УДК 517.535

А. Г. Бакан, А. П. Голуб, кандидаты физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ, НЕ УВЕЛИЧИВАЮЩИХ КОЛИЧЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

A complete description is given for the sequences $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ such that, for an arbitrary real polynomial $f(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$ and an arbitrary $A\in(0,+\infty)$, the number of roots of the polynomial $(Tf)(t) = \sum_{k=0}^{n}a_k\lambda_k t^k$ on $[0, AC]$ for some fixed $C\in(0,+\infty)$ does not exceed the number of roots of $f(t)$ on $[0, A]$.

Дана повна характеристика послідовностей $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ таких, що при деякому фіксованому $C\in(0,+\infty)$ для довільного дійсного многочлена $f(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$ та довільного $A\in(0,+\infty)$ число коренів многочлена $(Tf)(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda_k t^k$ на $[0, AC]$ не перевищує кількості коренів $f(t)$ на $[0, A]$.

В [1, с. 382] была сформулирована следующая проблема.

Проблема С. Карлина. Охарактеризовать последовательности множителей $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, не увеличивающие количества действительных нулей многочленов, т. е. такие, что для любого действительного многочлена $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda_k x^k\Big)\le\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\Big), \tag{1}$$

где $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(f)$ обозначает количество действительных нулей f с учетом их кратности.

Решение этой проблемы, приведенное в [2–5], оказалось ошибочным (см. [6]), и поэтому проблема С. Карлина остается открытой.

В настоящей статье охарактеризованы последовательности множителей $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ такие, что при некотором фиксированном $C\in(0,\infty)$ для произвольного действительного многочлена $f(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$ и произвольного $A\in(0,\infty)$ число корней многочлена $\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda_k x^k$ на $[0,A]$ не превышает количества корней $f(t)$ на $[0,A]$.

Введем некоторые обозначения: через τ будем обозначать класс всех последовательностей, не увеличивающих количества действительных нулей, т. е. обладающих свойством (1); каждое преобразование, определяемое такой последовательностью, будем обозначать через T, т. е. если $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$, то

$$(Tf)(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda_k x^k. \tag{2}$$

Докажем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Если* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in \tau$, *то существует неубывающая функция* $\mu(t)$ *на* $[0, +\infty)$ *и числа* $\delta_1 = \pm 1$ *и* $\delta_2 = \pm 1$ *такие, что*

$$\lambda_k = \delta_1 \int\limits_0^{\infty} (\delta_2 t)^k \, d\mu(t), \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{3}$$

Доказательство. Возьмем произвольный алгебраический многочлен

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k t^k$$

и образуем многочлен

$$f(x) = [P(t)]^2 + \varepsilon = \sum_{k, j=0}^{n} \xi_k \xi_j t^{k+j} + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$. Очевидно, многочлен $f(t)$ строго положителен на всей действительной оси и, значит, не имеет действительных корней. Применим к $f(t)$ линейное преобразование T, определяемое по формуле (2):

$$(Tf)(t) = \sum_{k, j=0}^{n} \xi_k \xi_j t^{k+j} \lambda_{k+j} + \varepsilon\lambda_0.$$

Легко видеть, что

$$(Tf)(0) = \xi_0^2 \lambda_0 + \varepsilon\lambda_0.$$

Если $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in \tau$, то $(Tf)(t)$ тоже не имеет действительных корней и, значит, сохраняет свой знак на всей действительной оси. В частности,

$$\operatorname{sign}(Tf)(1) = \operatorname{sign}\Big[\sum_{k, j=0}^{n} \xi_k \xi_j \lambda_{k+j} + \varepsilon\lambda_0 \Big] =$$

$$= \operatorname{sign}(Tf)(0) = \operatorname{sign}\lambda_0 =: \delta_1.$$

Учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, заключаем, что последовательность $\{\delta_1 \lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ является позитивной [7, с. 10]. Построим теперь, исходя из произвольного многочлена

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k t^k,$$

многочлен

$$f(t) = t\Big([P(t)]^2 + \varepsilon \Big) = \sum_{k, j=0}^{n} \xi_k \xi_j t^{k+j+1} + \varepsilon t, \quad \varepsilon > 0.$$

