УДК 519.21

С. И. Писанец, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

НЕСКОЛЬКО ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА В R^m

For a sequence of stochastic equations of diffusion type, the conditions, which are close to necessary and sufficient ones, are found for the weak convergence of measures $\mu_{(\xi^{(n)}, w)}$, $n = 1, \dots$, which correspond to solutions, to the limit measure $\mu_{(\xi^{(0)}, w)}$. The conditions are also found under which the weak convergence of solutions of stochastic equations implies the strong convergence.

Для послідовності стохастичних рівнянь дифузійного типу знайдені умови, близькі до необхідних і достатніх, для слабкої збіжності мір $\mu_{(\xi^{(n)}, w)}$, $n = 1, \dots$, що відповідають розв'язкам, до граничної $\mu_{(\xi^{(0)}, w)}$, а також умови, при виконанні яких із слабкої збіжності розв'язків стохастичних рівнянь випливає сильна збіжність.

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ задана последовательность непрерывных случайных процессов $\xi_t^{(n)}$ $0 \le t \le T$, $n = 0, 1, \dots$, со значениями в R^m, удовлетворяющих стохастическим дифференциальным уравнениям

$$d\xi_t^{(n)} = \alpha_t^{(n)}(\xi^{(n)})dt + \beta_t^{(n)}(\xi^{(n)})dw_t, \quad \xi_0^{(n)} = \xi_{n0},\ n = 0, 1, \dots, 0 \le t \le T, \quad (1)$$

где функции $\alpha_t^{(n)}(x)$, $\beta_t^{(n)}(x)$ определены на произведении пространств $[0, T] \times$ $\times\, C_{[0, T]}(R^m)$, измеримы по совокупности переменных, при каждом $t \in [0, T]$ как функции от x, измеримы относительно σ-алгебры B_t, порожденной цилиндрическими множествами в $C_{[0, T]}(R^m)$ над $[0, t]$, и принимают значения в R^m и $L(R^m)$ (пространстве линейных симметричных операторов в R^m) соответственно, w_t, $0 \le t \le T$, — винеровский процесс в R^m.

Теорема 1. *Пусть для последовательности непрерывных случайных процессов $\xi_t^{(n)}$, $0 \le t \le T$, $n = 0, 1, \dots$, удовлетворяющих стохастическим дифференциальным уравнениям* (1), *выполнены следующие условия:*

I. *а)*

$$|\alpha^{(n)}(x)|_t \le K[1 + |x|_t], \quad (t, x) \in [0, T] \times C_{[0, T]}(R^m),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad |x|_t = \sup_{0 \le s \le t} |x(s)|,$$

$$\|\beta_t^{(n)}(x) - \beta_t^{(n)}(y)\| \le K \int_0^t |x_s - y_s| ds\ (x, y) \in \times C_{[0, T]}(R^m),\ t \in [0, T], n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sup_{t, n, x} \|\beta_t^{(n)}(x)\| \le K,\ (t, x) \in [0, T] \times C_{[0, T]}(R^m),\ n = 0, 1, \dots,$$

$$M|\xi_{n0}|^2 \le K, \quad n = 0, 1, \dots;$$

б) при фиксированных $(t, x) \in [0, T] \times C_{[0, T]}(R^m)$ существует обратный оператор $\beta_t^{(n)-1}(x)$, причем

$$\sup_{t, x, n} \|\beta_t^{(n)-1}(x)\| \le K, \quad (t, x) \in [0, T] \times C_{[0, T]}(R^m), \quad n = 0, 1, \dots;$$

в) функции $\beta_t^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, равностепенно непрерывны по совокуп-

ности переменных на каждом компакте $[0, T] \times M$, $M \in C_{[0,T]}(R^m)$;

г) $\mu_{\xi_0^{(n)}} \Rightarrow \mu_{\xi_0^{(0)}}$, $n \to \infty$.

