УДК 517.5

**В. Л. Грона,** канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

# О ЛОКАЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ БОХНЕРА – РИСА В КЛАССАХ С. М. НИКОЛЬСКОГО

The conditions are investigated for localization of the Bokhner – Riesz averages in the Nikol'skii classes $u_p^\alpha$ for $p \in [1, 2]$.

Досліджені умови локалізації середніх Бохнера–Ріса у класах Нікольського $u_p^\alpha$ при $p \in [1, 2]$.

**1. Введение.** Пусть $E_n$ — $N$-мерное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $Z_N$ —целочисленная решетка в $E_N$, $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N$, $|x| = \sqrt{x \cdot x}$, $Q_N = E_N / 2\pi Z_N$ — $N$-мерный тор.

Пусть далее $L_p(Q_N)$ — пространство $2\pi$-периодических функций, суммируемых с $p$-й степенью модуля на $Q_N$, с нормой

$$\|f\|_p = \left( \int_{Q_N} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$C(Q_N)$ — множество непрерывных на $Q_N$ функций, $C^\infty(Q_N)$ — множество бесконечно дифференцируемых на $Q_N$ функций,

$$\sum_{m \in Z_N} \hat{f}(m)\, e^{imx}, \quad \hat{f}(m) = (2\pi)^{-1} \int_{Q_N} f(u)\, e^{-imu} du,$$

— ряд Фурье функции $f$.

Определим основные классы дифференцируемых периодических функций многих переменных.

Классом С. Л. Соболева $W_p^l$, $1 \le p < \infty$, $l$ — неотрицательное целое число, называется класс функций, у которых существуют в смысле Соболева частные производные порядка $l$, принадлежащие $L_p(Q_N)$.

Классом Лиувилля $L_p^\alpha$, $1 \le p < \infty$, $\alpha > 0$, называется множество функций $f \in L_p(Q_N)$, представимых в виде

$$f(x) = a_0 + \int_{Q_N} \varphi(x - u)\, T_\alpha(u)\, du = a_0 + \varphi * T_\alpha,$$

где $\varphi \in L_p(Q_N)$, $\int_{Q_N} \varphi(x)\, dx = 0$, а ряд Фурье функции $T_\alpha$ имеет вид

$$T_\alpha(u) \sim (2\pi)^{-N} \sum_{|m| \ne 0} |m|^{-\alpha} e^{imu}. \tag{1}$$

При $\alpha = 2k$ класс $L_p^\alpha$ совпадает с классом $2\pi$-периодических по каждой переменной функций, у которых существует в смысле Соболева $k$-я степень оператора Лапласа, принадлежащая $L_p(Q_N)$. Это вытекает из того, что коэффициенты Фурье функций $f$ и $\varphi$ удовлетворяют равенству $\hat{\varphi}(m) = |m|^\alpha \hat{f}(m)$ [1, с. 276]. В связи с этим обозначаем $\varphi = (-\Delta)^{\alpha/2} f$.

При $1 < p < \infty$ и $l = 1, 2, \ldots$ классы $L_p^l$ и $W_p^l$ совпадают [2, с. 159]. Норма в $L_p^\alpha$ определяется следующим образом: $\|f\|_{L_p^\alpha} = \|f\|_p + \|\varphi\|_p$.

Пусть далее $\alpha = l + \kappa$ , где $l$ — неотрицательное целое число, а $0 < \kappa \le 1$. Будем говорить, что функция $f$ из класса $L_p(Q_N)$, $1 \le p < \infty$, принадлежит классу С. М. Никольского $H_p^\alpha$, если для любого вектора $h$ из $E_N$ и любого мультииндекса $k = (k_1, \ldots, k_N)$, удовлетворяющего условию $\|k\| = k_1 + \ldots \ldots + k_N = l$, справедливо неравенство

$$\|\delta_h^4 \partial^k f(\cdot)\|_p \le C|h|^\kappa,$$

где

$$\partial^k f(x) = \frac{\partial^{\|k\|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_N^{k_N}},$$

$$\delta_h^2 f = f(x-h) - 2f(x) + f(x+h), \quad \delta_h^{2(n+1)} f = \delta_h^2(\delta_h^{2n} f).$$

Норма в пространстве $H_p^\alpha$ определяется следующим равенством:

$$\|f\|_{H_p^\alpha} = \|f\|_p + \sum_{\|k\|=l} \sup_{h \ne 0} |h|^{-\kappa} \|\delta_h^4 \partial^k f(\cdot)\|_p.$$

Замыкание множества $C^\infty(Q_N)$ по норме $\|\cdot\|_{H_p^\alpha}$ обозначим $\overset{*}{H}{}_p^\alpha$.

Классом О. В. Бесова назовем множество функций с конечной нормой

$$\|f\|_{B_{p,\theta}} = \|f\|_p + \sum_{\|k\|=l} \left[\int_0^\infty \left(|u|^{-\kappa} \left\|\delta_h^4 \partial^k f(\cdot)\right\|_p\right)^\theta \frac{\partial u}{|u|^N}\right]^{1/\theta}, \quad \theta \in [1, \infty).$$

Классом Зигмунда — Гельдера будем называть множество функций, для которых справедливо неравенство

$$\|\delta_h^2 \partial^k f\|_C \le C|h|^\kappa.$$

Подробные характеристики приведенных выше классов содержатся в монографиях [3] и [4]. Отметим некоторые их свойства, важные для дальнейшего рассмотрения.

