УДК 517.43

Н. Н. Роженко, асп. (Киев. политехн. ин-т)

КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР В БЕСКОНЕЧНОЧАСТИЧНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

The behavior of a quantum oscillator in an infinite-particle system is considered in the case of linear interaction. The relation between the spectrum of the dynamic matrix of a complete system and the oscillator damping is found. The dependence of the spectrum on the interaction parameters is determined.

Вивчається поведінка квантового осцилятора у нескінченночастковій системі у випадку лінійних взаємодій. Знайдена залежність між спектром динамічної матриці повної системи і затуханням осцилятора. Визначена залежність спектра від параметрів взаємодії.

1. Описание модели. Пусть имеется система взаимодействующих гармонических осцилляторов с одной внутренней степенью свободы, расположенных в узлах бесконечной d-мерной решетки $\mathbb{Z}^d \ni k = (k_1, k_2, \ldots, k_d)$. Каждому ее узлу k поставлено в соответствие пространство состояний отдельной частицы $L_2(\mathbb{R}^1, dx_k)$, операторы координаты и импульса q_k и p_k, действующие обычным образом [1] (гл. 7, § 3),

$$\mathbb{Z}^d \ni k \;\to\; \begin{cases} L_2(\mathbb{R}^1, dx_k); \\ p_k f(x_k) = i\dfrac{d}{dx_k} f(x_k); \\ q_k f(x_k) = x_k f(x_k). \end{cases}$$

Рассмотрим формальный оператор энергии этой системы частиц, считая их взаимодействие гармоническим,

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} p_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbb{Z}^d} d_{kj}q_kq_j = \frac{1}{2}(\overline{p}, \overline{p}) + \frac{1}{2}(D\overline{q}, \overline{q}),$$

d_{kj} $(k, j \in \mathbb{Z}^d)$ — матричные элементы оператора D в стандартном базисе пространства $l_2(\mathbb{Z}^d)$,

$$D\colon\; l_2(\mathbb{Z}^d) \to l_2(\mathbb{Z}^d).$$

Матрицу $(d_{kj})_{k,j\in\mathbb{Z}^d}$ называют динамической матрицей системы. Оператор D будем считать симметрическим, строго положительным и ограниченным $(m^2E \le D \le M^2E,\;\; m > 0,\, M < \infty)$. Предположим, что $\sigma(D) = \sigma_{ac}(D) = [m^2, M^2]$; это выполняется, в частности, в случае трансляционной инвариантности оператора D [1] (гл. 7, § 4). Придают смысл формальному гамильтониану H с помощью процедуры перенормировки, в результате которой ему ставится в соответствие фазовое пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, пространство состояний $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_s)$, где γ_s — гауссовская мера с корреляционным оператором $S = D^{-1/2}$, называемая вакуумной мерой, и перенормированный оператор H_{ren}, который задается на плотном подмножестве $C^{\infty}_{b,\text{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) \subset L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_s)$ ограниченных, цилиндрических, бесконечно дифференцируемых функций и совпадает с оператором Дирихле меры γ_s [1] (гл. 7, § 3):

$$H_{\text{ren}}f(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2} + \langle D^{1/2}\nabla f(x), x\rangle.$$

Здесь и далее $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в пространстве $l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, ∇ —

оператор производной. Операторам импульса и координат в результате перенормировки соответствуют операторы

$$p_{k,\,\mathrm{ren}} = \frac{1}{i}[\partial f(x)/\partial x_k - \langle D^{1/2}e_k, x\rangle f(x)], \quad q_{k,\,\mathrm{ren}} = x_k f(x), \; k \in \mathbb{Z}^d,$$

где e_k — k-й орт стандартного базиса пространства $l_2(\mathbb{Z}^d)$.

