\alpha]$ — целая часть α), причем

$$I_0 \cap [0,t] = [(x+t-\pi)_+, t],$$

$$I_{k_1} \cap [0,t] = [(x+t-2k_1\pi)_+, t-(2k_1\pi - x)_+], \quad k_1 = \left[\frac{1}{2\pi}(t+x)\right].$$

Таким образом,

$$\mathfrak{I}_1^* = \sum_{k=0}^{\left[\frac{1}{2\pi}(x+t)\right]} 2 \int_{(x+t-(2k+1)\pi)_+}^{t-(2k\pi-x)_+} \psi(s, x+t-s-2k\pi)\,ds.$$

Здесь

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Значок $+$ в верхнем и нижнем пределе по существу нужен лишь для $k=0$ и $k = [(x+t)/(2\pi)]$, потому что интервалы I_0 и $I_{[(x+t)/(2\pi)]}$ могут выходить за пределы промежутка $[0,t]$. Для остальных k этот значок можно опустить.

Рассмотрим $\mathfrak{I}_2$. С помощью замены $y = -t + x + s + 2z$ имеем

$$\mathfrak{I}_2 = 2 \int_{\frac{1}{2}(t-x-s)}^{\frac{1}{2}(\pi+t-x-s)} \sin((2N+1)z)\,(\sin z)^{-1}\,\psi(s, -t+x+s+2z)\,dz. \qquad (37)$$

Пользуясь аналогичными со случаем $\mathfrak{I}_1$ обозначениями и рассуждениями, получаем

$$\mathfrak{I}_2^* = 2\int_0^t \hat{\mathfrak{I}}_2\,(x,t,s)\,ds.$$

Подынтегральная функция здесь отлична от нуля (в силу (37)) лишь при

$$s \in [t-x-2k\pi, t-x-(2k-1)\pi] \equiv I_k.$$

Промежутки I_k имеют непустое пересечение с $[0,t]$ лишь при $k = 0, 1, \ldots, [(t-x)/(2\pi) + 1/2]$, при этом

$$\mathfrak{I}_2^* = 2\sum_{k=0}^{\left[\frac{t-x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right]} \int_{(t-x-2k\pi)_+}^{t-(x+(2k-1)\pi)} \psi(s, 2k\pi - t + x + s)\,ds.$$

С помощью замены $y = -t + x + s + 2z$ имеем

$$\vartheta_3 = 2 \int\limits_{\frac{1}{2}(t+x-s)}^{\frac{1}{2}(t+x-s+\pi)} \sin((2N+1)\, z)(\sin z)^{-1} \psi(s, 2z-t-x+s)\, ds.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\vartheta_3^* = 2 \int\limits_0^t \hat{\vartheta}_3\,(x, t, s)\, ds.$$

Подынтегральная функция здесь отлична от нуля при

$$s \in [t + x - 2k\pi, t + x - (2k-1)\pi] \equiv I_k.$$

Промежутки I_k могут иметь непустое пересечение с $[0, t]$ лишь при $k = 1, 2, \ldots, [(t+x)/(2\pi) + 1/2]$ и, следовательно,

$$\vartheta_3^* = 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{t+x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right]} \int\limits_{(t+x-2k\pi)_+}^{(t+x-(2k-1)\pi)_+} \psi(s, 2k\pi - t - x + s)\, ds.$$

Отметим отличную от приведенных ранее форму записи верхнего предела интегрирования. Это обусловлено тем, что I_1 всегда лежит левее t, но может лежать и левее 0.

Для ϑ_4 с помощью замены $y = t - x - s - 2z$ получаем

$$\vartheta_4 = 2 \int\limits_{\frac{1}{2}(\pi-t-x-s)}^{\frac{1}{2}(t-s-x)} \sin((2N+1)\, z)(\sin z)^{-1} \psi(s, t-x-s-2z)\, dz.$$

Переходя к пределу, имеем

$$\vartheta_4^* = 2 \int\limits_0^t \hat{\vartheta}_4\,(x, t, s)\, ds.$$

Подынтегральная функция отлична от нуля при

$$s \in [t - x - (2k+1)\pi, t - x - 2k\pi] \equiv I_k.$$

Промежутки I_k могут иметь непустое пересечение с $[0, t]$ лишь при $k = 0, 1, \ldots, [(t-x)/(2\pi) + 1/2]$ и, следовательно,

$$\vartheta_4^* = 2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-x}{2\pi}\right]} \int\limits_{(t+x-(2k+1)\pi)_+}^{(t-x-2k\pi)_+} \psi(s, t-x-s-2k\pi)\, ds.$$

Отметим, что если в формулах для ϑ_i^* верхний индекс суммирования меньше нижнего, то сумма равна нулю, так как в этом случае пересечение интервалов I_k с $[0, t]$ пусто.