II. *Решение уравнения* (1) $\mu_{(\xi^{(0)}, w)}$ *слабоединственно.*

Для того чтобы при $n \to \infty$

$$\mu_{(\xi^{(n)}, w)} \Rightarrow \mu_{(\xi^{(0)}, w)}, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} M \left| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\eta^{(n)}) ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(0)}) ds \right|^2 = 0, \quad t \le T, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} M \int_0^t \| \beta_s^{(n)}(\eta^{(0)}) - \beta_s^{(0)}(\eta^{(0)}) \|^2 ds = 0, \quad t \le T, \tag{4}$$

где процессы $\eta_t^{(n)}$, $0 \le t \le T$, $n = 0, 1, \ldots$, *являются сильными решениями стохастических дифференциальных уравнений*

$$d\eta_t^{(n)} = \beta_t^{(n)}(\eta^{(n)}) dw_t, \quad \eta_{(0)}^{(n)} = \xi_{0n}, \quad 0 \le t \le T, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Изучим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\eta_t^{(n)} = \beta_t^{(n)}(\eta^{(n)}) dw_t, \quad \eta_0^{(n)} = \xi_{0n}, \quad t \le T, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *В условиях теоремы* 1 *для того чтобы при каждом* $t \in (0, T]$

$$\lim_{n\to\infty} M \,|\, \eta_t^{(n)} - \eta_t^{(0)} \,|^2 = 0, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ $\mu_{(\eta^{(n)}, w)} \Rightarrow \mu_{(\eta^{(0)}, w)}$,

$$\lim_{n\to\infty} M \,|\, \xi_{0n} - \xi_{00} \,|^2 = 0. \tag{6}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается только достаточность условия (6). Поскольку из условий предположения 1 вытекают условия теоремы Скорохода и следствий из нее [1], то мы можем построить вероятностное пространство $\{\Omega', F', P'\}$ и последовательность случайных процессов $(\tilde{\eta}_t^{(n)}, \tilde{w}_t^{(n)})$ на нем такую, что:

1) $\mu_{(\eta^{(n)}, w)} = \mu_{(\tilde{\eta}^{(n)}, \tilde{w}^{(n)})}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

2) P-п. н. $\tilde{\eta}_t^{(n)} = \tilde{\eta}_0^{(0)} + \int_0^t \beta_s^{(n)}(\tilde{\eta}^{(n)}) d\tilde{w}_s^{(n)}$, $t \le T$, $n = 0, 1, \ldots$;

3) $(\tilde{\eta}_t^{(n)}, \tilde{w}_t^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{P'} (\tilde{\eta}_t^{(0)}, \tilde{w}_t^{(0)})$, $t \le T$.

Имеем

$$M' \left\| \int_0^t \beta_s^{(n)}(\tilde{\eta}^{(0)}) ds - \int_0^t \beta_s^{(0)}(\tilde{\eta}^{(0)}) ds \right\|^2 \le$$

$$\le 2M' \left\| \int_0^t \beta_s^{(n)}(\tilde{\eta}^{(0)}) ds - \int_0^t \beta_s^{(n)}(\tilde{\eta}^{(n)}) ds \right\|^2 +$$

$$+ 2M' \left\| \int_0^t \beta_s^{(n)}(\tilde{\eta}^{(n)})ds - \int_0^t \beta_s^{(0)}(\tilde{\eta}^{(0)})ds \right\|^2 \le 2K_1 M' \int_0^t |\tilde{\eta}_s^{(n)} - \tilde{\eta}_s^{(0)}|^2 ds +$$

$$+ 4M' \left| \int_0^t \beta_s^{(n)}(\tilde{\eta}^{(n)})d\tilde{w}_s^{(n)} - \int_0^t \beta_s^{(0)}(\tilde{\eta}^{(0)})d\tilde{w}_s^{(0)} \right|^2 +$$

$$+ 4M' \left| \int_0^t \beta_s^{(0)}(\tilde{\eta}^{(0)})d\tilde{w}_s^{(n)} - \int_0^t \beta_s^{(0)}(\eta^{(0)})d\tilde{w}_s^{(0)} \right|^2, \tag{6'}$$