Рассмотрим еще один гармонический осциллятор с частотой ω_0 и оператором энергии $H_I = (p^2 + \omega_0^2 Q^2)/2$, где P и Q — его операторы импульса и координаты,

$$Pf(\kappa) = i\frac{\partial}{\partial\kappa}f(\kappa), \quad Qf(\kappa) = \kappa f(\kappa), \; f(\kappa) \in L_2(\mathbb{R}^1, d\kappa).$$

Оператор H_I имеет смысл, однако применим и к нему процедуру перенормировки. Это будет унитарно эквивалентное преобразование, в результате которого оператору H_I ставится в соответствие его пространство состояний $L_2(\mathbb{R}^1, \gamma_0)$ с вакуумной мерой $d\gamma_0(\kappa) = \sqrt{\omega_0/\pi}\, e^{-\omega_0\kappa^2} d\kappa$ и перенормированный гамильтониан $H_{I,\,\mathrm{ren}}$ заданный на плотном подмножестве $C_6^\infty(\mathbb{R}^1)$ в виде

$$H_{I,\,\mathrm{ren}}f(\kappa) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\kappa)}{\partial\kappa^2} + \omega_0\kappa\frac{\partial f(\kappa)}{\partial\kappa}.$$

При этом

$$P_{\mathrm{ren}}f(\kappa) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial f(\kappa)}{\partial\kappa} - \omega_0\kappa f(\kappa)\right), \quad Q_{\mathrm{ren}}f(\kappa) = \kappa f(\kappa)$$

— соответственно перенормированные операторы импульса и координат отдельного осциллятора.

Будем изучать систему, состоящую из этого осциллятора и описанной выше системы, предполагая, что они связаны взаимодействием $V_\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\lambda_k q_k Q$, где $\lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in l_2(\mathbb{Z}^d)$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\lambda_k^2 < \infty, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\lambda_k^2 \neq 0, \; \lambda_k \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{Z}^d. \tag{1}$$

Формальный гамильтониан расширенной системы имеет вид $H_\lambda = H + H_I + V_\lambda$. Реализуем H_λ в пространстве $\mathfrak{X} = L_2(\mathbb{R}^1, \gamma_0) \otimes L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_s)$, как оператор

$$H_{\lambda,\,\mathrm{ren}} = H_{I,\,\mathrm{ren}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_{\mathrm{ren}} + V_\lambda,$$

заданный на соответствующем плотном подмножестве, где γ_0 — вакуумная мера выделенной частицы, γ_s — вакуумная мера нерасширенной системы. Заметим, что вид оператора энергии взаимодействия V_λ выделенного осциллятора с нерасширенной системой при перенормировке сохраняется как содержащий только операторы координат.

2. Условия затухания. Задача состоит в том, чтобы исследовать временное поведение выделенной частицы. Для этого рассмотрим временную эволюцию $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, оператора координаты выделенной частицы в пространстве $\mathfrak{X}$, порожденную гамильтонианом $H_{\lambda,\,\mathrm{ren}}$. Обозначим $\varphi(t) = (Q^2(t)\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{Q})_{L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\, \gamma_s)}$, где $\underset{\sim}{Q} = f(\kappa) \otimes \mathbf{1} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^1, \gamma_0) \otimes L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \gamma_s)$ — усреднение $Q(t)$ по степеням свободы остальных осцилляторов. Кроме того, введем оператор D_λ в

$\mathbb{C}^1 \oplus l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, заданный в стандартном базисе матрицей

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & l_\lambda \\ l_\lambda & D \end{pmatrix},$$

где

$$l_\lambda\colon l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) \to \mathbb{C}^1,\ l_\lambda x = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} x_k\lambda_k,\ \ l_\lambda^*\colon l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) \leftarrow \mathbb{C}^1,\ l_\lambda^*\kappa = (\kappa\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}.$$

Оператор D_λ определен в $\mathbb{C}^1 \oplus l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, ограничен и симметричен вследствие ограниченности и симметричности оператора D и выполнения условия (1). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) D_λ — *строго положительный оператор;*

2) $\sigma(D_\lambda) = \sigma_{ac}(D_\lambda)$.

Тогда $\varphi(t) \to 0,\ t \to \infty$.

Замечание. Условие 1 можно ослабить: 1′) D_λ— положительный и $\mathcal{D}(D_\lambda^{-1/4}) \supset \mathbb{R}_0^{\{l\}\cup\mathbb{Z}^d}$.