Применим к $f(t)$ преобразование T:

$$(Tf)(t) = \sum_{k, j=0}^{n} \xi_k \xi_j t^{k+j+1} \lambda_{k+j+1} + \varepsilon t \lambda_1.$$

Так как $f(t)$ имеет в точности один действительный корень $t = 0$ и $(Tf)(0) = 0$, то $Q(t) := \frac{1}{t}(Tf)(t)$ не может иметь действительных корней. Очевидно,

$$Q(0) = \xi_0^2\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1.$$

Поэтому

$$\operatorname{sign} Q(1) = \operatorname{sign}\Big[\sum_{k,j=0}^{n} \xi_k\xi_j\,\lambda_{k+j+1} + \varepsilon\lambda_1\Big] =$$

$$= \operatorname{sign} Q(0) = \operatorname{sign}\lambda_1 =: \delta_2/\delta_1.$$

Таким образом, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ последовательность $\{(\delta_2/\delta_1)\lambda_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ тоже является позитивной. Отсюда [7, с. 93] заключаем, что справедливо представление (3).

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Подкласс класса τ, определяемый такими условиями, будем обозначать через τ^+.

Предположим теперь, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in \tau^+$ обладает еще одним дополнительным свойством: существует положительная константа C такая, что для любого действительного многочлена $f(t)$ и любого $A \in (0,+\infty)$

$$\mathbb{Z}_{[0,CA]}(Tf) \le \mathbb{Z}_{[0,A]}(f), \tag{4}$$

где, по аналогии с ранее введенным обозначением, $\mathbb{Z}_{[0,A]}(f)$ — количество нулей многочлена $f(t)$ на отрезке $[0,A]$ с учетом их кратности. Соответствующий этому условию подкласс класса τ^+ будем обозначать через τ_C^+.

Лемма 2. *Если последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in \tau_C^+$, *то она представима в виде*

$$\lambda_k = \int_0^C t^k\,d\mu(t), \quad k = \overline{0,\infty}, \tag{5}$$

где $\mu(t)$ *— неубывающая функция на сегменте* $[0,C]$.

Доказательство. Легко заметить, что достаточно ограничиться рассмотрением случая $C = 1$. Рассмотрим алгебраический многочлен

$$f(x) = (1-t)^m t^n + \varepsilon = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k t^{k+n}A^{m-k} + \varepsilon,$$

где m и n — целые неотрицательные числа, а $\varepsilon > 0$. Он строго положителен на $[0,A]$ и, значит, не имеет нулей на этом отрезке. Применим к нему преобразование T, определяемое последовательностью $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in \tau_1^+$

$$(Tf)(t) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k t^{k+n}\lambda_{k+n}A^{m-k} + \varepsilon\lambda_0.$$

Исходя из наших предположений о последовательности $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, заключаем, что $(Tf)(t)$ строго положителен на $[0,A]$ и, в частности,

$$(Tf)(A) = A^{m+n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\lambda_{k+n} + \varepsilon\lambda_0 > 0.$$

Устремляя ε к 0, получаем условие Хаусдорфа [7, с. 97], из которого вытекает возможность представления (5). Отметим, что в нашем доказательстве мы использовали выполнение условия (4) лишь для одного фиксированного числа $A > 0$.

Представление (5) позволяет определять преобразование T не только на алгебраических многочленах, но и на произвольных функциях, непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$. Рассмотрим полином по степеням логарифма

$$g(t) = A^{m+n}\sum_{k=0}^{m} c_k(\ln t)^k. \tag{6}$$

Так как функция $g(t)$ в точке $t = 0$ может принимать неограниченные значения, то прямо определить на ней преобразование T нельзя. Поэтому определим преобразование T, соответствующее последовательности $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in \tau_1^+$, на функции

$$g_\rho(t) = t^\rho g(t), \quad \rho > 0, \tag{7}$$

по формуле

$$(Tg_\rho)(x) = \int_0^1 g_\rho(xt)\, d\mu(t) = x^\rho \int_0^1 t^\rho g(xt)\, d\mu(t). \tag{8}$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in \tau_1^+$. *Тогда для произвольного полинома*

