УДК 517.9:519.3

В. Е. Капустян, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

АСИМПТОТИКА ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОПТИМАЛЬНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

A complete asymptotical solution is constructed and justified for optimal singular parabolic problems with constraint control and complete degeneration of the differential part of the operator.

Будується та обгрунтовується повний асимптотичний розв'язок для оптимальних сингулярних параболічних задач з обмеженим керуванням і повним виродженням диференціальної частини оператора.

В работе [1] исследуются слабые решения сингулярно возмущенных распределенных систем, вариационных неравенств и задач оптимального управления для них. Получены результаты о предельном переходе для вырожденных решений. Однако вопросы структуры асимтотических решений задач оптимального управления с ограничениями, их поведения в окрестностях некоторых многообразий остались открытыми. Для эллиптических оптимальных задач эти вопросы рассмотрены в [2, 3]. В данной работе построены и обоснованы асимптотки экстремалей любого порядка точности для одномерных параболических задач с полным предельным вырождением дифференциального оператора. Внутренние переходные слои при этом имеют эллиптический характер, что сближает рассматриваемый класс задач с эллиптическими оптимальными задачами.

1. Распределенное управление и наблюдение.

1.1. *Постановка задачи. Условия оптимальности.* Пусть в области $\overline{Q}_T = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ состояние управляемой системы $y(u)$ определяется как решение задачи

$$\varepsilon y_t - \varepsilon^2 y_{xx} + y = u, \tag{1}$$

$$y(0,t) = y(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$y(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x) \in L_2(0,1)$, $0 < \varepsilon << 1$, $u \in U \subset L_2(Q_T)$. Пусть

$$U = \{v\colon \xi_1(x) \le v \le \xi_2(x) \text{ п. в. в } Q_T;\quad 0 < \xi_1 < \xi_2,\ \ \xi_i \in L_\infty(0,1)\}. \tag{4}$$

Необходимо найти

$$\mathcal{J}(u) = \inf_{v \in U} \left\{ \int\limits_{Q_T} [(y(v) - z(x))^2 + \nu v^2]\, dx dt \right\}, \tag{5}$$

где $\nu = \text{const} > 0$, $z \in L_2(0,1)$. Единственное оптимальное управление определяется из соотношений, приведенных в [4, с. 122]:

$$\begin{gathered} \varepsilon y_i - \varepsilon^2 y_{xx} + y = u \text{ в } Q_T,\ y(0,t) = y(1,t) = 0,\ y(x,0) = \varphi(x); \\ -\varepsilon p - \varepsilon^2 p_{xx} + p = y(u) - z(x) \text{ в } Q_T, \\ p(0,t) = p(1,t) = 0,\ p(x,T) = 0; \\ \int\limits_{Q_T} [p + \nu u][v - u] dx\, dt \ge 0 \quad \forall v \in U;\ y, p \in W_2^{1,0}(Q_T); \end{gathered} \tag{6}$$

Учитывая локальный характер ограничений в (4), условия оптимальности (6) эквивалентны таким задачам [4, с. 128]:

$$(x,t) \in Q_1\colon \qquad \begin{gathered} \varepsilon y_t - \varepsilon^2 y_{xx} + y = \xi_1, \\ -\varepsilon p_t - \varepsilon^2 p_{xx} + p = y(u) - z(x), \end{gathered} \tag{7}$$

$$p(u) + \nu\xi_1 > 0;$$

$$(x, t) \in Q_2: \quad \begin{gathered} \varepsilon y_t - \varepsilon^2 y_{xx} + y = \xi_2, \\ -\varepsilon p_t - \varepsilon^2 p_{xx} + p = y(u) - z(x), \\ p(u) + \nu\xi_2 < 0; \end{gathered} \tag{8}$$

$$(x, t) \in Q_3: \quad \begin{gathered} \varepsilon y_t - \varepsilon^2 y_{xx} + y + \nu^{-1} p = 0, \\ -\varepsilon p_t - \varepsilon^2 p_{xx} + p = y(u) - z(x), \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$Q_T = \bigcup_{i=1}^{3} Q_i, \quad Q_i \cap Q_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Оптимальное управление задается формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} \xi_1(x), & (x, t) \in Q_1, \\ -\nu^{-1} p(x, t), & (x, t) \in Q_3, \\ \xi_2(x), & (x, t) \in Q_2. \end{cases} \tag{10}$$

1°. Будем предполагать, что заданные выше функции достаточно гладкие и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

1.2. *Асимптотика управления вне особых подмногообразий.* Рассмотрим вопрос об аппроксимации областей Q_i, $i = \overline{1, 3}$. С этой целью найдем регулярные составляющие рядов в задачах (7) – (9), которые имеют вид

$$\bar{y}(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{y}_i(x, t), \quad \bar{p}(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{p}_i(x, t). \tag{11}$$

Для задачи (7) коэффициенты рядов (11) удовлетворяют системам

$$\begin{gathered} \bar{y}_0 = \xi_1(x), \quad \bar{y}_i = \bar{y}_{i-2_{xx}} - \bar{y}_{i-1_t}, \\ \bar{p}_0 = \bar{y}_0 - z, \quad \bar{p}_0 + \nu\xi_1 > 0; \quad \bar{p}_i = \bar{y}_i + \bar{p}_{i-2_{xx}} + \bar{p}_{i-1_t}, \quad i > 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Для задачи (8) соответствующие коэффициенты рядов (11) удовлетворяют системам (12) с очевидными изменениями. Для задачи (9) имеем

$$\begin{gathered} \bar{y}_0 + \nu^{-1}\bar{p}_0 = 0, \quad \bar{y}_i + \nu^{-1}\bar{p}_i = \bar{y}_{i-2_{xx}} - \bar{y}_{i-1_t}, \\ \bar{p}_0 = \bar{y}_0 - z; \quad \bar{p}_i = \bar{y}_i + \bar{p}_{i-2_{xx}} + \bar{p}_{i-1_t}, \quad 1 > 0. \end{gathered} \tag{13}$$