Выполнение утверждения теоремы можно трактовать как затухание выделенного осциллятора (см., например, [2]).

Доказательство. Найдем явный вид временной эволюции координаты отдельного осциллятора $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Для этого оператор H_λ представим как формальный гамильтониан гармонической системы осцилляторов, расположенных в узлах расширенной решетки $\{l\} \cup \mathbb{Z}^d$, с динамической матрицей

$$D_\lambda\colon l_2(\{l\} \cup \mathbb{Z}^d) \to l_2(\{l\} \cup \mathbb{Z}^d),\ \ H_\lambda = \frac{1}{2}(\bar p, \bar p) + \frac{1}{2}(D_\lambda \bar q, \bar q),$$

где $\bar p = (P, p)$, $\bar q = (Q, q)$, и будем применять к нему процедуру перенормировки. Для этого потребуется выполнение условия 1 или 1′ [1] (гл. 7, § 3). В результате этой перенормировки формальному оператору H_λ ставится в соответствие его фазовое пространство $\mathbb{R}^{\{l\}\cup\mathbb{Z}^d}$, пространство состояний $L_2(\mathbb{R}^{\{l\}\cup\mathbb{Z}^d}, \gamma_{s_\lambda})$, где γ_{s_λ} — гауссовская мера с корреляционным оператором $S_\lambda = D_\lambda^{-1/2}$ (вакуумная мера расширенной системы), и перенормированный оператор H_{ren}^λ, заданный на плотном подмножестве гладких цилиндрических ограниченных функций $f \in C_6^\infty(\mathbb{R}^{\{l\}\cup\mathbb{Z}^d})$:

$$H_{\mathrm{ren}}^\lambda f(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\kappa^2} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x_k^2} + \langle\langle D_\lambda^{1/2}\nabla^\lambda f(\xi), \xi\rangle\rangle.$$

Здесь и далее $\xi = (\kappa, x) \in \mathbb{C}^1 \oplus l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, $\kappa \in \mathbb{C}^1$, $x \in l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, $\langle\langle\cdot\,,\cdot\rangle\rangle$ — скалярное произведение в $l_2(\mathbb{R}^{\{l\}\cup\mathbb{Z}^d})$, ∇^λ рассматривается как оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{\{l\}\cup\mathbb{Z}^d}, \gamma_{s_\lambda})$. Перенормированные операторы импульса и координат имеют вид

$$P_{\mathrm{ren}}^\lambda f(\xi) = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial f(\xi)}{\partial\kappa} - \langle\langle D_\lambda^{1/2}\xi, e_l\rangle\rangle f(\xi)\right],$$

$$p_{\mathrm{ren},k}^\lambda f(\xi) = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_k} - \langle\langle D_\lambda^{1/2}\xi, \hat e_k\rangle\rangle f(\xi)\right],$$

$$Q^{\lambda}_{\text{ren}} f(\xi) = \kappa f(\xi), \quad q^{\lambda}_{\text{ren},\,k} f(\xi) = x_k f(\xi),$$

где

$$e_I = (1, \overline{0}) \in l_2(\mathbb{R}^{\{I\}\cup\mathbb{Z}^d}), \quad \hat{e}_k = (0, e_k) \in l_2(\mathbb{R}^{\{I\}\cup\mathbb{Z}^d}), \; k \in \mathbb{Z}^d.$$

Теперь можно найти временную эволюцию операторов импульса и координат полной системы, в частности, временную эволюцию $Q^{\lambda}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, оператора координаты Q^{λ}_{ren} выделенного осциллятора [1]

$$Q^{\lambda}(t) = \langle\langle \cos(D^{1/2}_{\lambda} t)\, \overline{q}^{\lambda}_{\text{ren}}, e_I \rangle\rangle + \langle\langle D^{-1/2}_{\lambda} \sin(D^{1/2}_{\lambda})\, \overline{p}^{\lambda}_{\text{ren}}, e_I \rangle\rangle, \tag{2}$$