Прежде всего заметим, что справедливо вложение [3, 4]

$$\overset{*}{H}{}_p^{\alpha+\varepsilon} \subset H_p^{\alpha+\varepsilon} \subset \{W_p^\alpha, L_p^\alpha, B_{p,\theta}^\alpha\} \subset \overset{*}{H}{}_p^\alpha \subset H_p^\alpha, \ \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Поясним в этом отношении те вложения, которые связаны с классом $\overset{*}{H}{}_p^\alpha$. Вложение $\overset{*}{H}{}_p^\alpha \subset H_p^\alpha$ вытекает из полноты $H_p^\alpha$, а вложение $\{W_p^\alpha, L_p^\alpha, B_{p,\theta}^\alpha\} \subset \overset{*}{H}{}_p^\alpha$ — из плотности множества $C^\infty(Q_N)$ в пространствах Соболева, Лиувилля и Бесова.

Обозначим через $S_R^r(f; x)$ сферические средние Бохнера — Риса

$$S_R^r(f; x) = \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^r \hat{f}(m)\, e^{imx}.$$

При $r = 0$ получаем сферические суммы Фурье

$$S_R^0(f;x) = \sum_{|m|<R} \hat{f}(m)\, e^{imx}.$$

Согласно классическому принципу локализации Римана, если $N = 1$ и функция $f(t)$, принадлежащая классу $L_1$, обращается в нуль на некотором интервале $\mathfrak{I} \subset [-\pi, \pi]$, то суммы Фурье

$$S_n^0(f;t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikt}$$

сходятся к нулю равномерно на каждом промежутке $[a, b] \subset \mathfrak{I}$.

При $N \geq 2$ аналогичное утверждение для сферических средних Бохнера—Риса $S_R^r(f)$ верно при $r > (N-1)/2$, а именно: если функция $f \in L_1$ тождественно равна нулю в некоторой области $\Omega$, то при $r > (N-1)/2$ суммы $S_R^r(f)$ сходятся к нулю равномерно на произвольном компакте $K \subset \Omega$. Это утверждение доказал С. Бохнер в 1936 г. [5]. Тогда же им было установлено, что при $r = (N-1)/2$ утверждение остается верным, если $f \in L_2$, но теряет силу при $f \in L_1$: для произвольной точки $x_0 \in Q_N$ существует функция $f \in L_1$, тождественно равная нулю в некоторой окрестности точки $x_0$ такая, что

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \left| S_R^{(N-1)/2}(f;\ x_0) \right| = \infty.$$

С. Бохнер назвал порядок $r = (N-1)/2$ критическим.

Будем говорить, что в классе $\mathfrak{M}$ справедлив принцип локализации средних $S_R^r$, если для любой функции $f \in \mathfrak{M}$, тождественно равной нулю в произвольной открытой области $\Omega$, средние $S_R^r(f)$ сходятся к нулю равномерно на произвольном компакте $K \subset \Omega$.

Э. Стейн показал, что принцип локализации средних $S_R^{(N-1)/2}$ справедлив в классе $L \log^+ L$ [6].

В данной работе изучаются средние Бохнера — Риса $S_R^r$ порядка ниже критического $0 \leq r < (N-2)/2$. Принцип локализации этих средних не имеет места даже в классе непрерывных функций.

В 1967 г. В. А. Ильин доказал, что принцип локализации сумм Фурье $S_R^0(f)$ справедлив в классе Лиувилля $L_2^\alpha$ при $\alpha \geq (N-1)/2$ и не справедлив в классе $C^\alpha$ при $\alpha < (N-1)/2$ [7–9]. В дальнейшем В. А. Ильин совместно с Ш. А. Алимовым доказали, что принцип локализации средних $S_R^r$ имеет место в каждом из классов $W_2^\alpha, L_2^\alpha, B_{2,\theta}^\alpha, \overset{*}{H}{}_2^\alpha$ при $\alpha \geq (N-1)/2 - r$ и не справедлив при $\alpha < (N-1)/2 - r$ [10].

Таким образом, установленные в работах В. А. Ильина и Ш. А. Алимова условия локализации средних $S_R^r$ носят окончательный характер в классах $W_p^\alpha, L_p^\alpha, B_{p,\theta}^\alpha$ и $\overset{*}{H}{}_p^\alpha$ при $2 \leq p \leq \infty$.

Обозначим

$$P(N, r) = \begin{cases} 27/(17+20r), & N = 2, \\ 8/(5+3r), & N = 3, \\ 2N/(N+1+2r), & N \geq 4. \end{cases}$$

Из работы А. Й. Бастиса вытекает, что условие $\alpha \geq (N-1)/2 - r$ сохраняет локализацию средних $S_R^r$ в классе Лиувилля $L_p^\alpha$, если $P(N, r) < p < 2$ [11].

В классе $\overset{*}{H}{}_p^{\alpha}$, $1 \le p < 2$, условием локализации является $\alpha \ge (N-1)/p - r$, которое получено Ш. А. Алимовым (см. [12]).

В данной работе результат А. Й. Бастиса перенесен на класс $\overset{*}{H}{}_p^{\alpha}$, а также найдены окончательные условия локализации сферических сумм Фурье $S_R^0$ в классе $\overset{*}{H}{}_1^{\alpha}$ при $N \ge 5$.

**Теорема 1.** *Пусть $\Omega$ — произвольная открытая область в $Q_N$. Тогда для любой функции $f \in \overset{*}{H}{}_p^{\alpha}$, $p > p_{N,r}$, $0 \le r < (N-1)/2$, $\alpha \ge (N-1)/2 - r$, тождественно равной нулю в $\Omega$, справедливо равенство*

$$\lim_{R\to\infty} S_R^r(f;x) = 0, \tag{3}$$

*равномерное на каждом компакте $K \subset \Omega$.*

**Теорема 2.** *При $N \ge 5$, $r = 0$ и $\alpha \ge N-2$ равенство* (3) *справедливо для любой функции $f \in \overset{*}{H}{}_1^{\alpha}$, тождественно равной нулю в $\Omega$.*

**Теорема 3.** *При $N \ge 4$ и $\alpha < N-2$ для произвольной точки $x_0 \in Q_N$ и любой ее окрестности $\Omega$, замыкание которой не совпадает с $Q_N$, существует функция $f \in L_1^{\alpha}$, тождественно равная нулю в области $\Omega$ такая, что*

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} |S_R^0(f;x_0)| = \infty.$$

Отметим, что из теорем вложения (см. соотношение (2)) следует, что в условиях теорем 1 и 2 вместо классов $\overset{*}{H}{}_p^{\alpha}$ можно поставить классы $W_p^{\alpha}$, $L_p^{\alpha}$ и $B_{p,\theta}^{\alpha}$, $1 \le \theta < \infty$.