С учетом неравенств в (7), (8) определим области

$$Q_{1+} = \{(x, t): \xi_1(x)(1 + \nu) - z(x) > 0, \quad t \in [0, T]\},$$

$$Q_{2-} = \{(x, t): \xi_2(x)(1 + \nu) - z(x) < 0, \quad t \in [0, T]\}, \quad Q_{30} = \overline{Q}_T \setminus (\overline{Q}_{1+} \cup \overline{Q}_{2-}),$$

которые аппроксимируют области Q_i, $i = \overline{1, 3}$.

***Замечание* 1.** Полагаем, что функции с отрицательными индексами равны нулю.

2°. В дальнейшем для определенности будем считать, что данные задачи таковы, что $Q_T = Q_{1+} \cup Q_{30}$; причем в $Q_{1+} x \in [0, x_1), x_1$ — единственный корень уравнения $\xi_1(x)(1 + \nu) - z(x) = 0$.

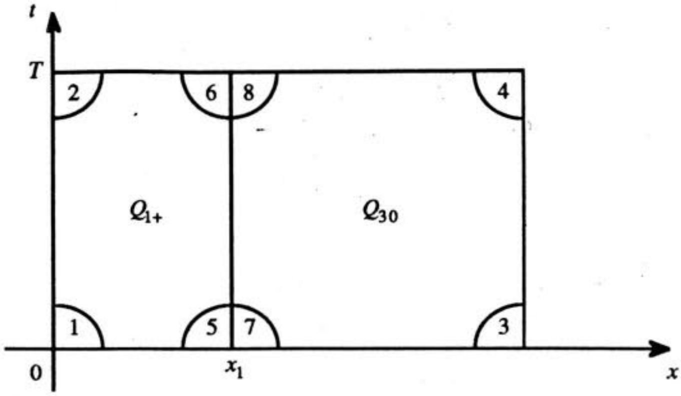

Рис. 1.

Разложения (11) не удовлетворяют граничным условиям в (6). В связи с этим в окрестностях прямых $x = 0;\ 1,\ t = 0;\ T$ указанные разложения следует дополнить разложениями в "растянутых" координатах [5]: $\eta = x\varepsilon^{-1}$, $\eta^* = (1 - x)\varepsilon^{-1}$, $\tau = t\varepsilon^{-1}$, $\tau^* = (T - t)\varepsilon^{-1}$. Для определенности рассмотрим соответствующие разложения в окрестности прямых $x = 0$, $t = 0$, т. е.

$$\Pi y(x, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i y(x, \tau), \quad \Pi p(x, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i p(x, \tau);$$
$$\Pi y(\eta, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i y(\eta, t), \quad \Pi p(\eta, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i p(\eta, t), \tag{14}$$

коэффициенты которых удовлетворяют задачам $((x, t) \in Q_{1+})$

$$\Pi_i y(x, \tau),\ \Pi_i p(x, \tau):\quad \frac{\partial \Pi_i y(x, \tau)}{\partial \tau} + \Pi_i y(x, \tau) = \frac{\partial^2 \Pi_{i-2} y(x, \tau)}{\partial x^2},$$
$$-\frac{\partial \Pi_i p(x, \tau)}{\partial \tau} + \Pi_i y(x, \tau) = \frac{\partial^2 \Pi_{i-2} p(x, \tau)}{\partial x^2} + \Pi_i y(x, \tau), \tag{15}$$
$$\Pi_0 y(x, 0) = \varphi(x) - \bar{y}_0(x), \quad \Pi_i y(x, 0) = -\bar{y}_i(x), \quad i > 0.$$

$$\Pi_i y(\eta, t),\ \Pi_i p(\eta, t):\quad -\frac{\partial^2 \Pi_i y(\eta, t)}{\partial \eta^2} + \Pi_i y(\eta, t) = -\frac{\partial \Pi_{i-1} y(\eta, t)}{\partial t},$$
$$-\frac{\partial^2 \Pi_i p(\eta, t)}{\partial \eta^2} + \Pi_i p(\eta, t) = \Pi_i y(\eta, t) + \frac{\partial \Pi_{i-1} p(\eta, t)}{\partial t}; \tag{16}$$
$$\Pi_i y(0, t) + \bar{y}_i(0) = 0, \quad \Pi_i p(0, t) + \bar{p}_i(0) = 0.$$

Для того чтобы в окрестности прямой $t = 0$ в Q_{1+} для суммы (11), (14) выполнялось неравенство из (7), нужно потребовать, исходя из (15), чтобы выполнялось неравенство

$$\xi_1(x)(1 + 2\nu) + \varphi(x)\,|\operatorname{sign}\varphi(x) - 1\,|/2 - 2z(x) > 0, \quad x \in [0, x_1). \tag{17}$$

Найдем условия, при которых неравенство в (7) выполняется в окрестности $x = 0$. С этой целью рассмотрим левую часть неравенства в (7):

$$f(\eta) = \nu\xi_1(0) + \bar{p}_0(0)(1 - \exp(-\eta)) - \eta\bar{y}_0(0)\exp(-\eta)/2. \tag{18}$$

Из (18), (4) следует $f(0) > 0$. Предположим, что $f'(0) > 0$. Тогда $\xi_1(0) - 2z(0) > 0$. В противном случае ее минимум достигается в точке $\overline{\eta} = (2z(0) - \xi_1(0))/\xi_1(0)$ и должен быть положительным, т. е.

$$f(\overline{\eta}) = \nu\xi_1(0) + \overline{p}_0(0) - \overline{y}_0(0)\exp(-\overline{\eta})/2 > 0. \tag{19}$$

Сравнивая (17) при $x = 0$ с (19), убеждаемся, что (19) выполняется, если справедливо (17).