$0 \le t \le T$, $n = 1, 2, \ldots$. Ясно, что при $n \to \infty$ правая часть соотношения стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} M \int_0^t \| \beta_s^{(n)}(\eta^{(0)})ds - \beta_s^{(0)}(\eta^{(0)}) \|^2 ds = 0, \quad 0 < t \le T.$$

Перейдем к доказательству теоремы 1 для уравнения (1). В силу условия 1 последовательность операторов $\beta_t^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, компактна на каждом из множеств $[0, T] \times M$, где M — произвольный компакт в $C_{[0, T]}(R^m)$.

Пусть при $k \to \infty$ $\beta_t^{(nk)}(x) \to \overline{\beta}_t^{(0)}(x)$ равномерно на $[0, T] \times M$. По теореме Скорохода можно построить вероятностное пространство $\{\Omega', F', P'\}$ и последовательность процессов $(\tilde{\xi}_t^{(n)}, \tilde{w}_t^{(n)})$, $n = 0, 1, \ldots$, на нем такую, что:

1) $$\mu_{(\tilde{\xi}^{(n)}, \tilde{w}^{(n)})} = \mu_{(\xi^{(n)}, w)} \quad n = 0, 1, \ldots ;$$

2) $$P'\text{-п. н. } \tilde{\xi}_t^{(n)} = \tilde{\xi}_0^{(0)} + \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\tilde{\xi}^{(n)})\, ds + \int_0^t \beta_s^{(n)}(\tilde{\xi}^{(n)})\, d\tilde{w}_s^{(n)},$$

$$0 \le t \le T, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ;$$

3) $$(\tilde{\xi}_t^{(n)}, \tilde{w}_t^{(n)}) \xrightarrow{P'} (\tilde{\xi}_t^{(0)}, \tilde{w}_t^{(0)}), \quad n \to \infty, \quad 0 \le t \le T.$$

Покажем далее, что при каждом $t \in [0, T]$

$$\lim_{k\to\infty} M' \left| \int_0^t \beta_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(n_k)})d\tilde{w}_s^{(n_k)} - \int_0^t \overline{\beta}_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)})d\tilde{w}_s^{(0)} \right|^2 = 0. \tag{7}$$

Имеем для $t \in [0, T]$

$$M' \left| \int_0^t \beta_s^{(n_k)}(\xi^{(n_k)})d\tilde{w}_s^{(n_k)} - \int_0^t \overline{\beta}_s^{(0)}(\xi^{(0)})d\tilde{w}_s^{(0)} \right|^2 \le \left| \int_0^t \beta_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(n_k)})d\tilde{w}_s^{(n_k)} - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \beta_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(0)})d\tilde{w}_s^{(n_k)} \right|^2 + 2M' \left| \int_0^t \beta_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(0)})d\tilde{w}_s^{(n_k)} - \int_0^t \overline{\beta}_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)})d\tilde{w}_s^{(0)} \right|^2 \le$$

$$\le 2K^2 M' \int_0^t \| \tilde{\xi}_s^{(n_k)} - \tilde{\xi}_s^{(0)} \|^2 ds + \int_{\{\|\xi^{(0)}\|_t \le N\}} \int_0^t \| \beta^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(0)}) - \overline{\beta}_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) \|^2 ds\, dP +$$

$$+ \int_{\{\|\xi^{(0)}\|_t > N\}} \int_0^t \| \beta_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(0)}) - \overline{\beta}_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) \|^2 ds\, dP + M' \left| \int_0^t \overline{\beta}_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)})d\tilde{w}_s^{(n_k)} - \right.$$

$$- \int_0^t \overline{\beta}_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) d\tilde{w}_s^{(0)} \Big|^2, \quad 0 < t \leq T, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что правую часть в соотношении (8) путем выбора достаточно больших N и k можно сделать сколь угодно малой. Таким образом, справедливость соотношения (7) установлена. Но тогда с вероятностью 1 процесс $\tilde{\xi}_t^{(0)}$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{\xi}_t^{(0)} = \alpha_t^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) dt + \overline{\beta}_t^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) d\tilde{w}_t^{(0)}, \quad \tilde{\xi}_t^{(0)}\big|_{t=0} = \tilde{\xi}_0^{(0)}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{9}$$