Кроме этих результатов приведем еще некоторые утверждения.

**Теорема 4.** *При $N = 2, 3, 4$ принцип локализации средних $S_R^r$, $0 \le r < (N-1)/2$, справедлив в классе $\overset{*}{H}{}_1^{\alpha}$, если*

$$\sup_{R>1} R^{-\alpha} \| D_R^r(x) - D_{R,0}^r(x) \|_C < \infty, \tag{4}$$

*где*

$$D_R^r(x) = (2\pi)^{-N} \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^r e^{imx}$$

*— ядра средних $S_R^r$,*

$$D_{R,0}^r(x) = (2\pi)^{-N/2} 2^r \Gamma(r+1) R^N (R|x|)^{-N/2-r} \mathfrak{J}_{N/2+r}(R|x|).$$

Отметим, что при $N = 2$ и $3$ неравенство (4) выполняется для

$$\alpha \ge N - (2N/(N+1))(1+r)$$

[13, 14], а при $N = 4$ и $r = 0$ — для $\alpha > N-2$ [15].

Для $N = 4$ справедлив следующий результат.

**Теорема 5.** *При $N = 4$ принцип локализации сферических сумм Фурье $S_R^0$ справедлив в классе функций, у которых существует в смысле Соболева оператор Лапласа $\varphi = \Delta f$, удовлетворяющий условию*

$$\lim_{h\to 0} \ln^2 |h| \, \| \varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot) \|_1 = 0.$$

С учетом вложения классов Соболева, Лиувилля и Бесова в класс $\overset{*}{H}{}_p^{\alpha}$ получаем аналогичные условия локализации средних Бохнера – Риса в этих классах.

Перейдем к доказательству теорем 1 – 5.

**2. Приближение гладких функций средними типа Валле – Пуссена.** Рассмотрим следующие средние:

$$\sigma_R(f; x) = \sum_{m \in Z_N} \theta\left(\frac{|m|}{R}\right) \hat{f}(m)\, e^{imx},$$

где $\theta(s) \in C_0^{\infty}[0, \infty)$, $\theta(s) = 1$ при $s \in [0, 1]$ и $\theta(s) = 0$, $s \ge 2$.

**Лемма 1.** *Для произвольной функции* $f \in L_1^{\alpha}$, $\alpha > 0$, *почти всюду на* $Q_N$ *справедливо равенство*

$$f(x) - \sigma_R(f; x) = (2\pi)^{-N} R^{-\alpha} \int_{E_N} \varphi(x+y)\, \nu_{\alpha}(Ry)\, dRy, \tag{5}$$

*где*

$$\nu_{\alpha}(x) = \begin{cases} \int\limits_{|u|\ge 1} (1 - \theta(|u|))\, |u|^{-\alpha} e^{iux}\, du, & \alpha > (N-1)/2, \\ (-\Delta)^k \int\limits_{|u|\ge 1} (1 - \theta(|u|))\, |u|^{-\alpha - 2k} e^{iux}\, du, & 0 < \alpha \le (N-1)/2, \end{cases}$$

$$\varphi = (-\Delta)^{\alpha/2} f, \; k = [(N - 1 - 2\alpha)/4] + 1.$$

*Причем при* $f \in L_p^{\alpha}$, $\alpha > N/p$, *равенство* (5) *справедливо всюду на* $Q_N$.

В условии данной леммы и в дальнейшем считаем, что

$$\int_{E_N} = \lim_{B\to\infty} \int_{|u|<B}.$$

***Доказательство.*** Покажем, что равенство (5) справедливо всюду на $Q_N$ в случае, когда $f$ является тригонометрическим полиномом. Учитывая вид множителей $\theta(|m|/R)$, имеем

$$f - \sigma_R(f; x) = f - S_R^0(f; x) - \sigma_R^{(1)}(f; x).$$

Здесь

$$\sigma_R^{(1)}(f; x) = \sum_{R \le |m| \le 2R} \theta\left(\frac{|m|}{R}\right) \hat{f}(m)\, e^{imx}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $R^2$ — не целое число.

В работе [16] было доказано, что для нецелых $R^2$ и произвольного тригонометрического полинома

$$f(x) - S_R^0(f; x) = (2\pi)^{-N} R^{-\alpha} \int_{E_N} \varphi(x+y)\, \tau_{\alpha}(Ry)\, dRy, \tag{6}$$

$$\tau_{\alpha}(x) = \begin{cases} \int\limits_{|u|\ge 1} |u|^{-\alpha} e^{iux}\, du, & \alpha > (N-1)/2, \\ (-\Delta)^k \int\limits_{|u|\ge 1} |u|^{-\alpha-2k} e^{iux}\, du, & 0 < \alpha \le (N-1)/2, \end{cases}$$

$k$ и $\varphi$ те же, что и в равенстве (5).

