УДК 517.95

І. Я. Кміть, асп. (Львів. ун-т)

ПРО ОДНУ НЕЛОКАЛЬНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

A mixed problem with nonlocal conditions in a space variable is considered for the systems of quasilinear first-order hyperbolic equations with two independent variables. The sufficient conditions for the solvability of the system are given.

Для системи квазілінійних гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними розглядається мішана задача, з нелокальними умовами по просторовій змінній. Наводяться достатні умови розв'язуваності.

Гіперболічні системи з двома незалежними змінними досліджувались багатьма авторами. Розглядались як класичні задачі, так і задачі з нерозділеними або інтегральними умовами. Так, некласичні задачі досліджувались у роботах [1 – 8]. Близькі задачі розглядались у роботах [9 – 11].

Нехай γ_s — криві, задані рівняннями $x = a_s(t)$, $s = \overline{0, m+1}$, причому $a_s \in C^1[0, T]$, $a_{s+1}(t) > a_s(t)$ при $t \in [0, T]$. В області $\Omega^T = \{(x, t)\colon a_0(t) < x < a_{m+1}(t), 0 < t < T\}$ розглянемо систему

$$u_{it} - \lambda_i(x, t, u)u_{ix} = f_i(x, t, u), \qquad i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Будемо припускати, що всі функції $\lambda_i(x, t, u)$, $f_i(x, t, u)$ визначені в області $D^T_{M_0} = \Omega^T \times \{ u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = \max\limits_{i = \overline{1, n}} |u_i| \le M_0\}$, вимірні та обмежені по модулю в $D^T_{M_0}$ константами Λ і F відповідно, причому M_0 задовольняє ряд умов, які формулюються нижче. Зокрема, при всіх $t \in [0, T]$, $u \in \{u\colon u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \le M_0\}$ і при кожному $i = \overline{1, n}$, $s = \overline{0, m+1}$, повинна виконуватись умова

$$\operatorname{sgn}(\lambda_i(a_s(t), t, u) - a'_s(t)) = \text{const} \neq 0.$$

Нехай існують невід'ємні, сумовні на $[0 T]$ функції $\Lambda_i(t)$ і $F_i(t)$, $i = 1, 2$, такі, що майже для всіх $t \in [0, T]$ при $(x_1, t, u^{(1)}), (x_2, t, u^{(2)}) \in D^T_{M_0}$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered} |\lambda_i(x_1, t, u^{(1)}) - \lambda_i(x_2, t, u^{(2)})| \le \\ \le \Lambda_1(t)|x_1 - x_2| + \Lambda_2(t)\|u^{(1)} - u^{(2)}\|, \qquad i = \overline{1, n}, \\ |f_i(x_1, t, u^{(1)}) - f_i(x_2, t, u^{(2)})| \le \\ \le F_1(t)|x_1 - x_2| + F_2(t)\|u^{(1)} - u^{(2)}\|, \quad i = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{2}$$

Будемо вимагати також, щоб $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ у $D^T_{M_0}$, причому якщо для деякого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ існує хоча б одна точка $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega}^T$ така, що $\lambda_i(x_0, t_0, u(x_0, t_0)) = \lambda_{i+1}(x_0, t_0, u(x_0, t_0))$, то $\lambda_i(x, t, u) \equiv \lambda_{i+1}(x, t, u)$, $(x, t, u) \in D^T_{M_0}$.

Позначимо через $A_0(L, T)$ метричний простір неперервних функцій $v\colon \Omega^T \to \mathbb{R}^n$ з рівномірною метрикою, які задовольняють умову Ліпшіца по x, t з константою L. Якщо $(x, t, v) \in D^T_{M_0}$, то в силу зроблених вище припущень в області Ω^T існує узагальнений (по Каратеодорі [12, с. 194 – 199] розв'язок

$\omega_i(\tau; x, t, v)$ задачі

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\lambda_i(\xi, \tau, v(\xi, \tau)), \ \xi(t) = x, \quad v \in A_0(L, T). \tag{3}$$

Позначимо через $t_i(x, t, v)$ найменше значення τ [12, с. 194 – 195], при якому характеристика $\omega_i(\tau; x, t, v)$ досягає границі Ω^T. Нехай N — кількість характеристик системи (1), які проходять через точки $(a_0(0), 0)$, $(a_{m+1}(0), 0)$ та область Ω^T. Систему (1) будемо розглядати з початковими умовами

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \qquad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

та умовами, які замінюють граничні на γ_0 і γ_{m+1}:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{m+1} b_{ijs}(t) u_j(a_s(t), t) = h_i(t), \qquad i = \overline{1, N}, \tag{5}$$