Из соотношений (1) и (9) вытекает, что с равной 1 вероятностью

$$\int_0^t \beta_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) d\tilde{w}_s^{(0)} = \int_0^t \overline{\beta}_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) d\tilde{w}_s^{(0)}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{10}$$

Из совпадения с вероятностью 1 мартингалов вытекает совпадение их характеристик, т. е. почти наверное

$$\int_0^t \beta_s^{(0)2}(\tilde{\xi}^{(0)}) ds = \int_0^t \overline{\beta}_s^{(0)2}(\tilde{\xi}^{(0)}) ds, \quad t \leq T, \tag{11}$$

или почти для всех $t \in [0, T]$ $\beta_t^{(0)}(x) = \overline{\beta}_t^{(0)}(x)$ для почти всех $x \in C_{[0,T]}(R^m)$ по мере $\mu_{\xi^{(0)}}$ и $\mu_{\eta^{(0)}}$. Поскольку все сходящиеся подпоследовательности компактной последовательности $\beta_t^{(n_k)}(x)$, $k = 1, \ldots$, $\mu_{\eta^{(0)}} \times l_1$-почти наверное имеют одну и ту же предельную точку $\overline{\beta}_t^{(0)}(x)$ (l_1 — мера Лебега на $[0, T]$), то и сама последовательность $\beta_t^{(n)}(x)$ будет сходиться к $\beta_t^{(0)}(x)$ при $n \to \infty$. Следовательно, в силу условия 1 и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{n \to \infty} M \int_0^t \| \beta_s^{(n)}(\eta^{(0)}) - \beta_s^{(0)}(\eta^{(0)}) \|^2 ds = 0, \quad t \leq T, \tag{12}$$

и значит, повторяя приведенные выше рассуждения, мы можем заключить, что

$$\lim_{n \to \infty} M' \Big| \int_0^t \beta_s^{(n)}(\tilde{\xi}^{(n)}) d\tilde{w}_s^{(n)} - \int_0^t \beta_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) d\tilde{w}_s^{(0)} \Big|^2 = 0 \tag{13}$$

при каждом $t \in [0, T]$. Из соотношений 2), 3) и (13) следует

$$P' - \lim_{n \to \infty} \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\tilde{\xi}^{(n)}) ds = \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) ds, \quad t \leq T. \tag{14}$$

Покажем, что справедливо соотношение (3). С этой целью заметим, что в силу соотношения (12) и предложения 1 при каждом $t \in [0, T]$

$$\lim_{n \to \infty} M | \eta_t^{(n)} - \eta_t^{(0)} |^2 = 0. \tag{15}$$

Но тогда, используя (5), (14) и условия теоремы 1, находим

$$M \Big| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\eta^{(n)}) ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(0)}) ds \Big|^2 \leq 2 \Big[M \Big| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\eta^{(n)}) ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(n)}) ds \Big|^2 +$$

$$+ M \left| \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(n)}) ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(0)}) ds \right|^2 \Bigg] = 2\Bigg[M' \left| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\tilde{\xi}^{(n)}) ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(n)}) ds \right|^2 \frac{d\mu_{\tilde{\eta}^{(n)}}}{d\mu_{\tilde{\xi}^{(n)}}}(\tilde{\xi}^{(n)}) + M \left| \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\eta}^{(n)}) ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\eta}^{(0)}) ds \right|^2 \Bigg]. \quad (16)$$