Кроме того, из утверждения леммы 1 работы [16] вытекает, что при любом $\alpha > 0$ и нецелом $R^2$ для произвольного тригонометрического полинома $f$

$$\sigma_R^{(1)}(f; x) = (2\pi)^{-N} R^{-\alpha} \int_{E_N} \varphi(x+y)\, \nu_\alpha^{(1)}(Ry)\, dRy, \tag{7}$$

где

$$\nu_\alpha^{(1)}(x) = \int_{1 \le |u| \le 2} \theta(|u|)\, |u|^{-\alpha} e^{iux}\, du,$$

причем это выражение при любом натуральном $k$ можно переписать в виде

$$\nu_R^{(1)}(x) = (-\Delta)^k \int_{1 \le |u| \le 2} \theta(u)\, |u|^{-\alpha-2k} e^{iux}\, du.$$

Из равенств (6) и (7) вытекает справедливость (5) для произвольного тригонометрического полинома.

Пусть далее $f$ — произвольная функция из класса $L_1^\alpha$. Рассмотрим ядро $\nu_\alpha$ из равенства (5). Учитывая связь преобразования Фурье радиальных функций с преобразованием Ганкеля – Бесселя [1, с. 176], имеем при $\alpha > (N-1)/2$

$$\nu_\alpha(x) = (2\pi)^{N/2} |x|^{-N/2+1} \int_1^\infty (1-\theta(s))\, S^{N/2-\alpha}\, \mathcal{J}_{N/2-1}(|x| s)\, ds. \tag{8}$$

Интеграл в правой части сходится при $\alpha > (N-1)/2$, так как [1, с. 130]

$$\mathcal{J}_\mu(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos\left(s - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(s^{-3/2}), \ s \to \infty. \tag{9}$$

Из равенства (8) следует, что при $\alpha > (N-1)/2$ функция $\nu_\alpha(x)$ является радиальной и непрерывной, за исключением, может быть, начала координат. То же самое можно сказать о функции $\nu_\alpha$ при $0 < \alpha \le (N-1)/2$, поскольку для радиальной функции оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta\psi(|x|) = \psi''(|x|) + (N-1)/|x|\, \psi'(|x|). \tag{10}$$

Поскольку $\nu_\alpha^{(1)}$ — ограниченная функция:

$$|\nu_\alpha^{(1)}| \le \int_{1 \le |u| \le 2} \theta(|u|)\, |u|^{-\alpha}\, du,$$

то функция $\nu_\alpha$ имеет такое же асимптотическое поведение при $|x| \to 0$, как и функция $\tau_\alpha$ из равенства (6). Из работы [16], в которой изучалась асимптотика $\tau_\alpha$, вытекает

$$\nu_\alpha(x) = \begin{cases} O(1) & \text{при } \alpha > N, \\ O(\ln|x|) & \text{при } \alpha = N, \\ O(|x|^{\alpha-N}) & \text{при } 0 < \alpha < N, \ |x| \to 0. \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда видно, что $\nu_\alpha$ суммируема в окрестности начала координат при любом $\alpha > 0$.

Асимптотическое поведение функции $\nu_\alpha(x)$ при $|x| \to \infty$ будем исследовать так же, как исследовалось поведение функции $\tau_\alpha(x)$ в [16]. Пусть сначала $\alpha > (N-1)/2$. Учитывая равенство

$$\frac{d}{ds}(S^{\mu} \mathcal{J}_{\mu}(ts)) = ts^{\mu} \mathcal{J}_{\mu-1}(ts)$$

[17, с. 55], и интегрируя $[(N+3)/2]$ раз по частям интеграл (8), получаем

$$\nu_\alpha(x) = (2\pi)^{N/2} |x|^{-N/2-\mu} \int_1^\infty \psi_\alpha(s) \mathcal{J}_{N/2+\mu}(s|x|) ds,$$

где

$$\psi_\alpha(s) = S^{N/2+\mu+1} \left(\frac{d}{sds}\right)^{\mu+1} [(1-\theta(s)) s^{-\alpha}], \quad \mu = \left[\frac{N+1}{2}\right].$$

Легко видеть, что

$$|\psi_\alpha(s)| < C_N(\alpha+N+1)^{(N+1)/2} S^{-\alpha-1/2}. \tag{12}$$

Принимая во внимание асимптотику функции Бесселя $\mathcal{J}_\mu(s)$ (см. (9)), имеем при $\alpha > (N-1)/2$

$$|\nu_\alpha(x)| \le C(N)\alpha^{(\alpha+1)/2} |x|^{-N/2-1/2}, \quad |x| > 1. \tag{13}$$

При $0 < \alpha \le (N-1)/2$ по определению

$$\nu_\alpha(x) = (-\Delta)^k \nu_{\alpha+2k}(x), \quad k = \left[\frac{N-1-2\alpha}{4}\right] + 1.$$

Отсюда, используя вид оператора Лапласа для радиальных функций (см. 10)) и оценку (12), заключаем, что оценка (13) верна и при $0 < \alpha \le (N-1)/2$. Следовательно, при любом $\alpha > 0$ функция $\nu_\alpha \in L_1(E_N)$.

Применяя теорему Фубини и тот факт, что равенство (5) верно для произвольного тригонометрического полинома, приходим к заключению, что ряды Фурье функций из левой и правой частей равенства (5) совпадают. Следовательно, равенство (5) справедливо п. в. для любой функции $f \in L_1^\alpha$.