Ясно, что $i > 0$ системы (15), (16) однозначно разрешимы в классе погранфункций.

В окрестности прямой $t = T$ для коэффициентов разложений вида (14) находим $\Pi_i y(x, \tau^*) = 0$, $\Pi_0 p(x, \tau^*) = -\overline{p}_0(x)\exp(-\tau^*)$; $\Pi_i p(x, \tau^*)$, $i > 0$, являются погранслойными функциями. При этом неравенство в (7) всегда выполняется в окрестности $t = T$. Действительно, левая часть неравенства из (7) принимает вид $f(\tau^*) = \nu\xi_1(x) + \overline{p}_0(x)(1 - \exp(-\tau^*))$. Так как $f(0) > 0$, $f(\infty) > 0$, $f'(\tau^*) = \overline{p}_0(x)\exp(-\tau^*)$ имеет знак $\overline{p}_0(x)$, то $f(\tau^*) > 0$.

В ε-окрестности угла 1 (рис. 1) разложения (14) дополняются угловыми погранфункциями [5], которые ищем в виде рядов

$$Y(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(\eta, \tau), \quad P(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i(\eta, \tau), \tag{20}$$

а коэффициенты разложений (20) удовлетворяют задачам

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \eta^2} + Y_i(\eta, \tau) = 0, \quad -\frac{\partial P_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2} + P_i(\eta, \tau) = Y_i(\eta, \tau);$$
$$Y_i(\eta, 0) = -\Pi_i(\eta, t)|_{t=0}, \; Y_i(0, \tau) = -\Pi_i y(x, \tau)|_{x=0}; \; P_i(0, \tau) = -\Pi_i p(x, \tau)|_{x=0}. \tag{21}$$

При $i \geq 0$ решения задач (21) принадлежат классу погранслойных функций. Действительно, первое уравнение (21) вместе с краевыми условиями имеет погранслойное решение [5]. Для второго уравнения нужно найти "вынужденное" решение, обусловленное правой частью, так как соответствующее однородное уравнение ограниченных решений не имеет. Такое решение будет также погранслойным и может быть получено с использованием синус-Фурье преобразования [6]. В ε-окрестности угла 1 должно выполнятся неравенство из (7), которое имеет вид

$$f(\eta, \tau) = \nu\xi_1(0) + \overline{p}_0(0) + \Pi_0 p(x, \tau)|_{x=0} + \Pi_0(\eta, t)|_{t=0} + P_0(\eta, \tau) > 0. \tag{22}$$

В ε-окрестности угла 2 (рис. 1) коэффициенты разложений (20) удовлетворяют задачам, аналогичным (21), и неравенство (22) принимает вид

$$f(\eta, \tau^*) = \nu\xi_1(0) + \overline{p}_0(0) + \Pi_0 p(x, \tau^*)|_{x=0} + \Pi_0(\eta, t)|_{t=T} + P_0(\eta, \tau^*) > 0. \tag{23}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения* 1°, 2°; *неравенства* (17), (22), (23). *Тогда разложения* (11), (14), (20) *в сумме представляют собой формальное асимптотическое решение задачи* (7) *в* Q_{1+}.

В области Q_{30} выполнение неравенств не обязательно. Разложения вида (14) в этом случае строятся стандартно и их коэффициенты принадлежат классу погранслойных функций.

В углах 3, 4 (рис. 1) разложения (14) с найденными выше коэффициентами следует дополнить угловыми погранфункциями. Так, для угла 3 коэффициенты соответствующего разложения удовлетворяют задаче

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \eta^{*2}} + Y_i(\eta, \tau^*) + \nu^{-1} P_i(\eta^*, \tau) = 0,$$

$$-\frac{\partial P_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^{*2}} + P_i(\eta^*, \tau) = Y_i(\eta, \tau^*); \tag{24}$$

$Y_i(\eta, 0) = -\Pi_i y(\eta^*, t)|_{t=0},\ Y_i(0, \tau) = -\Pi_i y(x, \tau)|_{x=1},\ P_i(0, \tau) = -\Pi_i p\,(x, \tau)|_{x=1}.$

Задача (24) разрешима в классе погранслойных функций. Действительно, она эквивалентна следующей задаче оптимальной стабилизации:

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty [Y_i^2(\eta^*, \tau) + \nu U_i^2(\eta^*, \tau)]d\eta^* d\tau + 2\int_0^\infty \Pi_i p\,(1, \tau)\frac{\partial Y_i(0, \tau)}{\partial \eta^*}d\tau; \tag{25}$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \eta^{*2}} + Y_i = U_i, \quad Y_i(\eta^*, 0) = -\Pi_i \bar{y}(\eta^*, t)|_{t=0},\ Y_i(0, \tau) = -\Pi_i y(x, \tau)|_{x=1}. \tag{26}$$

Используя функцию Грина [6], записываем решение задачи (26) при фиксированном управлении $U_i(\eta^*, \tau)$ в форме Коши. Осуществляя прямое варьирование (25) с учетом указанной формулы, получаем уравнение для определения оптимального $U_i(\eta^*, \tau)$:

$$U_i(\eta^*, \tau) + \int_0^\infty\int_0^\infty \mathfrak{R}(\eta^*, \xi; \tau, \kappa)U_i(\xi, \kappa)d\kappa d\xi = \mathfrak{D}(\eta^*, \tau), \tag{27}$$