Пусть последовательность непрерывных неупреждающих функционалов такова, что μ_{η_0}-п. в. равномерно $-\lim\limits_{l \to \infty} \varphi_t^{(l)}(x) = \int_0^t \alpha_s^{(0)}(x) ds.$ Тогда

$$M' \left| \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(n)}) ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) ds \right|^2 \le$$

$$\le 3\Bigg[M' \left| \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(n)}) ds - \varphi_t^{(l)}(\tilde{\xi}^{(n)}) \right|^2 + M' \left| \varphi_t^{(l)}(\tilde{\xi}^{(n)}) - \varphi_t^{(l)}(\xi^{(0)}) \right|^2 +$$

$$+ M \left| \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\xi^{(0)}) ds - \varphi_t^{(l)}(\xi^{(0)}) \right|^2 \Bigg] \le$$

$$\le 3\Bigg[M \left| \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(n)}) ds - \varphi_t^{(l)}(\eta^{(n)}) \right|^2 \frac{d\mu_{\xi^{(n)}}}{d\mu_{\eta^{(n)}}}(\eta^{(n)}) + M \left| \varphi_t^{(l)}(\xi^{(n)}) - \right.$$

$$\left. - \varphi_t^{(l)}(\xi^{(0)}) \right|^2 + M \left| \varphi_t^{(l)}(\eta^{(0)}) - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(0)}) ds \right|^2 \frac{d\mu_{\xi^{(0)}}}{d\mu_{\eta^{(0)}}}(\eta^{(0)}) \Bigg]. \quad (17)$$

Используя условия теоремы 1, неравенство Гельдера, лемму 1 из [2, с. 351], лемму 3.18 из [3] и теорему Егорова, можно показать, что выбором l и n правую часть (17) можно сделать сколь угодно малой. Аналогично показывается, что

$$P - \lim_{n \to \infty} \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(n)}) ds = \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(0)}) ds. \quad (18)$$

Но тогда, в свою очередь, правая часть соотношения (16) стеремится к 0 при $n \to \infty$ и необходимость условий (3), (4) теоремы 1 доказана.

Достаточность. Так как из условий теоремы 1 легко следуют условия теоремы Скорохода и следствий из нее [1], то мы можем указать такую подпоследовательность индексов n_k что на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega', F', P'\}$ существуют процессы $(\tilde{\xi}_t^{(n_k)}, \tilde{w}_t^{(n_k)})$, $k = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющие условиям:

1) $$\mu_{(\tilde{\xi}^{(n_k)}, \tilde{w}^{(n_k)})} = \mu_{(\xi^{(n_k)}, w)}, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

2) $$P'\text{-п. н.} \quad \tilde{\xi}_t^{(n_k)} = \tilde{\xi}_0^{(n_k)} + \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\tilde{\xi}^{(n_k)}) ds + \int_0^t \beta_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(n_k)}) d\tilde{w}_s^{(n_k)},$$

$$0 \le t \le T, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

3) $$(\tilde{\xi}_t^{(n_k)}, \tilde{w}_t^{(n_k)}) \to (\tilde{\xi}_t^{(0)}, \tilde{w}_t^{(0)}), \quad n \to \infty;$$

по вероятности при каждом $t \in [0, T]$.

Далее покажем, что процесс $\tilde{\xi}_t^{(0)}$, $0 \le t \le T$, является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{\xi}_t^{(0)} = \alpha_t(\tilde{\xi}^{(0)}) dt + \beta_t^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)}) d\tilde{w}^{(0)}, \quad t \le T. \quad (19)$$

Имеем

$$M'\left|\int_0^t \alpha_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(n_k)})ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)})ds\right| \le$$

$$\le M'\left|\int_0^t \alpha_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(n_k)})ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(n_k)})ds\right| +$$

$$+ M'\left|\int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(n_k)})ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)})ds\right| =$$

$$= M'\left|\int_0^t \alpha_s^{(n_k)}(\tilde{\eta}^{(n_k)})ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\eta}^{(n_k)})ds\right| \frac{d\mu_{\tilde{\xi}^{(n_k)}}}{d\mu_{\tilde{\eta}^{(n_k)}}}(\tilde{\eta}^{(n_k)}) +$$

$$+ M'\left|\int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(n_k)})ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)})ds\right|. \tag{20}$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше при доказательстве необходимости условий (3), (4), убеждаемся в том, что правая часть соотношения (20) стремится к 0 при $k \to \infty$. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} M'\left|\int_0^t \alpha_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(n_k)})ds - \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)})ds\right| = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{21}$$