$$g(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k(\ln t)^k$$

с действительными коэффициентами c_k, $k = \overline{0,m}$, $\sum_{k=0}^{m} c_k^2 > 0$, *для любого* $\rho > 0$ *и любого* $A \in (0, +\infty)$

$$\mathbb{Z}_{(0,A]}(Tg_\rho) \le \mathbb{Z}_{(0,A]}(g_\rho). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть полином $g(t)$ имеет на $(0, A]$ r корней (с учетом их кратности) $t_1, t_2, \ldots, t_r$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \frac{g_\rho(t)}{(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_r)}.$$

Функция $\varphi(t)$ будет непрерывной на $[0, A]$ и будет сохранять знак на $(0, A]$. Без ограничения общности будем считать ее на $(0, A]$ строго положительной. Согласно теореме Вейерштрасса функцию $\sqrt{\varphi(t)}$ можно приблизить на $[0, A]$ алгебраическим многочленом $P(t)$ так, чтобы

$$\|\sqrt{\varphi(t)} - P(t)\|_{C[0,A]} < \varepsilon$$

для произвольного наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим теперь алгебраический многочлен

$$Q(t) = ([P(t)]^2 + \varepsilon^2)(t - t_1) \ldots (t - t_r).$$

Очевидно, $Q(t)$ имеет в точности столько же нулей на $(0, A]$, сколько и $g(t)$.

Оценим на $[0, A]$ разность

$$|(Tg_\rho)(x) - (TQ)(x)| = \left| \int_0^1 [x^\rho t^\rho g(xt) - Q(xt)]\, d\mu(t) \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 [\varphi(xt)(xt - t_1) \ldots (xt - t_r) - ([P(xt)]^2 + \varepsilon^2) \times \right.$$

$$\left. \times (xt - t_1) \ldots (xt - t_r)]\, d\mu(t) \right| \leq \int_0^1 |xt - t_1| \ldots |xt - t_r| \left| \varphi(xt) - \right.$$

$$\left. - [P(xt)]^2 \right| d\mu(t) + \varepsilon^2 \int_0^1 |xt - t_1| \ldots |xt - t_r|\, d\mu(t) \leq$$

$$\leq A^r \int_0^1 |\sqrt{\varphi(xt)} - P(xt)|\, |\sqrt{\varphi(xt)} + P(xt)|\, d\mu(t) + A^r \varepsilon^2 \leq$$

$$\leq A^r \lambda_0 \|\sqrt{\varphi(t)} - P(t)\|_{C[0, A]} \|\sqrt{\varphi(t)} + P(t)\|_{C[0, A]} + A^r \varepsilon^2 \leq$$

$$\leq A^r \varepsilon \left(2\|\sqrt{\varphi(t)}\|_{C[0, A]} + \varepsilon \right) \lambda_0 + A^r \varepsilon^2. \tag{10}$$

Таким образом, величина

$$\|(Tg_\rho)(x) - (TQ)(x)\|_{C[0, A]}$$

может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе многочлена $P(t)$. Допустим теперь от противного, что $(Tg_\rho)(x)$ имеет на $(0, A]$ $q > r$ нулей. Без ограничения общности можно считать эти корни различными, иначе мы могли бы незначительным изменением коэффициентов полинома $g(t)$, не меняющим количества его нулей, добиться того, чтобы эти корни стали различными. Точно таким же образом можно достичь и того, чтобы ни один из этих корней не совпадал с точкой $x = A$. Упорядочим корни $(Tg_\rho)(x)$ так, чтобы $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_q < A$ и обозначим $x_0 := 0$, $x_{q+1} := A$. Введем величину

$$\kappa := \min_{j=\overline{0,q}} \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |(Tg_\rho)(x)| > 0$$

и, учитывая предыдущие рассуждения, получим

$$\|(Tg_\rho)(x) - (TQ)(x)\|_{C[0, A]} < \kappa.$$

Тогда, как легко видеть, алгебраический полином $(TQ)(x)$ будет иметь на $(0, A]$ не меньше нулей, чем $(Tg_\rho)(x)$. Таким образом, получим

$$\mathbb{Z}_{(0, A]}(TQ) \geq \mathbb{Z}_{(0, A]}(Tg_\rho) = q > r = \mathbb{Z}_{(0, A]}(g_\rho) = \mathbb{Z}_{(0, A]}(Q),$$

что противоречит предположению о том, что $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in \tau_1^+$. Лемма 3 доказана.