где

$$\mathfrak{D} \in L_2((0, \infty) \times (0, \infty)) \cap \mathfrak{R}\ \text{(класс погранфункций)},\ \mathfrak{R} \in L_2 \times L_2.$$

Оператор в левой части (27) является положительно определенным [7], действует из $L_2 \cap \mathfrak{R}$ в $L_2 \cap \mathfrak{R}$, следовательно, (27) единственным образом разрешимо в $L_2((0, \infty) \times (0, \infty)) \cap \mathfrak{R}$. Поэтому $Y_i \in L_2 \cap \mathfrak{R} \to P_i \in L_2 \cap \mathfrak{R}$. Решения задачи (24), пригодные для практических целей, можно получить, используя синус-Фурье преобразование [6]. Тем самым ряды (11), (14), (20) с соответствующими коэффициентами в сумме представляют собой формальное асимптотическое решение задачи (9) в Q_{30}.

3. *Асимптотика экстремалей в окрестности прямой* $x = x_1$. В точке $x = x_1$ (рис. 1) решения задач (12), (13) разрывны, а в ее окрестности Γ может нарушаться неравенство из (7). Поэтому в указанной окрестности возникает дополнительный внутренний погранслой, аналогичный соответствующей задаче для эллиптического уравнения [2]. Так как в Γ осуществляется переход от неравенства $p + \nu u > 0$ к равенству, то поверхность перехода будем искать в виде

$$\left\{(x, t) \in QT\colon\ x - x_1 = \varepsilon H(t, \varepsilon),\ H(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j H_j(t),\ H_j(t) \in C^\infty(0, T)\right\}. \tag{28}$$

В Γ сделаем замену переменных $(x, t) \to (\bar{\eta} = (x_1 - x)\varepsilon^{-1} - H(t, \varepsilon),\ t)$. Старшие члены внутреннего пограничного слоя (метод сращиваемых асимптотических разложений) ищем в виде

$$\hat{y}(\bar{\eta}, t) = \bar{y}_0(x_1) + \varepsilon \hat{y}_1(\bar{\eta}, t), \quad \hat{p}(\bar{\eta}, t) = \bar{p}_0(x_1) + \varepsilon \hat{p}_1(\bar{\eta}, t). \tag{29}$$

Тогда из (7), (9) получим

$$-\frac{\partial^2 \hat{y}_1}{\partial \overline{\eta}^2} + \hat{y}_1 = -\frac{d\,\overline{y}_{0+}(x_1)}{dx}(\overline{\eta} + H_0(t)),$$
$$-\frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial \overline{\eta}^2} + \hat{p}_1 - \hat{y}_1 = -\left(\frac{d\,\overline{p}_{0+}(x_1)}{dx} - \frac{d\,\overline{y}_{0+}(x_1)}{dx}\right)(\overline{\eta} + H_0(t)), \quad \overline{\eta} > 0; \tag{30}$$

$$-\frac{\partial^2 \hat{y}_1}{\partial \overline{\eta}^2} + \hat{y}_1 + \nu^{-1}\hat{p}_1 = -\left(\frac{d\,\overline{y}_{0-}(x_1)}{dx} + \nu^{-1}\frac{d\,\overline{p}_{0-}(x_1)}{dx}\right)(\overline{\eta} + H_0(t)),$$
$$-\frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial \overline{\eta}^2} + \hat{p}_1 - \hat{y}_1 = -\left(\frac{d\,\overline{p}_{0-}(x_1)}{dx} - \frac{d\,\overline{y}_{0-}(x_1)}{dx}\right)(\overline{\eta} + H_0(t)), \quad \overline{\eta} < 0; \tag{31}$$

где $\overline{y}_{i+}$, $\overline{p}_{i+}$ вычисляются по формулам (12), $\overline{y}_{i-}$, $\overline{p}_{i-}$ — по формулам (13).

Решения задач (30), (31) удовлетворяют условиям

$$\hat{y}_1(\overline{\eta}, t),\ \hat{p}_1(\overline{\eta}, t) \in C^1(R),\ \forall\ t \in [0, T]; \tag{32}$$

$$\hat{p}_1(0, t) - \nu\,\frac{d_{0+}\xi_1(x_1)}{dx}H_0(t) = 0. \tag{33}$$

Ввиду условия (32) с учетом (30), (31) получаем

$$\hat{y}_1(\overline{\eta}) = c_1 \exp(-\overline{\eta}) - (d\overline{y}_{0+}(x_1)/dx)(\overline{\eta} + H_0),$$
$$\hat{p}_1(\overline{\eta}) = (c_1\overline{\eta}/2 + c_2)\exp(-\overline{\eta}) - (d\overline{p}_{0+}(x_1)/dx)(\overline{\eta} + H_0), \quad \overline{\eta} \geq 0; \tag{34}$$

$$\hat{y}_1(\overline{\eta}) = \nu^{-1/2}\exp(r^{1/2}\overline{\eta}\cos(\varphi/2))(\hat{c}_1\cos(r^{1/2}\sin(\varphi/2)\overline{\eta}) +$$
$$+ \hat{c}_2\sin(r^{1/2}\overline{\eta}\ \sin(\varphi/2))) - (d\,\overline{y}_{0-}(x_1)/dx)(\overline{\eta} + H_0),$$
$$\hat{p}_1(\overline{\eta}) = \exp(r^{1/2}\overline{\eta}\ \cos(\varphi/2))\hat{c}_1\sin(r^{1/2}\overline{\eta}\sin(\varphi/2)) +$$
$$+ \hat{c}_2\cos(r^{1/2}\overline{\eta}\sin(\varphi/2)) - (d\,\overline{p}_{0-}(x_1)/dx)(\overline{\eta} + H_0), \quad \overline{\eta} < 0, \tag{35}$$