де $\varphi_i(x)$, $b_{ijs}(t)$, $h_i(t)$ — неперервні та ліпшицеві з константами Φ_1, B_1 і H_1 відповідно, причому

$$\Phi = \max_{a_0(0) \le x \le a_{m+1}(0)} \| \varphi(x) \| < M_0.$$

Припустимо також існування таких сталих $\Lambda_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in \ ]\, 0, \min|a_0(t) - - a_{m+1}(t)|\,]$, що

$$-\lambda_i(x, t, u) - a_0'(t) \ \ (i = \overline{1, p}, \, a_0(t) \le x \le a_0(t) + \varepsilon_0)$$

і

$$\lambda_i(x, t, u) + a_{m+1}'(t) \ (i = \overline{n+p+1-N, n}, \, a_{m+1}(t) - \varepsilon_0 \le x \le a_{m+1}(t))$$

не менші Λ_0. Тут p — кількість характеристик, що проходять через точку $(a_0(0), 0)$ та область Ω^T.

Для кожного $i = \overline{1, n}$ позначимо через $\Omega_{\varphi i}^{T, v}$, $\Omega_{0i}^{T, v}$, $\Omega_{m+1, i}^{T, v}$ множини точок $(x, t) \in \overline{\Omega}$, для яких відповідно

$$t_i(x, t, v) = 0; \ \ t_i(x, t, v) > 0$$

і

$$\omega_i(t_i(x, t, v); x, t, v) = a_0(t_i(x, t, v)); \ t_i(x, t, v) > 0$$

і

$$\omega_i(t_i(x, t, v); x, t, v) = a_{m+1}(t_i(x, t, v)).$$

Введемо ще деякі позначення:

$$\mu_i(t) = u_i(a_0(t), t), \qquad i = \overline{1, p};$$

$$\nu_i(t) = u_i(a_{m+1}(t), t), \qquad i = \overline{n+p+1-N, n};$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{110} \dots b_{1p0} \, b_{1,\, n+p+1-N,\, m+1} \dots b_{1, n, m+1} \\ b_{210} \dots b_{2p0} \, b_{2,\, n+p+1-N,\, m+1} \dots b_{2, n, m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{N10} \dots b_{Np0} \, b_{N,\, n+p+1-N,\, m+1} \dots b_{N, n, m+1} \end{pmatrix},$$

припускаючи при цьому, що $\det B \ne 0$, $t \in [0, T]$.

Під узагальненим розв'язком задачі (1), (4), (5) будемо розуміти ліпшіцевий розв'язок системи інтегро-операторних рівнянь

$$u_i(x,t) = (R_i u)(x,t) +$$

$$+ \int\limits_{t_i(x,t,u)}^{t} f_i(\omega_i(\tau; x, t, u), \tau, u(\omega_i(\tau; x, t, u), \tau))d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6}$$

де

$$(R_i u)(x,t) = \begin{cases} \varphi_i(\omega_i(0; x, t, u)), & (x,t) \in \Omega_{\varphi i}^{T,u}, \\ \mu_i(t_i(x,t,u)), & (x,t) \in \Omega_{0i}^{T,u}, \\ \nu_i(t_i(x,t,u)), & (x,t) \in \Omega_{m+1,\,i}^{T,u}, \end{cases}$$

причому

$$\begin{aligned} \mu_i(t) &= Q_i(t), \quad i = \overline{1, p}, \\ \nu_i(t) &= Q_i(t), \quad i = \overline{n+p+1-N, n}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$Q_i(t) = \frac{1}{\det B(t)} \sum_{j=1}^{N} B_{ij}(t) \left[h_j(t) - \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} b_{jls}(t) \tilde{Q}_l(a_s(t), t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{l=p+1}^{n} b_{jl0}(t) \tilde{Q}_l(a_0(t), t) - \sum_{l=1}^{n+p-N} b_{j,\,l,\,m+1}(t) \tilde{Q}_l(a_{m+1}(t), t) \right],$$

$$\tilde{Q}_l(x,t) = (R_l u)(x,t) + \int\limits_{t_l(x,t,u)}^{t} f_l(\omega_l(\tau; x, t, u), \tau, u)d\tau,$$

B_{ji}, i, $j = \overline{1, N}$, — алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці B. Очевидно, що для існування узагальненого розв'язку необхідною є умова узгодженості 0-го порядку:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{m+1} b_{ijs}(0) \varphi_j(a_s(0)) = h_i(0), \quad i = \overline{1, N}. \tag{8}$$

У просторі $A_0(L, T_1)$ ($T_1 \in \,]0, T\,]$) розглянемо кулю

$$A(L, T_1, M) = \{ u \in A_0(L, T_1) \colon \max_{\Omega^{T_1}} \| u - \varphi \| \le M \},$$

де $0 < M \le M_0 - \Phi$. Тоді при $u \in A(L, T_1, M)$ маємо $\| u \| \le M + \Phi \le M_0$.