Пользуясь полученными выражениями для ϑ_i^* и формулой (36), получаем

$$u(t, x) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sum_{k=0}^{\left[\frac{x+t}{2\pi}\right]} \int\limits_{(x+t-(2k+1)\pi)_+}^{t-(2k\pi-x)_+} \psi(s, x+t-s-2k\pi)\, ds + \right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\left[\frac{t-x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right]} \int\limits_{(t-x-2k\pi)_+}^{(t-(x+(2k-1)\pi)_+} \psi(s, 2k\pi - t + x + s)\, ds -$$

$$-\sum_{k=1}^{\left[\frac{t+x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right]} \int\limits_{(t+x-2k\pi)_+}^{(t+x-(2k-1)\pi)_+} \psi(s, 2k\pi - t - x + s)\, ds -$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{\left[\frac{t-x}{2\pi}\right]} \int\limits_{(t+x-(2k+1)\pi)_+}^{(t-x-2k\pi)_+} \psi(s, t - x - s - 2k\pi)\, ds \right\}. \qquad (38)$$

Найдем оценки для производных $u(t, x)$. Для этого сделаем замену переменных в интегралах, приняв в качестве новой переменной вторые аргументы функции ψ. В результате получим

$$u(t, x) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sum_{k=0}^{\left[\frac{x+t}{2\pi}\right]} \int\limits_{x+t-2k\pi-(x+t-(2k+1)\pi)_+}^{x-2k\pi-(2k\pi-x)_+} \psi(x + t - 2k\pi - \tau, \tau)\, d\tau + \right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\left[\frac{t-x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right]} \int\limits_{2k\pi-t+x+(t-x-2k\pi)_+}^{2k\pi-(x-(2k-1)\pi)_+} \psi(\tau - 2k\pi + t - x, \tau)\, d\tau -$$

$$-\sum_{k=1}^{\left[\frac{t+x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right]} \int\limits_{2k\pi-t-x+(t+x-2k\pi)_+}^{2k\pi-t-x+(t+x-(2k-1)\pi)_+} \psi(\tau - 2k\pi + t + x, \tau)\, d\tau -$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{\left[\frac{t-x}{2\pi}\right]} \int\limits_{t-x-2k\pi-(t-x-2k\pi)_+}^{t-x-2k\pi-(t+x-(2k+1)\pi)_+} \psi(t - 2k\pi - x - \tau, \tau)\, d\tau \right\}. \qquad (39)$$

Ограничимся нахождением производных лишь первой суммы Z в (39). (Для остальных сумм это делается аналогично.) Пусть

$$Z = \sum_{k=0}^{m} Z_k, \quad Z_k = \int\limits_{x+t-2k\pi-(x+t-(2k+1)\pi)_+}^{x-2k\pi-(2k\pi-x)_+} \psi(x + t - 2k\pi - \tau, \tau)\, d\tau,$$

где $m = [(x + t)/(2\pi)]$. При достаточно большом t

$$\tilde{Z} = \sum_{k=1}^{m-1} Z_k = -\sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_0^{\pi} \psi(x + t - 2k\pi - \tau, \tau)\, d\tau.$$

Дифференцируя по x и учитывая, что $\psi(t, x) = \int_0^t f(\tau, x)\, d\tau$, получаем

$$\tilde{Z}'_x = \tilde{Z}'_t = -\sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_0^{\pi} \varphi(x + t - 2k\pi - \tau, \tau)\, d\tau.$$

С помощью замены переменной имеем

$$\tilde{Z}'_x = \tilde{Z}'_t = \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{x+t-(2k+1)\pi}^{x+t-2k\pi} \varphi(s, x - t - 2k\pi - s)\, ds.$$

Отсюда следует

$$\tilde{Z}''_{tt} = \tilde{Z}''_{xx} = \sum_{k=1}^{m-1} [\varphi(x+t-2k\pi, 0) - \varphi(x+t-(2k+1)\pi, \pi) + \\ + \int_{x+t-(2k+1)\pi}^{x+t-2k\pi} \varphi'_x(s, x+t-2k\pi-s)\,ds],$$

$$\tilde{Z}''_{tx} = \sum_{k=1}^{m-1} [\varphi(x+t-2k\pi, 0) - \varphi(x+t-(2k+1)\pi, \pi) - \\ - \int_{x+t-(2k+1)\pi}^{x+t-2k\pi} \varphi'_x(s, x-t-2k\pi-s)\,ds].$$