где $r = (\nu^{-1} + 1)^{1/2}$, $\cos\varphi = r^{-1}$, $\sin\varphi = \nu^{-1/2}r^{-1}$; c_i, $\hat{c}_i$ определяются из системы

$$c_1 + \nu^{-1/2}\hat{c}_1 = \kappa H_0,$$
$$c_2 - \hat{c}_2 = \kappa H_0,$$
$$-c_1 + \nu^{-1/2}r^{1/2}\cos(\varphi/2)\hat{c}_1 + \nu^{-1/2}r^{1/2}\sin(\varphi/2)\hat{c}_2 = \kappa,$$
$$0{,}5c_1 - c_2 - r^{1/2}\sin(\varphi/2)\hat{c}_1 - r^{1/2}\cos(\varphi/2)\hat{c}_2 = \kappa; \tag{36}$$

где $\kappa = (d\overline{y}_{0+}(x_1)/dx) - (d\overline{p}_{0-}(x_1)/dx)$.

Система (36) однозначно разрешима. Поэтому из (34) – (36) находим

$$H_0 = \left[-\nu\Delta + \begin{vmatrix} \nu^{-1/2}(1 + r^{1/2}\cos(\varphi/2)) & 1 \\ -(0{,}5\nu^{-1/2} + r^{1/2}\sin(\varphi/2)) & 0{,}5 \end{vmatrix}\right]^{-1} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} \nu^{-1/2}(1 + r^{1/2}\cos(\varphi/2)) & -1 \\ -(0{,}5\nu^{-1/2} + r^{1/2}\sin(\varphi/2)) & -1 \end{vmatrix},$$

где

$$\Delta = -\nu^{-1/2}(1 + r^{1/2}\cos(\varphi/2))^2 - \nu^{-1/2}r^{1/2}\sin(\varphi/2)(0{,}5\nu^{-1/2} + r^{1/2}\sin(\varphi/2)) < 0;$$

причем; $H_0 < 0$.

В окрестности Γ $(x_1 - x - \varepsilon H_0 = O(\varepsilon)$ уравнения из (7), (9) выполняются с точностью $O(\varepsilon^2)$. При $x_1 - x - \varepsilon H_0 > 0$ должно выполняться неравенство из (7). Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения* 1, 2 *и равенство* $\xi_1(x_1)(1+\nu) = z(x_1)$. *Тогда в окрестности* Γ $(x_1 - x - \varepsilon H_0)$ *выполняется неравенство из* (7), *если* $\operatorname{sign}(\mathfrak{F}\kappa) > 0$, *где*

$$\mathfrak{F} = r^{1/2}\kappa^{-1}(\cos(\varphi/2)\hat{c}_2 + \sin(\varphi/2)\hat{c}_1) - \nu,$$

$$\hat{c}_1 = \Delta^{-1}\kappa \begin{vmatrix} 1+H_0 & -\nu^{-1/2}r^{1/2}\sin(\varphi/2) \\ 1+0{,}5H_0 & -(1+r^{1/2}\cos(\varphi/2)) \end{vmatrix},$$

$$\hat{c}_2 = \Delta^{-1}\kappa \begin{vmatrix} \nu^{-1/2}(1+r^{1/2}\cos(\varphi/2)) & 1+H_0 \\ -(0{,}5\nu^{-1/2}+r^{1/2}\sin(\varphi/2)) & 1+0{,}5H_0 \end{vmatrix}.$$

Доказательство основывается на явном представлении неравенства $d\hat{p}_1(0)/d\overline{\eta} - \nu d\overline{y}_{0+}(x_1)/dx > 0$.

Полное асимптотическое решение задачи (6) с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$ в окрестности Γ с использованием составных асимптотических разложений будем искать в виде [2, 3]

$$\begin{aligned} y^{(N)}(\varepsilon, x) &= X_1^{(N)}(\varepsilon, x)\sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \overline{y}_j(x) + X_2(x)\sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \check{y}_j((x_1 - x)\varepsilon^{-1} - \mathfrak{B}^{(N)}(\varepsilon)), \\ p^{(N)}(\varepsilon, x) &= X_1^{(N)}(\varepsilon, x)\sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \overline{p}_j(x) + X_2(x)\sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \check{p}_j((x_1 - x)\varepsilon^{-1} - \mathfrak{B}^{(N)}(\varepsilon)), \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\mathfrak{B}^{(N)}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j H_j; \tag{38}$$

$\overline{y}_j$, $\overline{p}_j$ — коэффициенты рядов (11) в областях Q_{1+}, Q_{30}; $X_1^{(N)}, X_2$ — срезающие функции, определенные в [2].

Вычисляя невязку, которая остается в уравнениях из (7), (9) от первых слагаемых в (37) при $N \to \infty$, получаем задачи для определения $\check{y}_j$, $\check{p}_j$ (аналогичные (30), (31)). В частности,

$$\check{y}_1 = \hat{y}_1 + (1 - \chi(\overline{\eta}))(\overline{\eta} + H_0)d\overline{y}_{0-}(x_1)/dx,$$

$$\check{p}_1 = \hat{p}_1 + (1 - \chi(\overline{\eta}))(\overline{\eta} + H_0)d\overline{p}_{0-}(x_1)/dx \quad \forall\ \overline{\eta} \in R.$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда функции* $\check{y}_j$, $\check{p}_j$ *однозначно определяются из рекуррентных систем и принадлежат классу погранфункций; при каждом* j *решения зависят от* $H_0, \ldots, H_{j-1}$, *составляющих коэффициенты* (38), *а* H_{j-1} *находится из условий*

$$\check{y}_j, \quad \check{p}_j \in C^1(R), \quad \nu^{-1}\check{p}_j(0) - (\partial^{(j)}\xi_1(x)/\partial\varepsilon^{(j)})\Big|_{\substack{\overline{\eta}=0 \\ \varepsilon=0}} = 0.$$

Доказательство проводится по схеме работы [2].