где

$$\overline{q}^{\lambda}_{\text{ren}} = (Q^{\lambda}_{\text{ren}}, q^{\lambda}_{\text{ren}}), \quad q^{\lambda}_{\text{ren}} = (q^{\lambda}_{k,\,\text{ren}})_{k\in\mathbb{Z}^d},$$

$$\overline{p}^{\lambda}_{\text{ren}} = (P^{\lambda}_{\text{ren}}, p^{\lambda}_{\text{ren}}), \quad p^{\lambda}_{\text{ren}} = (p^{\lambda}_{k,\,\text{ren}})_{k\in\mathbb{Z}^d}.$$

Заметим, что описанные реализации оператора H_{λ} являются унитарно эквивалентными. Учитывая это и используя соотношения между операторами рождения и уничтожения и операторами импульса и координат, легко показать, что временная эволюция $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порожденная оператором $H_{\lambda,\,\text{ren}}$, будет выражаться соотношениями (2), но через свои операторы координат и импульса:

$$Q(t) = \langle\langle \cos(D^{1/2}_{\lambda} t)\, \overline{q}_{\text{ren}}, e_I \rangle\rangle + \langle\langle D^{-1/2}_{\lambda} \sin(D^{1/2}_{\lambda} t)\, \overline{p}_{\text{ren}}, e_I \rangle\rangle,$$

где

$$\overline{q}_{\text{ren}} = (Q_{\text{ren}}, q_{\text{ren}}), \quad q_{\text{ren}} = (q_{k,\,\text{ren}})_{k\in\mathbb{Z}^d},$$

$$\overline{p}_{\text{ren}} = (P_{\text{ren}}, p_{\text{ren}}), \quad p_{\text{ren}} = (p_{k,\,\text{ren}})_{k\in\mathbb{Z}^d}.$$

Учитывая вид операторов $\overline{q}_{\text{ren}}$ и $\overline{p}_{\text{ren}}$, получаем

$$Q(t) = \langle\langle \cos(D^{1/2}_{\lambda} t)\, \xi, e_I \rangle\rangle + \frac{1}{i}\Big[\langle\langle D^{-1/2}_{\lambda} \sin(D^{1/2}_{\lambda} t)\, \overline{\nabla}, e_I \rangle\rangle -$$

$$- \langle\langle D^{-1/2}_{\lambda} \sin(D^{1/2}_{\lambda} t)\, D^{1/2}_{0} \xi, e_I \rangle\rangle\Big],$$

где

$$D_0 = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

а $\overline{\nabla}$ рассматривается как оператор в $\mathfrak{X}$. Рассмотрим усреднение действия квадрата оператора эволюции координаты выделенного осциллятора на функцию из $\mathfrak{X}$, тождественно равную единице по степеням свободы термостата, т. е.

$$(Q^2(t)\, 1 \otimes \mathbf{1},\; 1 \otimes \mathbf{1})_{L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\, \gamma_s)}.$$

В результате усреднения по всем переменным получим константу вследствие унитарности группы $e^{-itH_{\lambda,\,\text{ren}}}$:

$$Q(t)\, 1 \otimes \mathbf{1} = \langle\langle \cos(D^{1/2}_{\lambda} t)\, \xi, e_I \rangle\rangle + i\, \langle\langle D^{-1/2}_{\lambda} \sin(D^{1/2}_{\lambda} t)\, D^{1/2}_{0} \xi, e_I \rangle\rangle,$$

$$(Q^2(t)\, 1 \otimes \mathbf{1},\; 1 \otimes \mathbf{1})_{L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\, \gamma_s)} = \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \big(\langle\langle \cos(D^{1/2}_{\lambda} t)\, \xi, e_I \rangle\rangle +$$

$$+ i\, \langle\langle D^{-1/2}_{\lambda} \sin(D^{1/2}_{\lambda} t)\, D^{1/2}_{0} \xi, e_I \rangle\rangle\big)^2 \, d\gamma_s(x).$$