Пусть теперь

$$f \in L_p^\alpha, \ \alpha > N/p, \ 1 \le p \le \infty.$$

Из равенства (13) вытекает, что ряд $\sum_{|m|\ne 0} \nu_\alpha(R(u+2\pi m))$ сходится абсолютно и равномерно на $Q_N$, причем

$$\left\| \sum_{|m|\ne 0} R^N \nu_\alpha(R(u+2\pi m)) \right\|_C \le C(N)\alpha^{(N+1)/2} R^{-1/2}. \tag{14}$$

Положим

$$\sigma_R^\alpha(x) = (2\pi)^{-N} \sum_{m \in Z_N} R^N \nu_\alpha(R(u+2\pi m)).$$

Из равенств (11) и (13) вытекает, что при $\alpha > N/p$

$$\nu_\alpha(u) \in L_q(E_N), \ 1/p + 1/q = 1$$

и

$$\| R^N \nu_\alpha(Ru) \|_q \le \| \nu_\alpha \|_{L_q(E_N)} \le C(N)\alpha^{(N+1)/2}.$$

Отсюда с учетом оценки (14) следует

$$\| \sigma_R^\alpha \|_q \le C(N)\alpha^{(N+1)/2}, \quad \alpha > N/p. \tag{15}$$

Равенство (5) можно переписать в виде

$$f(x)-\sigma_R(f;x) = R^{-\alpha}\int\limits_{Q_N}\varphi(x+u)\sigma_R^{\alpha}(u)\,du. \tag{16}$$

Из (15) вытекает, что правая часть этого соотношения является непрерывной функцией при $\varphi\in L_p$. Кроме того, из теоремы вложения $L_p^{\alpha}\subset C$, $\alpha>N/p$, следует, что и левая часть соотношения (5) также непрерывна. Следовательно, равенство (5) верно всюду на $Q_N$ при $\alpha>N/p$. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *При любом* $\alpha>0$ *и* $1\le p<\infty$ *справедлива оценка*

$$\| f-\sigma_R(f)\|_p \le C_N\alpha^{(N+1)/2}R^{-\alpha}\|\varphi\|_p,\ \varphi=(-\Delta)^{\alpha/2}f,\ f\in L_p^{\alpha}.$$

Доказательство этой леммы вытекает из соотношений (15) и (16).

**Лемма 3.** *При любом* $p\in[1,\infty]$ *и* $l\ge 0$

$$\| f-\sigma_R(f)\|_p \le C(n)R^{N-l}\left\|\int\limits_{E_N}\delta_h^4(\varphi;\ \cdot)e^{-R|h|}dh\right\|_p, \tag{17}$$

*где* $\varphi=(-\Delta)^{l/2}f,\ f\in L_p^{\alpha}$.

***Доказательство.*** Пусть $f$ — тригонометрический полином. Тогда

$$\delta_h^4(\varphi;x) = \sum_{m\in Z_N}(e^{imh/2}-e^{-imh/2})\,4\,\hat\varphi(m)\,e^{imx}.$$

Известно [1, с. 13], что

$$\int\limits_{E_N}e^{imh}\,e^{-R|h|}dh = K_NR(|m|^2+R^2)^{-(N+1)/2},$$

$$K_N = 2^N\pi^{(N-1)/2}\,\Gamma((N+1)/2).$$

Следовательно,

$$R^N\int\limits_{E_N}\delta_h^4(\varphi;x)e^{-R|h|}dh = \sum_{m\in Z_N}(\psi(R/|m|))^{-1}\,\hat\varphi(m)\,e^{imx},$$

где

$$\psi(s) = 2K_N((4+s^2)^{-(N+1)/2}S^{N+1}-$$

$$-4(1+s^2))^{-(N+1)/2}S^{N+1}+3)^{-1}.$$

Поскольку

$$|\,[(4+z^2)^{-(N+1)/2}-4(1+z^2))^{-(N+1)/2}]\,z^{N+1}+3\,| > 1$$

при $|z|\le 1/2$, то $\psi(z)$ — аналитическая функция в круге $|z|\le 1/2$ (при четных $N$ рассматриваем ту ветвь функции $W^{1/2}$, для которой $1^{1/2}=1$). Следовательно, $\psi(z)$ раскладывается в степенной ряд с радиусом сходимости большим $1/2$:

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k.$$

Далее,

$$f(x) - \sigma_{2R}(f; x) = \sum_{m \in Z_N} \frac{\psi(R/|m|)}{\psi(R/|m|)} \left(1 - \theta\left(\frac{|m|}{2R}\right)\right) \frac{\hat{\varphi}(m)}{|m|^l} e^{imx} =$$

$$= R^{-l} \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^{k+l} \sum_{|m|>2R} |m|^{-k-l} \left[\psi\left(\frac{R}{|m|}\right)\right]^{-1} \left(1 - \theta\left(\frac{|m|}{2R}\right)\right) \times$$

$$\times \hat{\varphi}(m) e^{imx} = R^{-l} \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^{k+l} (g_k(x) - \sigma_{2R}(g_k; x)),$$

где

$$g_k(x) = \sum_{m \in Z_N} |m|^{-k-l} \left[\psi\left(\frac{R}{|m|}\right)\right]^{-1} \hat{\varphi}(m) e^{imx}.$$

Очевидно,

$$(-\Delta)^{(k+l)/2} g_k(x) = R^n \int_{E_N} \delta_h^4(\varphi; x) e^{-R|h|} dh.$$

Поэтому, применяя лемму 2, имеем

$$\| g_k - \sigma_{2R}(g_k) \|_p \le C(2R)^{-k-l} \left\| K^N \int_{E_N} \delta_h^4(f; \cdot) e^{-R|h|} dh \right\|_p .$$

Отсюда, с учетом сходимости ряда $\sum a_k K^{(N+1)/2} 2^{-k-l}$, получаем оценку (17) для тригонометрических полиномов $f$.