Делая снова замену переменной, получаем

$$\tilde{Z}''_{tt} = \tilde{Z}''_{xx} = \sum_{k=1}^{m-1} [\varphi(x+t-2k\pi, 0) - \varphi(x+t-(2k+1)\pi, \pi) - \\ - \int_0^{\pi} \varphi'_x(x+t-2k\pi-\tau, \tau)\,d\tau],$$

$$\tilde{Z}''_{tx} = \sum_{k=1}^{m-1} [\varphi(x+t-2k\pi, 0) - \varphi(x+t-(2k+1)\pi, \pi) + \\ + \int_0^{\pi} \varphi'_x(x+t-2k\pi-\tau, \tau)\,d\tau]. \tag{40}$$

Для первого слагаемого в первой сумме в (39) получаем (t здесь большое)

$$\hat{Z}_0 = -\int_x^{\pi} \psi(x+t-\tau, \tau)\,d\tau.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial x} Z_0 = \psi(t, x) - \int_x^{\pi} \varphi(x+t-\tau, \tau)\,d\tau = \int_0^t \varphi(s, x)\,ds + \int_{t+x-\pi}^{t} \varphi(s, x+t-s)\,ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_0 = -\int_x^{\pi} \varphi(x+t-\tau, \tau)\,d\tau = \int_{t+x-\pi}^{t} \varphi(s, x+t-s)\,ds,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_0 = \int_0^t \varphi'_x(s, x)\,ds + \int_{t+x-\pi}^{t} \varphi'_x(s, x+t-s)\,ds - \varphi(t+x-\pi, \pi) = \\ = \int_0^t \varphi'_x(s, x)\,ds - \int_x^{\pi} \varphi'_x(x+t-\tau, \tau)\,d\tau - \varphi(t+x-\pi, \pi),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} Z_0 = -\varphi(t+x-\pi, \pi) + \varphi(t, x) + \int_{t+x-\pi}^{t} \varphi'_x(s, x+t-s)\,ds =$$

$$= \varphi(t, x) - \varphi(t + x - \pi, \pi) + \int\limits_x^\pi \varphi'_x(x + t - \tau, \tau)\, d\tau,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Z_0 = \varphi(t, x) - \varphi(t + x - \pi, \pi) + \int\limits_x^\pi \varphi'_x(x + t - \tau, \tau)\, d\tau.$$

Для последнего слагаемого в первой сумме в (39) имеем

$$Z_m = -\int\limits_0^\pi \psi(x + t - 2m\pi - \tau, \tau)\, d\tau.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial x} Z_m = \frac{\partial}{\partial t} Z_m = -\int\limits_0^\pi \varphi(x + t - 2m\pi - \tau, \tau)\, d\tau,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_m = \frac{\partial^2}{\partial t^2} Z_m = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} Z_m = \varphi(x + t - (2m + 1)\pi, \pi) - \varphi(x + t - 2m\pi, 0) -$$

$$- \int\limits_0^\pi \varphi'_x(x + t - 2m\pi - \tau, \tau)\, d\tau.$$

При $0 < t < \pi/2$ в формуле (39) остается не более четырех слагаемых, и ситуация существенно упрощается. Поэтому этот случай опускаем.

Перейдем к оценке производных $\tilde{Z}$, Z_0 и Z_m. Оценим, например, $\tilde{Z}''_{xx}$. Из формулы (40) следует

$$|\tilde{Z}''_{xx}|_0 \le \left(\int\limits_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{m-1} |\varphi(x+t-2k\pi, 0)| \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\int\limits_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{m-1} |\varphi(x+t-(2k+1)\pi, \pi)| \right)^q dx \right]^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\int\limits_0^\pi \left(\sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{x+t-(2k+1)\pi}^{x+t-2k\pi} |\varphi'_x(s, x+t-2k\pi-s)|\, ds \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = S_1 + S_2 + S_3.$$

Пользуясь непрерывностью вложения $W_q^1[0, \pi] \subset C[0, \pi]$ и делая замену переменной, получаем

$$S_1 \le \sum_{k=1}^{m-1} \left(\int\limits_0^\pi |\varphi(x+t-2k\pi, 0)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le M \sum_{k=1}^{m-1} \left(\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi (|\varphi'_x(x+t-2k\pi, \xi)|^q + |\varphi(x+t-2k\pi, \xi)|^q)\, dx\, d\xi \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= M \sum_{k=1}^{m-1} \left(\int\limits_{t-2k\pi}^{t-(2k-1)\pi} |\varphi(\tau, x)|_1^q\, d\tau \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{41}$$