Применяя формулы интегрирования по гауссовской мере, имеем

$$(Q^2(t)\, 1 \otimes \mathbf{1},\ 1 \otimes \mathbf{1}) = \kappa^2 \langle\langle(\cos(D_\lambda^{1/2} t) + i\omega_0 D_\lambda^{-1/2} \sin(D_\lambda^{1/2} t))\, e_l,\ e_l\rangle\rangle^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\langle\langle D_0^{-1/2} P_x \cos(D_\lambda^{1/2} t)\, e_l,\ P_x \cos(D_\lambda^{1/2} t)\, e_l\rangle\rangle +$$

$$+ i\,\langle\langle P_x \cos(D_\lambda^{1/2} t)\, e_l,\ P_x \sin(D_\lambda^{1/2} t)\, D_\lambda^{-1/2} e_l\rangle\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\langle\langle P_x \sin(D_\lambda^{1/2} t)\, D_\lambda^{-1/2} e_l,\ D_0^{1/2} P_x \sin(D_\lambda^{1/2} t)\, D_\lambda^{-1/2} e_l\rangle\rangle,$$

где $P_x\xi = P_x(\kappa, x) = (0, x)$.

Легко видеть, что если $\sigma(D_\lambda) = \sigma_{ac}(D_\lambda)$, то $(Q^2(t)\, 1 \otimes \mathbf{1},\ 1 \otimes \mathbf{1}) \to 0$, $t \to \infty$, поскольку в этом случае $e^{itD_\lambda^{1/2}} f \to 0$, $t \to \infty$, в слабом смысле [3] (§ XI.3). Заметим далее, что

$$Q(t)\underset{\sim}{Q} = Q(t) f(\kappa) \otimes \mathbf{1} = f(\kappa) Q(t)\, 1 \otimes \mathbf{1} +$$

$$+ (-i^{-1}\omega_0 \kappa f(\kappa) + i^{-1} f'(\kappa))\langle\langle e_l,\ D_\lambda^{-1/2} \sin(D_\lambda^{1/2} t)\, e_l\rangle\rangle,$$

$$\varphi(t) = (Q^2(t)\, \underset{\sim}{Q},\ \underset{\sim}{Q}) = f^2(\kappa)(Q^2(t)\, 1 \otimes \mathbf{1},\ 1 \otimes \mathbf{1}) -$$

$$- f'(\kappa)^2 \langle\langle e_l,\ D_\lambda^{-1/2} \sin(D_\lambda^{1/2} t)\, e_l\rangle\rangle^2.$$

Сходимость к нулю первого слагаемого показана выше, сходимость второго следует из тех же соображений. Таким образом, $\varphi(t) \to 0$, $t \to \infty$, и теорема доказана.

3. Свойства динамической матрицы и условия затухания в терминах параметров взаимодействия. Введем функцию $\Delta(s) = \omega_0^2 - s + \langle(s - D)^{-1}\lambda,\ \lambda\rangle$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\lambda) = (-\infty, m^2) \cup (M^2, +\infty) \cup \{s \in [m^2, M^2]\colon\ \lambda \in D((s - D)^{-1})\}.$$

Теорема 2 (свойства оператора D_λ в терминах параметров взаимодействия). *Пусть выполняется условие* (1). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. D_λ *строго положителен* $\Leftrightarrow$

$$\| s\lambda \| < \omega_0. \tag{3}$$

1′. D_λ *положителен* $\Leftrightarrow$

$$\| s\lambda \| \le \omega_0. \tag{3′}$$

2. $\sigma(D_\lambda) = \sigma_{ac}(D_\lambda) \cup \Sigma$, *где множество* Σ *либо пусто, либо точечный спектр*, $\sigma_{ac}(D_\lambda) = [m^2, M^2]$.

3. *Пусть*

$$\forall\ s \in \mathcal{D}(\Delta) \cap [m^2, M^2]\colon\ \Delta(s) \ne 0. \tag{4}$$

Тогда Σ *определяется из таблицы*

	$\Delta_M \le 0$	$\Delta_M > 0$
$\Delta_m \ge 0$	$\{\varnothing\}$	$\{S^*\}$
$\Delta_m < 0$	$\{S_*\}$	$\{S_*,\ S^*\}$

где совмещение указанных по горизонтали и вертикали требований указывает на характер множества Σ, $s_* < m^2$, $s^* > M^2$, $\Delta_m = \lim_{s\uparrow m^2} \Delta(s)$, $\Delta_M = \lim_{s\downarrow M^2} \Delta(s)$.