Замечание 2. Разложение (37) следует дополнить угловыми погранфункциями вида (20) в переменных $(\tau, \overline{\eta})$ — углы 5, 7; $(\tau^*, \overline{\eta})$ — углы 6, 8.

4. *Обоснование асимптотик.* Обозначим через $y_N(\varepsilon, x, t), p_N(\varepsilon, x, t)$ сумму, состоящую из конечных сумм (до N включительно) разложений (14), (20) и (37). Таким образом, построенное разложение имеет точность $O(\varepsilon^{N+1})$. Исходя из (10), рассмотрим также асимптотическое управление

$$u_N(\varepsilon, x, t) = \begin{cases} \xi_1(x), & (x, t) \in Q_{1+}^{N, \varepsilon}, \\ -\nu^{-1} p_N(\varepsilon, x, t), & (x, t) \in Q_{30}^{N, \varepsilon}, \end{cases} \tag{39}$$

где

$$Q_{1+}^{N, \varepsilon} = \{(x, t) \colon t \in [0, T],\ x \in ([0, x_1] \setminus \Gamma) \cup \cap\ (x \in \Gamma \colon x_1 - x > \varepsilon \mathcal{B}^{(N)}(\varepsilon))\},$$

$$Q_{30}^{N, \varepsilon} = Q_T \setminus \overline{Q}_{1+}^{N, \varepsilon}.$$

Систему уравнений в задаче (6) запишем в слабой форме

$$\begin{gathered} \varepsilon(y_t, \Phi) + \varepsilon^2(y_x, \Phi_x) + (y, \Phi) = (u, \Phi), \quad y(x, 0) = \varphi(x), \\ -\varepsilon(p_t, \Psi) + \varepsilon^2(p_x, \Psi_x) + (p, \Psi) = (y - z, \Psi),\ p(x, T) = 0,\ \forall \Phi,\ \Psi \in H_0^1(0, 1), \end{gathered} \tag{40}$$

где $(.\,,.)$ — скалярное произведение в $L_2(Q_T)$.

Пусть $\Delta y = y - y_N$, $\Delta p = p - p_N$, $\Delta u = u - u_N$. Так как по построению $u_N \in U$, $Y_N, p_N \in C^1(Q_T)$, то из (40), (6) имеем

$$\begin{gathered} \varepsilon(\Delta y_i, \Phi) + \varepsilon^2(\Delta y_x, \Phi_x) + (\Delta y, \Phi) = (\Delta u, \Phi_x) - \varepsilon((y_N)_t, \Phi) - \\ - \varepsilon^2((y_N)_x, \Phi_x) - ((y_N), \Phi) + (u_N, \Phi), \\ - \varepsilon(\Delta p_i + \Psi) + \varepsilon^2(\Delta p_x, \Psi) + (\Delta p, \Psi) - (\Delta y, \Psi) = \varepsilon((p_N)_t, \Psi) - \\ - \varepsilon^2((p_N)_x, \Psi_x) - (p_N, \Psi) + (y_N - z, \Psi), \quad \forall \Phi, \Psi \in H_0^1(0, 1); \\ (p + \nu u, \Delta u) \le 0. \end{gathered} \tag{41}$$

По построению можем записать соотношения

$$\begin{gathered} P_N + \nu u_N = 0, \quad (x, t) \in Q_{30}^{N, \varepsilon}, \\ P_N + \nu u_N > -\varepsilon^{N+1} r(x, t), \quad u - u_N \ge 0, \quad (x, t) \in Q_{1+}^{N, \varepsilon}, \end{gathered} \tag{42}$$

где r — некоторая гладкая функция. Из соотношений (42) следует неравенство

$$(p_N + \nu u_N, \Delta u) \ge -\varepsilon^{N+1}(r, \Delta u). \tag{43}$$

Складывая (43) с неравенством из (41), получаем

$$(\Delta p + \nu \Delta u, \Delta u) \le \varepsilon^{N+1}(r, \Delta u). \tag{44}$$

Из построений предыдущих пунктов следует, что правые части системы из (41) можно представить в виде

$$f_1^{(N)}(\Phi) = \left.\begin{cases} -\varepsilon^{N+2}((X_1^{(N)} \overline{y}_N)_x, \Phi_x), & N \text{ четно} \\ -\varepsilon^{N+1}((X_1^{(N)} \overline{y}_{N-1})_x, \Phi_x), & N \text{ нечетно} \end{cases}\right\} + \varepsilon^{N+1}(q_{1N}, \Phi),$$

$$f_2^{(N)}(\Phi) = \left.\begin{cases} -\varepsilon^{N+2}((X_1^{(N)} \overline{p}_N)_x, \Psi_x), & N \text{ четно} \\ -\varepsilon^{N+1}((X_1^{(N)} \overline{p}_{N-1})_x, \Psi_x), & N \text{ нечетно} \end{cases}\right\} + \varepsilon^{N+1}(q_{2N}, \Psi),$$

где q_{iN} — известные гладкие функции.