Пусть далее $f$ — произвольная функция из $L_p^l$, $1 \le p < \infty$, тогда

$$\| f - \sigma_{2R}(f) \|_p \le \| T - \sigma_{2R}(T) \|_p + (1 + M_p) \| f - T \|_p \le$$

$$\le C(N) R^{N-l} \left\| \int_{E_N} \delta_h^4(\varphi; \cdot) e^{-R|h|} dh \right\|_p +$$

$$+ C(N) R^N \left\| \int_{E_N} \delta_h^4(\varphi - T_1, \cdot) e^{-R|h|} dh \right\|_p + (1 + M_p) \| f - T \|_p,$$

где $T$ — произвольный тригонометрический полином,

$$T_1 = (-\Delta)^{l/2} T, \quad M_p = \sup_{R>1} \| \sigma_{2R} \|_{L_p \to L_p}.$$

Так как

$$\left\| \delta_h^4(f; \cdot) \right\|_p \le 2^4 \| f \|_p,$$

то имеем

$$\| f - \sigma_{2R}(f) \|_p \le C(N) R^N \left\| \int_{E_N} \delta_h^4(\varphi; \cdot) e^{-R|h|} dh \right\|_p + C \| f - T \|_{L_p^l}.$$

Отсюда, ввиду плотности множества тригонометрических полиномов в $L_p$, $1 \le p < \infty$, получаем утверждение леммы.

***Замечание.*** Аналогично можно доказать, что для всякой функции $f$ такой, что $\varphi = (-\Delta)^{l/2} f$ непрерывна, справедлива оценка

$$\| f-\sigma_{2R}(f) \|_C \le C(N)R^{N-l} \left\| \int\limits_{E_N} \delta_h^4(\varphi;\ \cdot)e^{-R|h|}dh \right\|_C .$$

**Лемма 3.** *При любом* $p \in [1, \infty)$

$$\| f-\sigma_{2R}(f) \|_p \le C(N)R^{-l}\omega_p^4(\varphi; 1/R).$$

*Здесь*

$$\varphi = (-\Delta)^{l/2}f,\ \omega_p^4(\varphi; t) = \sup_{|h|<t} \left\| \delta_h^4(\varphi;\ \cdot) \right\|_p$$

— *модуль гладкости порядка* 4 *функции* $\varphi$.

***Доказательство.*** Из неравенства (17) следует

$$\| f-\sigma_{2R}(f) \|_p \le C(N)R^{-l} \left\| \int\limits_{E_N} \delta_{h/R}^4(\varphi;\ \cdot)e^{-|h|}dh \right\|_p \le$$

$$\le C_1(N)R^{-l}\int\limits_0^\infty \omega_p^4(\varphi; t/R)t^{N-1}e^{-t}dt = C_1(N)R^{-l}\sum_{k=0}^\infty \int\limits_k^{k+1} \omega_p(\varphi; t/R)t^{N-1}e^{-t}dt.$$

Поскольку $\omega_p^4(\varphi; kt) \le k^4\omega_p^4(\varphi; t)$, то

$$\| f-\sigma_{2R}(f) \|_p \le C_1R^{-l}\omega_p(\varphi; 1/2R)\sum_{k=0}^\infty 2^4(k+1)^4 \int\limits_k^{k+1} t^{N-1}e^{-t}dt.$$

Заменяя в этом неравенстве $2R$ на $R$, получаем утверждение леммы.

## 3. Принцип локализации в классе $\overset{*}{H}{}_p^\alpha$.

**Утверждение 1.** *Пусть* $r \in [0; (N-1)/2]$ *и для ядер средних Бохнера – Риса* $D_R^r$ *при любом* $\delta > 0$ *и некотором* $\kappa > 0$

$$\sup_{R>1} R^{-\kappa} \| \eta_\delta D_R^r \|_q < \infty, \tag{18}$$

*где* $\eta_\delta(x)$ — *характеристическая функция множества* $|x| \ge \delta$. *Тогда в классе* $\overset{*}{H}{}_p^\alpha$, $1/p+1/q=1$, *при* $\alpha \ge \kappa$ *справедлив принцип локализации сферических средних Бохнера – Риса* $S_R^r$.

***Доказательство.*** Пусть $f \in H_p^\alpha$ и тождественно равна нулю в открытой области $\Omega \subset Q_N$, $K$ — произвольный компакт, полностью лежащий в $\Omega$, $2\delta$ — расстояние от $K$ до границы области $\Omega$. Тогда при любом $x \in K$

$$S_R^r(f; x) = S_R^r(f-\sigma_R(f); x) + \sigma_R(f; x) = \sigma_R(f; x) +$$

$$+ \int\limits_{Q_N \setminus U_\delta} [f(x-u)-\sigma_R(f; x-u)]D_R^r(u)du - \int\limits_{U_\delta} \sigma_R(f; x-u)D_R^r(u)du,$$

где $u_\delta$ — шар, $|u| \le \delta$. При $x \in K$ и $u \in u_\delta$ расстояние от точки $x-u$ до границы $\Omega$ не менее $\delta$. Следовательно, при $x \in K$ и $u \in U_\delta$

$$\sigma_R(f; x-u) = \int\limits_{Q_N \setminus U_\delta} f(x-u-v)\sigma_R(v)dv,$$

$$\sigma_R(v) = R^N \hat{\theta}(Rv) + R^N \sum_{|m|\neq 0} \hat{\theta}(R(v+2\pi m)),$$

где

$$\tilde{\theta}(v) = (2\pi)^{-N} \int_{|y|\leq 2} \theta(|y|) e^{ivy} dy.$$

Поскольку $\theta(|t|) \in C^\infty(-\infty, \infty)$, то легко видеть, что $|\hat{\theta}(v)| < C_M / (1 + |v|^2)^M$, где $M$ — произвольное положительное число.