Позначимо через S оператор, заданий формулами (6) и визначений на $A(L, T_1, M)$.

Теорема. *При виконанні всіх припущень, зроблених відносно задачі* (1), (4), (5), *можна вказати таке* $T_1 \in \,]\,0\, T\,]$, *що в* Ω^{T_1} *існує єдиний узагальнений розв'язок цієї задачі, який належить* $A(L, T_1, M)$.

Доведення. Покажемо спочатку існування таких L, T_1, що S відображає кулю $A(L, T_1, M)$ повного метричного простору в себе і є стискуючим. Для цього встановимо ліпшіцевість $\mu_i(t)$ і $\nu_j(t)$. Використовуючи (2), (3) та лему Гронуолла, одержуємо

$$\begin{aligned} |\omega_i(\tau; x_1, t, u) - \omega_i(\tau; x_2, t, u)| &\le E|x_1 - x_2|, \quad i = \overline{1, n}, \\ |\omega_i(\tau; x, t_1, u) - \omega_i(\tau; x, t_2, u)| &\le \Lambda E|t_1 - t_2|, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$|\omega_i(\tau; x, t, u) - \omega_i(\tau; x, t, v)| \le EQ_3 \max_{\Omega^{T_1}} \|u - v\|, \quad i = \overline{1, n},$$

де

$$E = \exp\left(\int_0^{T_1} (\Lambda_1(\tau) + L\Lambda_2(\tau))\, d\tau\right), \quad Q_3 = \int_0^{T_1} \Lambda_2(\tau)\, d\tau.$$

Нехай T_1 таке, що характеристики $\omega_i(\tau; a_1(T_1), T_1, u(a_1(T_1), T_1))$ і $\omega_i(\tau; a_m(T_1), T_1, u(a_m(T_1), T_1))$, $i = \overline{1, n}$, де $u \in A(L, T_1, M)$, перетинають $t = 0$ у межах Ω^{T_1}. Тоді, враховуючи (6) – (9), $\forall\, t_1, t_2 \in [0, T_1]$ одержуємо

$$\max_{\substack{i=\overline{1, p},\\ j=\overline{n+p+1-N, n}}} \{|\mu_i(t_1) - \mu_i(t_2)|, |\nu_j(t_1) - \nu_j(t_2)|\} \le L_1 |t_1 - t_2|,$$

де L_1 залежать від $L, N, n, m, \lambda_i, f_i, a_i, b_{ijs}, h_i, \varphi_i, T_1$.

Нехай тепер $(x, t) \in \Omega^{T_1}$, $u \in A(L, T_1, M)$. Тоді, враховуючи (8), маємо

$$\|Su - \varphi\| \le (L_1 + \Phi_1 \Lambda + F) T_1.$$

Вибираючи тепер T_1 так, щоб виконувались нерівності

$$\Lambda T_1 \le \frac{\min_t |a_{m+1}(t) - a_0(t)|}{2}, \quad \Lambda T_1 \le \varepsilon_0,$$

легко одержуємо, що за спільну константу Ліпшіца функцій Su по x і t можна прийняти $\max\{L^*, F + \Lambda L^*\}$, де

$$L^* = (Q_1 + LQ_2 + \max\{\Phi_1, \tilde{\Lambda}_0^{-1}(L_1 + F)\})E,$$

$$Q_i = \int_0^{T_1} F_i(\tau)\, d\tau, \quad i = 1, 2; \quad \tilde{\Lambda}_0 = \min_{\substack{i=\overline{1, 3}\\ \tilde{\Lambda}_i \ne 0}} \tilde{\Lambda}_i,$$

$$\tilde{\Lambda}_1 \le |\lambda_i(x, t, u)|, \quad a_0(t) \le x \le a_0(t) + \varepsilon_0, \quad t \in [0, T], \quad u \in D^T_{M_0}, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\tilde{\Lambda}_2 \le |\lambda_i(x, t, u)|, \quad a_{m+1}(t) - \varepsilon_0 \le x \le a_{m+1}(t),$$

$$t \in [0, T], \quad u \in D^T_{M_0}, \quad i = \overline{n + p + 1 - N, n},$$

$$\tilde{\Lambda}_3 = \min_t \{|a_0'|, |a_{m+1}'|\}$$

($\tilde{\Lambda}_i$ не всі рівні 0).