Полагая в (41) $\Phi = \Delta p$, $\Psi = -\Delta y$ и складывая, получаем

$$\| \Delta y \|^2 - (\Delta u, \Delta p) = f_1^{(N)}(\Delta p) - f_2^{(N)}(\Delta y),$$

отсюда с учетом (44) получаем неравенство

$$\| \Delta y \|^2 + \nu \| \Delta u \|^2 \le \varepsilon^{N+1}(r, \Delta u) + f_1^{(N)}(\Delta p) - f_2^{(N)}(\Delta y). \tag{45}$$

Введем величины

$$X^2 = \| \Delta y_x \|^2 + \| \Delta p_x \|^2, \; Y^2 = \| \Delta y \|^2 + \| \Delta p \|^2, \; Z^2 = \| \Delta y \|^2 + \| \Delta u \|^2.$$

Тогда из (45) при четном N имеем

$$\varepsilon X + Y \le C\varepsilon^{N+1}, \quad Z \le C\varepsilon^{N+1}. \tag{46}$$

Из (43), (46) получаем $\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u^{(N)}) = O(\varepsilon^{2(N+1)})$. Если N нечетно, то $\varepsilon X + Y \le$ $\le C\varepsilon^N$, $Z \le C\varepsilon^N$, $\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u^{(N)}) = O(\varepsilon^{2N})$.

Тем самым справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия лемм* 1 – 3. *Тогда* $y_N(\varepsilon, x, t)$, $p_N(\varepsilon, x, t)$, $u_N(\varepsilon, x, t)$ *представляют асимптотики решения задачи* (6) *и справедливы оценки*

$$\|(y - y_N)_x\| + \|(p - p_N)_x\| \le C\begin{Bmatrix}\varepsilon^N, & N \text{ четно} \\ \varepsilon^{N-1}, & N \text{ нечетно}\end{Bmatrix},$$

$$\| y - y_N \| + \| p - p_N \| \le C\begin{Bmatrix}\varepsilon^{N+1}, & N \text{ четно} \\ \varepsilon^N, & N \text{ нечетно}\end{Bmatrix},$$

$$\| u - u_N \| \le C\begin{Bmatrix}\varepsilon^{N+1}, & N \text{ четно} \\ \varepsilon^N, & N \text{ нечетно}\end{Bmatrix}, \; \mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u_N) = O\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon^{2(N+1)}, & N \text{ четно} \\ \varepsilon^{2N}, & N \text{ нечетно}\end{Bmatrix}\right).$$

2. Распределенное наблюдение и управление, зависящее только от времени. В уравнении (1) положим $u(x, t) = g(x)r(t)$, где $g(x) \in C^\infty(0, 1)$, $r(t) \in L_2(0, T)$ — управляющая функция. Область допустимых управлений зададим в виде

$$R_\partial = \{r: \xi_1 \le r(t) \le \xi_2 \text{ п. в. в } [0, T];\; 0 < \xi_i, \xi_i = \text{const} > 0\}. \tag{47}$$

Необходимо найти

$$\mathcal{J}(u) = \inf_{R_\partial}\left\{\int_{Q_T} (y(v) - z(x, t))^2 \partial x dt + \int_0^T v^2 dt\right\}. \tag{48}$$

Тогда единственное оптимальное управление определяется из соотношений (6), в которых неравенство будет иметь вид

$$\int_0^T [(p, g) + \nu r][v - r] dt \ge 0 \quad \forall v \in R_\partial, \tag{49}$$

где (. , .) — скалярное произведение в $L_2(0, 1)$. Задача (7) – (9) в этом случае принимает вид

$$(x, t) \in Q_1: \qquad \begin{aligned} \varepsilon y_t - \varepsilon^2 y_{xx} + y &= g(x)\xi_1, \\ -\varepsilon p_t - \varepsilon^2 p_{xx} + p &= y - z, \\ (g, p) + \nu\xi_1 &> 0; \end{aligned} \tag{50}$$

$$(x, t) \in Q_2: \qquad \begin{aligned} \varepsilon y_t - \varepsilon^2 y_{xx} + y &= g(x)\xi_2, \\ -\varepsilon p_t - \varepsilon^2 p_{xx} + p &= y - z, \\ (g, p) + \nu\xi_2 &< 0; \end{aligned} \tag{51}$$

$$(x,t) \in Q_3: \qquad \begin{aligned} &\varepsilon y_t - \varepsilon^2 y_{xx} + y + \nu^{-1} g(x)(g,p) = 0, \\ &-\varepsilon p_t - \varepsilon^2 p_{xx} + p = y - z. \end{aligned} \tag{52}$$

Формула (10) имеет вид

$$r(t) = \begin{cases} \xi_1, & (x,t) \in Q_1, \\ -\nu^{-1}(g,p), & (x,t) \in Q_3, \\ \xi_2, & (x,t) \in Q_2. \end{cases} \tag{53}$$

Регулярные составляющие решения задач (50) – (52) ищем в виде рядов (11), коэффициенты которых определяются из следующих систем:

для задачи (50)

$$\begin{gathered} \bar{y}_0 = g(x)\xi_1, \\ \bar{p}_0 = \bar{y}_0 - z, \quad (g, \bar{p}_0) + \nu\xi_1 > 0; \text{ при } i > 0 \text{ они определяются из (12);} \end{gathered} \tag{54}$$

для задачи (51)

$$\begin{gathered} \bar{y}_0 = g(x)\xi_2, \\ \bar{p}_0 = \bar{y}_0 - z, \ (g, \bar{p}_0) + \nu\xi_2 < 0; \text{ при } i > 0 \text{ они определяются из (12);} \end{gathered} \tag{55}$$