Это позволяет перейти к доказательству основного результата настоящей статьи.

Теорема. *Для того чтобы последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ *принадлежала классу* τ_C^+, $0 < C < +\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

i) последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ *представима в виде*

$$\lambda_k = \int_0^C t^k \, d\mu(t), \quad k = \overline{0, \infty},$$

где $\mu(t)$ — *неубывающая функция на* $[0, C]$;

ii) функция

$$\Phi(z) = \int_0^C t^z \, d\mu(t)$$

является аналитической в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ *и представима в виде*

$$\Phi(z) = \frac{\lambda_0 e^{\delta z}}{\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i z)}, \tag{11}$$

где все $a_i \geq 0$, $i = \overline{0, \infty}$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i < \infty$, $\delta \leq \ln C$.

Доказательство. Докажем сначала необходимость условий $i) - ii)$. Опять ограничимся случаем $C = 1$, так как распространение этого случая на любые $C \in (0, +\infty)$ несложно (для этого достаточно рассмотреть последовательность $\{\lambda_k / C^k\}_{k=0}^{\infty}$). Из леммы 3 имеем

$$\mathbb{Z}_{(0, A]}\left(\int_0^1 x^{\rho} t^{\rho} \sum_{k=0}^{m} c_k (\ln xt)^k d\mu(t) \right) \leq \mathbb{Z}_{(0, A]}\left(t^{\rho} \sum_{k=0}^{m} c_k (\ln t)^k \right) \tag{12}$$

для любых действительных c_k, $k = \overline{0, m}$, не равных одновременно нулю. Выполним в интеграле, находящемся в левой части (12), замену $u = -\ln t$ и положим $w = \ln x$. Получим

$$\mathbb{Z}_{(-\infty, \ln A]}\left(-\int_0^{\infty} e^{\rho(w-u)} \sum_{k=0}^{m} c_k (w-u)^k d\mu(e^{-u}) \right) \leq$$

$$\leq \mathbb{Z}_{(-\infty, \ln A]}\left(e^{\rho w} \sum_{k=0}^{m} c_k w^k \right),$$

или, учитывая произвольность $A \in (0, +\infty)$,

$$\mathbb{Z}_{(-\infty, 0]}\left(-\int_0^{\infty} e^{-\rho u} \sum_{k=0}^{m} c_k (w-u)^k d\mu(e^{-u}) \right) \leq$$

$$\leq \mathbb{Z}_{(-\infty, 0]}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k w^k \right). \tag{13}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3.2 из [1, с. 342]. Введем обозначения

$$f(w) = \sum_{k=0}^{m} c_k w^k, \tag{14}$$

$$F(w) = -\int_0^\infty e^{-\rho u} f(w-u)\, d\mu(e^{-u}), \tag{15}$$

$$s_k = -\int_0^\infty u^k e^{-\rho u}\, d\mu(e^{-u})\Big), \ k = \overline{0,\infty}. \tag{16}$$

Тогда если обозначить $D = d\,/\,dw$ и положить

$$U_m(D) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{s_k D^k}{k!}, \tag{17}$$

то равенство (15) можно переписать в виде

$$F(w) = U_m(D)\, f(w). \tag{18}$$

Применим к плотности $-e^{-\rho u} d\mu(e^{-u}),\ 0 \le u < +\infty$, преобразование Лапласа. Получим

$$\Phi(z) = -\int_0^\infty e^{-zu} e^{-\rho u} d\mu(e^{-u}) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{s_k z^k}{k!}, \tag{19}$$

Ряд (19) будет сходиться в некотором круге ненулевого радиуса. Так как $\Phi(0) = s_0 = \lambda_0 \ne 0$, то в некоторой окрестности V_0 точки $z = 0$ будет сходиться и ряд