Таким чином, при

$$L > \max\{\max\{\Phi_1, \tilde{\Lambda}_0^{-1}(L_1^* + F)\}, F + \Lambda\max\{\Phi_1, \tilde{\Lambda}_0^{-1}(L_1^* + F)\}\},$$

де L_1^* залежить від $N, n, m, \lambda_i, f_i, b_{ijs}, h_i, a_i, \varphi_i$ і при достатньо малому T_1 оператор S відображає $A(L, T_1, M)$ в себе.

Для того, щоб S було стискуючим, як неважко перевірити, достатньо виконання нерівностей

$$2MEQ_3 \le \varepsilon_0,$$

$$(\Phi_1 + \tilde{\Lambda}_0^{-1}(L_1 + F) + Q_1 + LQ_2)EQ_3 + Q_2 < 1,$$

які будуть виконуватись при достатньо малому T_1.

Знаходячись в умовах принципу стискуючих відображень, одержуємо необхідне твердження теореми.

***Зауваження* 1.** Нехай γ_s — гладкі криві, які задовольняють умови: $a_s(0) = 0$; $a_{s+1}(t) > a_s(t)$, $t > 0$. Тоді, розглядаючи задачу (1), (5) в області G, яка являє собою криволінійний сектор у верхній півплощині $t > 0$ площини xOt, обмежений кривими γ_0, γ_{m+1} і прямою $t = T$, можна довести аналогічну теорему існування та єдиності узагальненого розв'язку.

2. Якщо до умови існування та єдиності узагальненого розв'язку додати додаткову гладкість вихідних даних задачі, а також умову узгодженості 1-го порядку, то в теоремі розв'язок можна вважати класичним. Це твердження відноситься і до задачі (1), (5) в області G.

3. Нехай виконуються умови наведеної вище теореми. Крім цього, нехай λ_i та f_i, $i = \overline{1, n}$, не спадні по x при фіксованих t, u і не спадні по u при фіксованих x, t.

Припустимо також, що кількість характеристик, які виходять із точок $(a_0(0), 0)$, $(a_{m+1}(0), 0)$ і попадають в Ω^T, рівна n. Нехай при цьому $f_i \geq 0$, $i = \overline{1, p}$: $f_i \leq 0$, $i = \overline{p+1, n}$; функції μ_i, $i = \overline{1, p}$, — не спадні, а ν_i, $i = \overline{p+1, n}$, — не зростаючі.

Нехай також існує сумовна на $\{0, T\}$ функція $M(t)$ і неперервна неспадна функція ψ: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для якої

$$\int^{\infty} \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = \infty$$

а в $\Omega^T \times \mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$|f_i(x, t, u)| \leq M(t)\psi(\|u\|), \qquad i = \overline{1, n}.$$

При цих припущеннях одержано результат нелокальної розв'язуваності розглядуваної задачі.

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 263 с.
2. *Кирилич В. М.* Неклассическая задача с интегральными ограничениями для двумерной гиперболической системы первого порядка // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. Вопросы мат. анализа и его прил. – 1983. – Вып. 21. – С. 60 – 64.
3. *Кирилич В. М.* Одна неклассическая граничная задача для двумерной гиперболической системы первого порядка с разрывными коэффициентами // Общая теория граничных задач: Сб. научн. тр. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 267.
4. *Мельник З. О.* Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы с двумя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, №6. – С. 1096 – 1104.
5. *Мельник З. О.* Задача с интегральными ограничениями для гиперболического уравнения второго порядка // Общая теория граничных задач: Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 281 – 282.
6. *Мельник З. О.* Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, №2. – С. 246 – 253.
7. *Мельник З. О., Кирилич В. М.* Задача без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений на прямой // Укр. мат. жур. – 1983. – **35**, №6. – С. 722 – 727.
8. *Кмить И. Я.* О нелокальных задачах для гиперболических систем первого порядка. – Львов, 1991. – 54 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, №79-Ук 91.
9. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. – 1960. – **50**, №2. – С. 423 – 442.
10. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, №3. – С. 488 – 500.
11. *Филимонов А. М.* Достаточные условия глобальной разрешимости смешанной задачи для квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными. – М., 1980. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, №6-81.
12. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Вища шк., 1974. – 472 с.

Одержано 17. 03. 92