Доказательство. 1. Действительно, пусть $\|s\lambda\| < \omega_0 \Rightarrow \exists\, \delta\colon\ 0 < \delta < 1$: $\| s\lambda \| < \delta\omega_0$. Представим $\xi = (\kappa,\ x)$, воспользуемся видом оператора D_λ и применим дважды неравенство Коши — Буняковского. В результате получим

$$\langle\langle D_\lambda\xi, \xi\rangle\rangle = \omega_0^2\kappa^2 + 2\kappa\langle\lambda,\ \kappa\rangle + \langle Dx, x\rangle \geq$$

$$\geq \omega_0^2(1-\delta^2)\kappa^2 + \frac{m^2}{\delta^2\omega_0^2}\|x\|^2\,(\delta^2\omega_0^2 - \|s\lambda\|^2) \geq$$

$$\geq \min\left(\omega_0^2(1-\delta^2),\ \frac{m^2}{\delta^2\omega_0^2}\left(\delta^2\omega_0^2 - \|s\lambda\|^2\right)\right) |||\xi|||^2.$$

Легко видеть, что множитель перед $|||\xi|||^2$ положительный, а значит, D_λ — строго положительный оператор (здесь $|||\cdot|||$ — норма в $l_2(\mathbb{R}^{\{l\}\cup\mathbb{Z}^d})$, $\|\cdot\|$ — норма в $l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$).

Пусть неравенство не выполняется. Положим $\xi = (-1,\ D^{-1}\lambda)$. Тогда

$$\langle\langle D_\lambda\xi,\ \xi\rangle\rangle = \langle\langle D_\lambda(-1,\ D^{-1}\lambda),\ (-1,\ D^{-1}\lambda)\rangle\rangle =$$

$$= \omega_0^2 - \langle D^{-1}\lambda,\ \lambda\rangle = \omega_0^2 - \|s\lambda\|^2 \leq 0,$$

т. е. D_λ не является положительным.

1′. Доказательство аналогичное.

2. Будем рассматривать оператор D_λ как возмущение оператором Гильберта — Шмидта L_λ оператора D_0:

$$D = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & l_\lambda \\ l_\lambda^* & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_\lambda \\ l_\lambda^* & 0 \end{pmatrix} =: D_0 + L_\lambda.$$

Покажем, что L_λ — оператор Гильберта — Шмидта в силу выполнения (1).

Известно [4] (гл. 15), что

$$\sigma(D_0) = \sigma_{ac}(D_0) \cup \sigma_p(D_0),$$

$$\sigma_{ac}(D_0) = \sigma_{ac}(D) = [m^2,\ M^2],\ \ \sigma_p(D_0) = \{\omega_0^2\}.$$

При таком возмущении собственные значения могут появляться и исчезать, но в остальном спектр остается неизменным [4] (гл. 15). Таким образом, $\sigma(D_\lambda) = \sigma_{ac}(D_\lambda) \cup \Sigma$, где $\sigma_{ac}(D_\lambda) = [m^2,\ M^2]$, а множество Σ либо пусто, либо является точечным спектром.

3. Перейдем к нахождению точечного спектра оператора D_λ. Найдем его собственное значение η, $\eta \in \mathbb{R}$ (в силу симметричности D_λ), и соответствующий собственный вектор ξ, $\xi \neq 0$, $\xi \in l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$:

$$(D_\lambda - \eta)\xi = (D_\lambda - \eta)\,(\kappa,\ x) = (\omega_0^2\kappa + \langle\lambda,\ x\rangle,\ Dx + \kappa\lambda) - \eta\,(\kappa,\ x) = 0.$$

В силу ограниченности D и выполнения (1)

$$\omega_0^2\kappa + \langle\lambda,\ x\rangle \in \mathbb{C}^1,\ Dx + \kappa\lambda \in l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}).$$