Так же, как это делалось при доказательстве необходимости условий (3), (4) теоремы 1, устанавливаем справедливость равенства

$$\lim_{k\to\infty} M'\left|\int_0^t \beta_s^{(n_k)}(\tilde{\xi}^{(n_k)})d\tilde{w}_s^{(n_k)} - \int_0^t \beta_s^{(0)}(\tilde{\xi}^{(0)})d\tilde{w}_s^{(0)}\right|^2 = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{22}$$

Из соотношений (21), (22) и 3) вытекает (19). Для завершения доказательства достаточности условий (3), (4) теоремы заметим, что поскольку в силу единственности слабого решения уравнения (1) $n = 0$, $\mu_{(\xi^{(0)}, w)} = \mu_{(\tilde{\xi}^{(0)}, \tilde{w}^{(0)})}$, и значит, все сходящиеся подпоследовательности компактной последовательности $\mu_{(\xi^{(n)}, w)}$ $n = 1, \ldots$, сходятся к одной и той же предельной мере $\mu_{(\xi^{(n)}, w)}$ $n = 1, \ldots$, то и сама последовательность $\mu_{(\xi^{(n)}, w)}$ будет слабо сходиться при $n \to \infty$ к предельной мере $\mu_{(\xi^{(0)}, w)}$.

Сформулируем теорему о связи между сходимостью распределений и сходимостью в среднеквадратическом для процессов диффузионного типа (1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и при каждом* $t \in [0, T]$, $x \in C_{[0,T]}(R^m)$ $\beta_t^{(n)}(x) = \beta_t^{(0)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\mathfrak{F}_t^{(\xi^{(n)})} = \mathfrak{F}_t^w, \quad t \le T, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

$$M\left[\frac{d\mu_{\eta^{(0)}}}{d\mu_{\xi^{(n)}}}(\eta^{(0)})\right]^\delta \le K, \quad \delta > 0. \tag{23}$$

Для того, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} M\,|\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(0)}|^2 = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$

$$M\,|\,\xi_0^{(n)} - \xi_0^{(0)}|^2 \to 0, \quad \mu_{(\xi^{(n)},\, w)} \Rightarrow \mu_{(\xi^{(0)},\, w)}. \tag{24}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь достаточность условия (24). Достаточность условия (24) следует из теоремы 1 настоящей статьи и теоремы 2 из [4].

Теорема 3. *Пусть для последовательности стохастических уравнений* (1) *выполнены условия теоремы* 1. *Предположим, что для коэффициентов переноса* $\alpha_t^{(n)}(x)$, $n = 1, \ldots$, *дополнительно выполнены условия:*

а) при $n \to 0$

$$M\left|\alpha_t^{(n)}(\eta^{(0)}) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \alpha_s^{(n)}(\eta^{(0)})\,ds\right|^2 \to 0,$$

равномерно относительно $n = 0, 1, 2, \ldots$;

б) семейство функций $\left\{\int_0^t \alpha_s^{(n)}(x)\,ds,\ n = 0, 1, \ldots\right\}$ *слабо равностепенно непрерывно по x на каждом компакте* $[0, T] \times M$, $t \le T$, *где* M *— компакт в* $C_{[0,\,T]}(R^m)$;

$$\sup_{x,\,n} \int_0^T |\alpha_t^{(n)}(x)|^{1+\delta}\,dt \le K, \quad \delta > 0.$$