С помощью элементарных преобразований имеем

$$\left(\int\limits_{t-2k\pi}^{t-(2k-1)\pi} |\varphi(\tau,x)|_1^q\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_{t-2k\pi}^{t-(2k-1)\pi} \exp(-\gamma q\tau)\left\{|\varphi(\tau,x)|_1^q \exp(\gamma q\tau)\right\}d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \exp\Big(-\gamma(t-2k\pi)\Big)\left(\int\limits_{t-2k\pi}^{t-(2k-1)\pi} |\varphi(\tau,x)|_1^q \exp(\gamma q\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \exp\Big(-\gamma(t-2k\pi)\Big)\|\varphi(t,x)\|_{0,1,*}.$$

Отсюда и из (41) следует

$$S_1 \le M\|\varphi\|_{0,1,*}\sum_{k=1}^{m-1}\exp\Big(-\gamma(t-2k\pi)\Big) \le$$

$$\le M\|\varphi\|_{0,1,*}\sum_{k=1}^{m-1}\exp\Big(-\gamma\, 2\pi(m-k-1)\Big) \le M\|\varphi\|_{0,1,*}.$$

Таким образом,

$$S_1 \le M\|\varphi\|_{0,1,*}.$$

Аналогично оценивается S_2. Оценим слагаемое S_3. Обозначая через $\hat{\psi}(t,x)$ продолжение определенной на Q функции $\psi(t,x)$ нулем вне Q, применяя интегральное неравенство Минковского и делая элементарные преобразования, имеем

$$|S_3| = \left|\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^t \hat{\varphi}'_x(s,x-t-2k\pi-s)\,ds\right|_0 \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_0^t |\hat{\varphi}'_x(s,x+t-2k\pi-s)|_0\,ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\pi |\hat{\varphi}'_x(s,x-t-2k\pi-s)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^t\left(\int\limits_{t-2k\pi-s}^{\pi+t-2k\pi-s} |\hat{\varphi}'_x(s,\tau)|^q\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{t-(2k+1)\pi}^{t-2k\pi}\left(\int\limits_{t-2k\pi-s}^{t-(2k+1)\pi-s} |\hat{\varphi}'_x(s,x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}ds \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_{t-(2k+1)\pi}^{t-2k\pi}\left(\int\limits_0^\pi |\varphi'_x(s,x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}ds.$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$S_3 \le \sum_{k=1}^{m-1}\pi^{\frac{q-1}{q}}\left(\int\limits_{t-(2k+1)\pi}^{t-2k\pi}\int\limits_0^\pi |\varphi'_x(s,x)|^q\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}\pi^{\frac{q-1}{q}}\left(\int\limits_{t-(2k+1)\pi}^{t-2k\pi}\exp(-\gamma qt)\int\limits_0^\pi |\varphi'_x(s,x)|^q\exp(\gamma qs)\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\leq \pi^{\frac{q-1}{q}} \sum_{k=1}^{m-1} \exp(-\gamma(t-(2k+1)\pi)) \| \varphi'_x \|_* \leq M \| \varphi'_x \|_* \leq M \| \varphi \|_{0,1,*}.$$

Из оценок S_i, $i = 1, 2, 3$, вытекает

$$\sup_{t \geq 0} |\tilde{Z}|_0 \leq M \| \varphi \|_{0,1,*}.$$

Аналогично оцениваются выражения Z_0 и Z_m. Таким образом, мы показали, что вторая производная по x от первой суммы Z в правой части (39) оценивается так:

$$\sup_{t \geq 0} |Z|_0 \leq M \| \varphi \|_{0,1,*}.$$

Также оцениваются остальные суммы в (39). Тем самым доказано, что

$$\sup_{t \geq 0} |u''_{xx}(t, x)|_0 \leq M \| \varphi \|_{0,1,*}.$$

Аналогично оцениваются и остальные производные. Случай $u_0 = u_1 = 0$ рассмотрен. Случай $f = 0$ доказывается проще, и мы его опускаем. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Обозначим через $L(w, \theta_0)$ решение задачи (17). Из (18) вытекает

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} L(w, \theta_0) \right\|_* + \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(w, \theta_0) \right\|_* \leq M(\| w \|_* + |\theta_0|_{2-2/q}). \tag{42}$$