Для нахождения собственных векторов и значений оператора D_λ получим систему

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \kappa + \langle \lambda, x \rangle &= \eta \kappa, \\ Dx + \kappa\lambda &= \eta x. \end{aligned} \tag{5}$$

Легко показать, что $\kappa \neq 0$, $x \neq 0$, предположив обратное. Очевидно, $\eta \overline{\in} [m^2, M^2]$, иное противоречило бы условию (4). Поскольку $\kappa \neq 0$, полагаем $\kappa = 1$ и из (5) получаем

$$\omega_0^2 - \eta + \langle (\eta - D)^{-1}\lambda, \lambda \rangle = \Delta(\eta) = 0.$$

Из приведенных рассуждений видно, что собственные значения оператора D_λ существуют тогда и только тогда, когда существуют нули функции $\Delta(s)$, и совпадают с ними. Заметим, что если собственное значение η существует, то ему отвечает собственный вектор $(1, (\eta - D)^{-1}\lambda)$. Непрерывность и строгая монотонность функции $\Delta(s)$ на каждом из интервалов $(-\infty, m^2)$ и $(M^2, +\infty)$ очевидны. Легко проверить также и то, что $\Delta(s) \to \pm\infty$, $s \to \mp\infty$. Из этих рассуждений следует, что

$$\exists!\ s_* < m^2: \quad \Delta(s_*) = 0 \Leftrightarrow \Delta_m < 0,$$

$$\exists!\ s_* > M^2: \quad \Delta(s^*) = 0 \Leftrightarrow \Delta_M > 0.$$

Теорема доказана.

Пусть выполняется условие (3), что равносильно $\Delta(0) > 0$. Тогда $s_* > 0$ в силу монотонного убывания $\Delta(s)$ на $(-\infty, m^2)$. Введем обозначения $s_* = \omega_m^2$, $s^* = \omega_M^2$.

Замечания. **1.** Из вида функции $\Delta(s)$ и свойств оператора D_λ легко получить следующие утверждения.

Достаточным условием существования нуля функции $\Delta(s)$ (собственного значения у оператора D_λ) является выполнение одного из неравенств $\omega_0 < m$, $\omega_0 > M$.

Необходимым условием отсутствия нулей функции $\Delta(s)$ (или того, что $\sigma(D_\lambda) = \sigma_{ac}(D_\lambda)$) является выполнение неравенства $m < \omega_0 < M$.

2. Пусть $\Delta_m = 0$ $(\Delta_M = 0)$. Если не выполняется условие (4) в точке m^2 (M^2), то $\omega_m^2 = m^2$ $(\omega_M^2 = M^2)$.

3. В формулировке теоремы 2 можно отказаться от условий в терминах функции $\Delta(s)$ и перейти к эквивалентным формулировкам в терминах параметров взаимодействия. Например,

$$(4) \Leftrightarrow \forall\, s \in [m^2, M^2]: \lambda \in \mathcal{D}((s-D)^{-1}): \langle (s-D)^{-1}\lambda, \lambda \rangle \neq s - \omega_0^2;$$

$$\Delta_M < 0 \Leftrightarrow \lim_{s \downarrow M^2} \langle (s-D)^{-1}\lambda, \lambda \rangle < M^2 - \omega_0^2 \quad \text{и т. д.}$$

Теорема 3 (критерий затухания осциллятора). *Пусть выполняются условия* (1) – (3). *Тогда* $\varphi(t) \to 0$, $t \to \infty \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{s \uparrow M^2} \langle (D-s)^{-1}\lambda, \lambda \rangle &\le \omega_0^2 - m^2, \\ \lim_{s \downarrow M^2} \langle (s-D)^{-1}\lambda, \lambda \rangle &\le M^2 - \omega_0^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. В силу выполнения условий (1) – (4) к оператору D_λ применима теорема 2. Из (3) $\Rightarrow D_\lambda$ — строго положительный, из (6) $\Rightarrow \sigma(D_\lambda) = \sigma_{ac}(D_\lambda)$. Т. е. применима теорема 1 и $\varphi(t) \to 0,\ t \to \infty$.