Полагая $M = N$, получаем

$$\| \eta_\delta(v) \sigma_R(v) \|_C \leq C_N(K) R^{-N}.$$

Следовательно,

$$|\sigma_R(f; x-u)| < C_N(K) \| f \|_1 R^{-N}, \quad x \in K, \quad u \in U_\delta.$$

Поскольку $\| D^r_R(u) \|_C \leq C_N R^N$, то

$$\left| \int_{U_\delta} \sigma_R(f;\ x-u) D^r_R(u) du \right| \leq C(N, K) \| f \|_1, \quad x \in K.$$

Далее, из утверждения леммы 4 вытекает, что для любой $f \in H^\alpha_p$

$$\| f - \sigma_R(f) \|_p \leq C(N) R^{-\alpha} \| f \|_{H^\alpha_p}.$$

Отсюда получаем, что для любого $x \in K$

$$\left| \int_{Q_N \setminus U_\delta} [f(x-u) - \sigma_R(f;\ x-u)] D^r_R(u) du \right| \leq$$

$$\leq \| f - \sigma_R(f) \|_p \| \eta_\delta D^r_R \|_q \leq C(N, K) R^{\kappa-\alpha} \| f \|_{H^\alpha_p}.$$

Следовательно, при $\alpha \geq \kappa$ для $x \in K$

$$| S^r_R(f; x) | \leq C(N, K) \| f \|_{H^\alpha_p}.$$

Таким образом, для любой функции $f \in \overset{*}{H}{}^\alpha_p$ $S^r_R(f; x) \to 0$ равномерно на $K$. Утверждение доказано.

В работе А. Й. Бастиса [11] было доказано, что при $p > P_{N,r}$ и $r \in [0; (N-1)/2)$

$$\| D^r_R - D^r_{R,0} \|_q \leq C R^{(N-1)/2 - r}.$$

Из асимптотики функции Бесселя при больших значениях аргумента (см. (9)) имеем

$$\| \eta_\delta D^r_{R,0} \|_C \leq C_\delta R^{(N-1)/2 - r}, \quad \delta > 0. \tag{19}$$

Следовательно, если $p > p(N, r)$, то соотношение (18) справедливо при $\kappa = (N-1)/2 - r$. Отсюда получаем утверждение теоремы 1.

К. И. Бабенко [15] показал, что при $N \geq 5$

$$\| D^0_R - D^0_{R,0} \|_C \leq C(N) R^{N-2}.$$

Из этой оценки с учетом (19) вытекает утверждение теоремы 2.

Теорему 4 получаем из (19) и утверждения 1.

Теорема 5 следует из неравенства

$$\| D_R^0 - D_{R,1}^0 \|_C \le CR^2 \ln^2 R, \ \ N = 4,$$

доказанного К. И. Бабенко в [15], и из леммы 4.

***Доказательство теоремы 3.*** Пусть $x_0$ — произвольная точка, принадлежащая $Q_N$, $\Omega$ — произвольная окрестность точки $x_0$, $\overline{\Omega} \ne Q_N$.

В работе К. И. Бабенко [15] было доказано, что при $N \ge 4$ на всюду плотном в $Q_N$ множестве точек

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} R^{2-N} | D_R^0(u) | > 0.$$

Следовательно, при $N \ge 4$ внутри множества $Q_N \setminus \Omega$ найдется точка $y_0 = x_0 - u_0$ такая, что при любом $\alpha < N-2$

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} R^{-\alpha} | D_R^0(u_0) | = \infty. \tag{20}$$

Пусть $2\delta$ — расстояние от точки $x_0 - u_0$ до границы области $\Omega$. Рассмотрим множество $L_{1,\delta}$-функций, суммируемых на $Q_N$ и тождественно равных нулю вне шара $| x - (x_0 - u_0) | \le \delta$. На $L_{1,\delta}$ рассмотрим семейство линейных функционалов

$$A_R(\varphi) = R^{-\alpha} S_R^0(\varphi; x_0) = R^{-\alpha} \int\limits_{|u-u_0|\le\delta} \varphi(x_0-u) D_R^0(u)du.$$

Из (20) вытекает, что при $\alpha < N-2$ $\overline{\lim\limits_{R\to\infty}} \| A_R \| = \infty$. Следовательно, по теореме Банаха – Штейнгауза существует такая функция $\varphi_0 \in L_{1,\delta}$, что

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} R^{-\alpha} | S_R^0(\varphi_0; x_0) | = \infty, \ \ \alpha < N-2. \tag{21}$$

Рассмотрим функцию

$$\chi_{\alpha,\delta}(u) = C_{N,\alpha} | u |^{\alpha-N} Q_\delta(u), \ \ 0 < \alpha < N-2,$$

где

$$Q_\delta \in C_0^\infty(E_N), \ Q_\delta(u) = 1$$

при $| u | \le \delta/2$, $Q_\delta(u) = 0$ при $| u | \ge \delta$,

$$C_{N,\alpha} = [2^\alpha \pi^{N/2} \Gamma(\alpha/2) / \Gamma[(N-\alpha)/2]]^{-1}.$$

В [1, с. 286] доказано, что

$$b_{\alpha,\delta}(u) = T_\alpha(u) - \chi_{\alpha,\delta}(u) \in C^\infty(Q_N), \tag{22}$$

где $T_\alpha(u)$ определено равенством (1).

Обозначим

$$f_0(x) = \varphi_0 * \chi_{\alpha,\delta}, \ \ f_\delta = \varphi_0 * b_{\alpha,\delta}.$$

Получаем $(-\Delta)^{\alpha/2}(f_0 + f_\delta) = \varphi_0$.