Кроме того, ясно, что

$$L(w_1 + w_2, 0) = L(w_1, 0) + L(w_2, 0) \tag{43}$$

при любых $w_1, w_2 \in L_{q,*}$. Перепишем уравнение (4) в виде

$$\theta'_t - \theta''_{xx} = \varphi + \theta u''_{tx} - [u'_x (1 + u'_x)^{-1} \theta'_x]'_x \equiv w. \tag{44}$$

Используя оператор L, получаем, что задача (4), (5) эквивалентна операторному уравнению

$$w = \varphi + u''_{tx} L(w, \theta_0) - \left[u'_x (1 + u'_x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} L(w, \theta_0) \right]'_x \equiv K(w). \tag{45}$$

Установим разрешимость уравнения (45) в $L_{q,*}$. Покажем сначала, что оператор K определен на $L_{q,*}$. Дифференцируя в (45), имеем

$$K(w) = \varphi + u''_{tx} L(w, \theta_0) - u''_{xx} (1 + u'_x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} L(w, \theta_0) +$$

$$+ u'_x u''_{xx} (1 + u'_x)^{-2} \frac{\partial}{\partial x} L(w, \theta_0) - u'_x (1 + u'_x)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(w, \theta_0). \tag{46}$$

Из (19) следует, что при малом δ

$$|1 + u'_x|^{-1} \leq (1 - \sup_{t,x} |u'_x(t, x)|)^{-1} \leq (1 - \delta)^{-1}. \tag{47}$$

Отсюда, из (19) и непрерывных вложений

$$W^1_q[0, \pi] \subset C[0, \pi], \quad W^2_q[0, \pi] \subset C^1[0, \pi] \tag{48}$$

вытекает

$$|K(w)|_0 \le |\varphi|_0 + |u''_{tx}|_0 \|L(w,\theta_0)\|_{C[0,\pi]} + (1-\delta)^{-1}|u''_{xx}|_0 \left\| \frac{\partial}{\partial x} L(w,\theta_0)\right\|_{C[0,\pi]} +$$

$$+ \delta(1-\delta)^2 |u''_{xx}|_0 \left\| \frac{\partial}{\partial x} L(w,\theta_0)\right\|_{C[0,\pi]} + \delta(1-\delta)^{-1}|L(w,\theta_0)|_2 \le$$

$$\le |\varphi|_0 + \delta|L(w,\theta_0)|_1 + \delta(1-\delta)^{-1}|L(w,\theta_0)|_2 + \delta^2(1-\delta)^{-1}|L(w,\theta_0)|_1 +$$

$$+ \delta(1-\delta)^{-1}|L(w,\theta_0)|_2.$$

Поэтому

$$\|K(w)\|_* \le \|\varphi\|_* + M\|L(w,\theta_0)\|_{1,2,*} \le \|\varphi\|_* + M(\|w\|_* + |\theta_0|_{2-2/q}). \tag{49}$$

Таким образом, оператор K определен на $L_{q,*}$. Покажем, что он является сжимающим. Из (43) и (46) следует

$$K(w) - K(\overline{w}) = u''_{tx} L(w-\overline{w},0) - u''_{xx}(1+u'_x)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}L(w-\overline{w},0) +$$

$$+ u'_x u''_{xx}(1+u'_x)^{-2}\frac{\partial}{\partial x}L(w-\overline{w},0) - u'_x(1+u'_x)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}L(w-\overline{w},0).$$

Отсюда и из (19), (42), (47), (48) вытекает, что при малом δ

$$\|K(w) - K(\overline{w})\|_* \le \delta M\|w-\overline{w}\|_*.$$

Следовательно, оператор K при малом δ является сжимающим на $L_{q,*}$. Из принципа сжимающих отображений вытекает однозначная разрешимость уравнения (45) на $L_{q,*}$. Оценка (20) следует из (18), (44) и (49). Лемма 2 доказана.

1. *Орлов В. П., Соболевский П. Е.* Разрешимость одномерной задачи термоупругости // Докл. АН СССР. – 1989. – **304**, №5. – С. 1105 – 1109.
2. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных – М.: Наука, 1976. – 390 с.
3. *Соболевский П. Е., Погореленко В. А.* О разрешимости смешанной задачи для одномерного квазилинейного гиперболического уравнения // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**, №1. – С. 114 – 121.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения – М.: Наука, 1975. – 480 с.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
6. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, №1. – С. 52 – 55.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
9. *Натансон И. П.* Курс теории функций вещественного переменного. – М.: Гостехтеоретиздат, 1957. – 552 с.

Получено 25.12.91