Пусть условие (6) не выполняется. Тогда в силу теоремы 2 $\sigma_p(D_\lambda) \neq \{\varnothing\}$. Пусть $\sigma_p(D_\lambda) = \{\omega_m^2\}$. Рассмотрим $\varphi(t)$ для $\underset{\sim}{Q} = 1 \otimes \mathbf{1}$:

$$\varphi(t) = \kappa^2 \langle\langle (\cos(D_\lambda^{1/2} t) + i\omega_0 D_\lambda^{-1/2} \sin(D_\lambda^{1/2} t))\, e_l,\ e_l \rangle\rangle^2 + \ldots$$

(остальные слагаемые не содержат κ).

Поскольку $\sigma(D_\lambda) = \sigma_{ac}(D_\lambda) \cup \sigma_p(D_\lambda)$, то справедливо разложение в виде прямой суммы проекции на абсолютно непрерывное и собственное подпространства

$$l_2(\mathbb{R}^{\{l\} \cup \mathbb{Z}^d}) = P_{ac}(l_2(\mathbb{R}^{\{l\} \cup \mathbb{Z}^d})) \oplus P_p(l_2(\mathbb{R}^{\{l\} \cup \mathbb{Z}^d})).$$

Заменим e_l на $P_{ac} e_l + P_p e_l$ в главном члене $\varphi(t)$. Он распадается на три слагаемых, два из которых содержат сомножителем [3]

$$\langle\langle (\cos(D_\lambda^{1/2} t) + i\omega_0 D_\lambda^{-1/2} \sin(D_\lambda^{1/2} t))\, P_{ac} e_l,\ e_l \rangle\rangle \to 0,\quad t \to \infty.$$

Третье слагаемое имеет вид

$$\kappa^2 \langle\langle (\cos(D_\lambda^{1/2} t) + i\omega_0 D_\lambda^{-1/2} \sin(D_\lambda^{1/2} t))\, P_p e_l,\ e_l \rangle\rangle^2 =$$

$$= \kappa^2 (\cos(\omega_m t) + i\,(\omega_0 / \omega_m) \sin(\omega_m t))^2 \langle\langle P_p e_l,\ e_l \rangle\rangle^2 \not\to 0,\quad t \to \infty,$$

поскольку $\langle\langle P_p e_l,\ e_l \rangle\rangle \neq 0$, что следует из вида собственного вектора, найденного при доказательстве теоремы 2. Следовательно, $\varphi(t) \not\to 0,\ t \to \infty$. Аналогично поступаем, когда $\sigma_p(D_\lambda) = \{\omega_M^2\}$ или $\sigma_p(D_\lambda) = \{\omega_m^2,\ \omega_M^2\}$. Теорема доказана.

Замечание 4. Вместо условия (3) достаточно требовать выполнения условия (3′) вместе с $\mathcal{D}(D_\lambda^{-1/4}) \supset \mathbb{R}_0^{\{l\} \cup \mathbb{Z}^d}$ (см. замечание к теореме 1 и п. 1′ теоремы 2). Отметим еще, что необходимым условием затухания осциллятора есть $m < \omega_0 < M$ (см. замечание 1 к теореме 2 и теорему 1). Достаточным для выполнения условия (4) является условие [5]

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\Delta(s \pm i\varepsilon)| > 0 \quad \forall\, s \in [m^2,\ M^2].$$

Здесь областью определения функции $\Delta(s)$ считается область $\mathbb{C} \setminus [m^2,\ M^2]$.

1. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
2. *Глаубер Р.* Когерентность и детектирование квантов // Когерентные состояния в квантовой теории. – М.: Мир, 1972. – С. 26 – 70.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1982. – Т. 3. – 443 с.
4. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352 с.
5. *Arai A.* Spectral Analysis of a Quantum Harmonic Oscillator Coupled to Infinitely Many Scalar Bosons // Hokkaido University preprint series in mathematics. – 1987. – № 16. – 37 p.

Получено 11. 03. 92