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{k!} z^k. \tag{20}$$

Далее, так как $f(w)$ и $F(w)$ — многочлены, равенство (15) можно обратить:

$$f(w) = \Psi(D) F(w) = \Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{k!} D^k \Big) F(w). \tag{21}$$

Из равенства (13) вытекает, что

$$\mathbb{Z}_{(-\infty,\,0]}(F) \le \mathbb{Z}_{(-\infty,\,0]}(f),$$

и значит, если $F(w) = w^m$, то $\mathbb{Z}_{(-\infty,\,0]}(f) = m$. Из (21) в этом случае имеем

$$f(w) = \Psi(D) w^m = A_m(w) = \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{k!} \frac{m!}{(m-k)!}\, w^{m-k}.$$

Отсюда следует, что многочлен

$$w^m A_m\Big(\frac{1}{w}\Big) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} r_k w^k = A_m^*(w)$$

имеет только неположительные нули. Более того, $A_m^*\Big(\dfrac{w}{m}\Big)$ сходится равномерно к $\Psi(w)$ внутри любой компактной подобласти $K_0 \subset V_0$. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{k=N(\varepsilon)}^{\infty} \frac{|r_k|}{k!} |w|^k \le \varepsilon \quad \forall\, w \in K_0.$$

Тогда для $\forall\ n > N$ получим оценку

$$\left| A_n^*\left(\frac{w}{n} \right) - \Psi(w) \right| \le \left| \sum_{k=0}^{N} \frac{r_k}{k!} w^k \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{n!}{(n-k)!n^k} - 1 \right) \right| + 2 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{|r_k|}{k!} |w|^k,$$

из которой и будет следовать факт сходимости. Таким образом, функция $\Psi(z)$ является равномерным пределом последовательности многочленов, имеющих только действительные неположительные нули. Известно [1, с. 336], что в таком случае для нее справедливо представление

$$\Psi(z) = \alpha\, z^k e^{\delta z} \prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i z),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta \ge 0$, $a_i \ge 0$. $i = \overline{0,\infty}$, $0 < \sum_{i=0}^{\infty} a_i < \infty$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Отсюда

$$\Phi(z) = \frac{1}{\Psi(z)} = \frac{e^{-\delta z}}{\alpha z^k \prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i z)}.$$

С другой стороны,

$$\Phi(z) = -\int_0^{\infty} e^{-u(\rho+z)}\, d\mu(e^{-u}) = \int_0^{\infty} t^{\rho+z}\, d\mu(t).$$

Учитывая произвольность $\rho > 0$, получаем представление

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) = \int_0^1 t^z\, d\mu(t) = \frac{e^{-\delta z}}{\alpha z^k \prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i z)}. \tag{22}$$

Так как функция $\Phi(z)$ в точке $z = 0$ равна λ_0, то в (22) $k = 0$ и $1/\alpha = \lambda_0$. Отметим, что условие $\sum_{i=1}^{\infty} a_i > 0$ при предельном переходе при $\rho \to 0$ может не выполняться. Необходимость условий *i*) – *ii*), таким образом, доказана. Достаточность вытекает из теоремы Лагерра [2, с. 544] и теоремы 2.1 [1, с. 336].

1. *Karlin S.* Total positivity. Vol. 1. – Stanford: Stanford Univ. Press, 1968. – 576 p.
2. *Graven T., Csordas G.* Zero-diminishing linear transformations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **80**, № 4. – P. 544–546.
3. *Graven T., Csordas G.* An inequality for the distribution of zeros of polynomials and entire functions // Pacif. J. Math. – 1981. – **95**, № 2. – P. 263–280.
4. *Graven T., Csordas G.* On the number of real roots of polynomials // Ibid. – 1982. – **102**, № 1. – P. 15–28.
5. *Graven T., Csordas G.* Locations of zeros. Pt I: Real polynomials and entire functions // Illinois J. Math. – 1983. – **27**, № 2. – P. 244–278.
6. *Бакан А. Г., Голуб А. П.* Некоторые отрицательные результаты о последовательностях множителей первого рода // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 305–309.
7. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.

Получено 20.03.92