В работе [18] доказано, что для любой $f \in L_1^\alpha$ п. в. на $Q_N$ справедливо следующее равенство:

$$f(x) - S_R^0(f; x) = -R^{-\alpha}\left[\sum_{k=0}^{[(N-1)/2]} \beta_k S_R^k(\varphi;\ x) - G_R(\varphi;\ x)\right], \tag{23}$$

где

$$\beta_0 = 1,\ \beta_{k+1} = \frac{r+2k}{2(k+1)}\beta_k,\ k = 0, 1, \dots,\ \varphi = (-\Delta)^{\alpha/2} f,$$

$$G_R(\varphi; x) = \int_{Q_N} \varphi(x-u) g_k(u) du,$$

$$g_k(u) = (2\pi)^{-N} R^N \sum_{m \in Z_N} \mu_\alpha[R(u + 2\pi m)],$$

$$\mu_\alpha(u) = O(|u|^{-N-1/2}),\ |u| \to \infty. \tag{24}$$

По построению $\varphi_0(x) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega_\delta$, $\Omega_\delta$ — множество точек $x \in Q_N \setminus \Omega$, у которых расстояние до границы $\Omega$ не меньше $\delta$. Поэтому при $x \in \Omega$

$$G_R(\varphi_0; x) = \int_{Q_N} \varphi_0(x-u)\eta_\delta(u) g_R(u) du,$$

где $\eta_\delta$ — характеристическая функция множества $|u| \geq \delta$, $u \in Q_N$.

Учитывая (24), видим, что $G_R(\varphi_0; x)$ непрерывна в $\Omega$ и равномерно по $x \in \Omega$ справедлива оценка

$$|G_R(\varphi_0; x)| \leq CR^{-1/2}. \tag{25}$$

Из (22) вытекает, что $f_\delta \in C^\infty(Q_N)$.

Подставим в (23) вместо $f$ функцию $f_0 + f_\delta$. Поскольку $f_0(x) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega$, то п. в. на $\Omega$

$$S_R^0(f_0; x) = f_\delta(x) - S_R^0(f; x) + R^{-\alpha}\left[\sum_{k=0}^{[(N-1)/2]} \beta_k S_R^k(\varphi_0;\ x) - G_R(\varphi_0;\ x)\right]. \tag{26}$$

Так как левая и правая части равенства (26) непрерывны на $\Omega$, то оно справедливо всюду на $\Omega$ и, в частности, при $x = x_0$.

Учитывая известную асимптотику ядер $D_R^r$ [9]

$$\| D_R^r - D_{R,0}^r \|_C \leq C_N R^{K_{N,r}},$$

$$K_{N,r} = N - \frac{2N(r+1)}{N+1},\ r \in \left[0,\ \frac{N+1}{2}\right),\ N \geq 2,$$

и асимптотику величины $D_{R,0}^r$ (см. (19)), заключаем, что

$$\| \eta_\delta D_R^r \|_C \leq CR^{K_{N,r}},\ r \in [0; (N-1)/2). \tag{27}$$

При $r = (N-1)/2$ можно получить, что $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\| \eta_\delta D_R^{(N-1)/2} \|_C \leq C_\varepsilon R^\varepsilon; \tag{28}$$

для этого используется равенство

$$D_R^{(N-1)/2}(u) = 2R^{-(N-1)}\frac{\Gamma((N+1)/2)}{\Gamma((N+1)/2-\delta)\Gamma(\delta)} \times$$

$$\times \int_0^R (R^2-S^2)^{\delta-1} D_S^{(N-1)/2-\delta}(u) S^{N-2\delta}\, ds, \quad \delta > 0.$$

Поскольку $f_\delta(x) \in C^\infty$, то

$$\lim_{R\to\infty} (f_\delta(x_0) - S_R^0(f_\delta; x_0)) = 0.$$

Из последнего равенства, а также соотношений (21), (25) – (28) следует, что при $N - 4N/(N+1) < \alpha < N-2$

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} R^{-\alpha} \,|\, S_R^0(f_0; x_0) \,|\, = \infty.$$

Теорема 3 доказана.


1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
2. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 455 с.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 482 с.
5. *Bochner S.* Summation of multiple Fourier Series by spherical means // Trans. Amer. Math. Soc. – 1936. – **40**, № 2. – P. 185 – 207.
6. *Stein E. M.* Localization and summability of multiple Fourier series // Acta Math. – 1958. – **100**, № 1 – 2. – P. 93 – 147.
7. *Ильин В. А.* Исчерпывающее в классах $W_2^\alpha$ и $C^{(n,\alpha)}$ решение проблемы локализации для рядов фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа//Докл. АН СССР. – 1967. – **177**, № 2. – С. 258 – 260.
8. *Ильин В. А.* Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа // Успехи мат. наук. –1968. – **23**, № 2. – С. 61 – 120.
9. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I // Там же. – 1976.– **31**, № 6. – С. 28 – 83.
10. *Ильин В. А., Алимов Ш. А.* Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов. V //Дифференц. уравнения. – 1970. – **10**, № 3. – С. 1044 – 1058.
11. *Bastis A. Y.* On the asymptotics of the Riesz – Bochner kernel // Ann. Math. – 1983. – **9**, № 4. – P. 247 – 258.
12. *Алимов Ш. А.* О локализации спектральных разложений // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 4. – С. 744 – 746.
13. *Landau E.* Einführung in die elementare und analytisćhe Theorie der algebraisćhen zahlem und der Ideale. – Leipzig, 1927.
14. *Hormander L.* On the Riesz means of spectral function and eigenfunction expansion for elliptic differential operators // Lecture at the Belfer Graduete School. – Yeshiva Univ., 1966. – Preprint.
15. *Бабенко К. И.* О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотика ядра Дирихле сферических средних. – М.: 1971. – 70 с. – (Препринт /АН СССР. Ин-т прикл. математики и механики; № 52).
16. *Грона В. Л.* О равномерном приближении сферическими суммами Фурье на классах функций, определяемых полигармоническими операторами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 543 – 550.
17. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций: В 2-х ч. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – Ч. 1. – 798 с.
18. *Грона В. Л.* О равномерной сходимости сферических сумм Фурье на периодических классах Лиувилля // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 1. – С. 47 – 53.


Получено 05. 10. 92