для задачи (52)

$$\begin{gathered} \bar{y}_0 + \nu^{-1} g(g, \bar{p}_0) = 0, \quad \bar{y}_i + \nu^{-1} g(g, \bar{p}_i) = \bar{y}_{i-2_{xx}} - \bar{y}_{i-1_t}, \\ \bar{p}_0 = \bar{y}_0 - z; \quad \bar{p}_i = \bar{y}_i + \bar{p}_{i-2_{xx}} - \bar{p}_{i-1_t}. \end{gathered} \tag{56}$$

Введем области, аппроксимирующие Q_i, $i = \overline{1,\ 3}$:

$$\begin{gathered} Q_{1+} = \{(x,t)\colon [0,1],\ \xi_1(\nu + \|g\|^2) - (g,z) > 0\}, \\ Q_{2-} = \{(x,t)\colon [0,1],\ \xi_2(\nu + \|g\|^2) - (g,z) < 0\},\ Q_{30} = \overline{Q}_T \setminus (\overline{Q}_{1+} \cup \overline{Q}_{2-}). \end{gathered} \tag{57}$$

***Замечания*.3.** Если $z = z(x)$, то Q_T совпадает с одной из областей (57).

4. Регулярные разложения дополняются погранслойными и угловыми разложениями соответственно в окрестностях границ и углов прямоугольника. Соответствующие построения несложно воспроизвести по результатам п. 1. При этом на исходные данные нужно наложить ограничения, обеспечивающие выполнение в основном неравенств из (50), (51). Такие условия здесь опущены, так как в этом пункте мы опишем только главные члены разложения решения исходной задачи в окрестностях особого подмногообразия.

Пусть t_* — единственный корень уравнения $\xi_1(\nu + \|g\|^2) - (g,z) = 0$ и $Q_T = Q_{1+} \cup Q_{30}$, т. е.

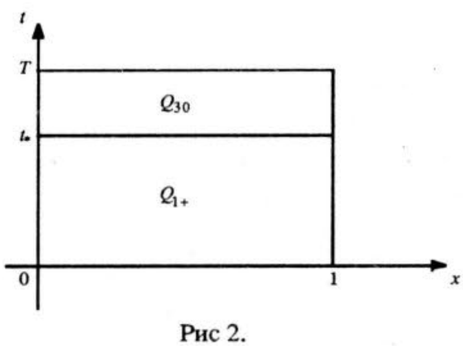

Рис 2.

При $t = t_*$, $i = 0$ решения (54) – (56) совпадают, но при $i > 0$ соответствующие решения разрывны, хотя решение исходной задачи непрерывно. Кроме того, прямая $t = t_*$, вообще говоря, не является точкой смены управления в исходной задаче. Поэтому в окрестности Γ этой прямой возникает внутренний погранслой. В указаной окрестности осуществляется переход от неравенства $(g, p) + \nu r > 0$ к равенству. Поэтому поверхность, на которой $(g, p) + \nu\xi_1 = 0$, ищем в виде

$$\left\{ (x, t) \in Q_T\colon\ t_* - t = \varepsilon H(\varepsilon), \quad H(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j H_j \right\}. \tag{58}$$

В Γ выполним замену переменных $(x, t) \to (x, \tau = (t_* - t)\varepsilon^{-1} - H(\varepsilon))$. Старшие члены внутреннего погранслоя ищем в виде

$$\begin{aligned} \hat{y}(x, \tau) &= \bar{y}_0(x, t_*) + \varepsilon \hat{y}_1(x, \tau), \\ \hat{p}(x, \tau) &= \bar{p}_0(x, t_*) + \varepsilon \hat{p}_1(x, \tau). \end{aligned} \tag{59}$$

Тогда из (50), (52) получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \hat{y}_1}{\partial \tau} + \hat{y}_1 + \nu^{-1} g(g, \hat{p}_1) \,|\operatorname{sign}\tau - 1|/2 &= 0, \\ \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \tau} + \hat{p}_1 = \hat{y}_1 &+ \frac{\partial z(x, t_*)}{\partial \tau}(\tau + H_0). \end{aligned} \tag{60}$$

Функции $\hat{y}_1, \hat{p}_1$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \hat{y}_1, \hat{p}_1 \in C(R) \quad \forall x \in [0, 1]; \\ (g, \hat{p}_1) = 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Из (60), (61) находим

$$H_0 = (1 + (1 + \nu^{-1}\| g \|^2)^{1/2}) / (1 + (1 + \nu^{-1}\| g \|^2)^{1/2} + \nu^{-1}\| g \|^2).$$

Далее легко получить непрерывное решение задачи (60). При $\tau = O(\varepsilon) > 0$ должно выполняться неравенство $(g, \dot{\hat{p}}_1(.\,, \tau)) > 0$. Так как $(g, \dot{\hat{p}}_1(.\,, \tau)) = (g, \dot{z})H_0$, то для выполнения приведенного неравенства нужно потребовать $(g, \dot{z}) > 0$.

На этом завершается построение старших членов внутреннего погранслоя. Дальнейшие построения и обоснования могут быть проведены аналогично п. 1.

1. *Lions J. L.* Perturbations Sinqulieres dans les Problemes aux Limites et en Controle Optimal // Lect. Notes Math. – 1973. – **323**. – 645 p.
2. *Капустян В. Е.* Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. – 1992. – № 2. – С. 70 – 74.
3. *Капустян В. Е.* Асимптотическое ограниченное управление в оптимальных эллиптических задачах // Автоматика. – 1992. – № 3. – С. 59 – 66.
4. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 410 с.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1992. – 208 с.
6. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 710 с.
7. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.

Получено 02. 11. 92