Тогда

$$\mu_{(\xi^{(n)},\, w)} \Rightarrow \mu_{(\xi^{(0)},\, w)} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} M\left|\int_0^t [\,\alpha_s^{(n)}(\eta^{(0)}) - \alpha_s^{(0)}(\eta^{(0)})\,]\,ds\right|^2 = 0, \\ 0 \le t \le T, \\ \lim\limits_{n \to \infty} M\int_0^t \|\beta_s^{(n)}(\eta^{(0)}) - \beta_s^{(0)}(\eta^{(0)})\|^2\,ds = 0, \end{cases}$$

$0 \le t \le T$, *где процесс* $\eta_t^{(0)}$ *является сильным решением стохастического дифференциального уравнения*

$$d\eta_t^{(0)} = \beta_t^{(0)}(\eta^{(0)})\,dw_t, \quad \eta_0^{(0)} = \xi_0^{(0)}, \quad 0 \le t \le T.$$

***Замечание* 1.** Теоремы 1, 3 справедливы при тех же условиях и в том случае, когда винеровский процесс $w(t)$ зависит от индекса n. При этом соответствующие утверждения имеют вид

1)

$$\mu_{(\xi^{(n)},\, w^{(n)})} \Rightarrow \mu_{(\xi^{(0)},\, w^{(0)})} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} M\left|\int_0^t [\,\alpha_s^{(n)}(\eta^{(n)}) - \alpha_s^{(0)}(\eta^{(0)})\,]\,ds\right|^2 = 0, \\ 0 \le t \le T, \\ \lim\limits_{n \to \infty} M\int_0^t \|\beta_s^{(n)}(\eta^{(0)}) - \beta_s^{(0)}(\eta^{(0)})\|^2\,ds = 0, \\ 0 \le t \le T; \end{cases}$$

2)

$$\mu_{(\xi^{(n)}, w^{(n)})} \Rightarrow \mu_{(\xi^{(0)}, w^{(0)})} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} M\left|\int\limits_0^t [\,\alpha_s^{(n)}(\eta^{(0)}) - \alpha_s^{(0)}(\eta^{(0)})\,]ds\right|^2 = 0, \\ 0 \le t \le T, \\ \lim\limits_{n\to\infty} M\int\limits_0^t \|\beta_s^{(n)}(\eta^{(0)}) - \beta_s^{(0)}(\eta^{(0)})\|^2 ds = 0, \\ 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть для последовательности процессов* (1), *выполнены условия теоремы* 3, $\mathfrak{F}_t^{\xi^{(n)}} = \mathfrak{F}_t^w$, $0 \le t \le T$, $n = 0, 1, \ldots$,

$$M\left[\frac{d\mu_{\eta^{(n)}}}{d\mu_{\xi^{(n)}}}(\eta^{(n)})\right]^\delta \le K < \infty, \quad \delta > 0.$$

Для того чтобы при каждом $t \in [0, T]$ $\lim\limits_{n\to\infty} M\,|\,\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(0)}\,|^2 = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} M\,\Big|\int\limits_0^t \alpha_s^{(n)}(\eta^{(0)})ds - \int\limits_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta^{(0)})ds\Big|^2 = 0, \quad t \le T,$$

$$\lim_{n\to\infty} M\int\limits_0^t \|\,\beta_s^{(n)}(\eta^{(0)}) - \beta_s^{(0)}(\eta^{(0)})\,\|^2 ds = 0, \quad t \le T,$$

где $\eta_t^{(0)}$ *— решение стохастического уравнения*

$$\eta_t^{(0)} = \xi_0^{(0)} + \int\limits_0^t \beta_s^{(0)}(\eta^{(0)})dw_s, \quad 0 \le t \le T.$$

Теорема 4 доказывается так же, как и теорема 2 в [4].

Теорема 5. *Пусть для последовательности процессов* (1) *выполнены условия теоремы* 4. *Для того чтобы при каждом* $t \in [0, T]$

$$\lim_{n\to\infty} M\,|\,\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(0)}\,|^2 = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$

$$\mu_{(\xi^{(n)}, w)} \Rightarrow \mu_{(\xi^{(0)}, w)}.$$

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 2.

1. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Киев. ун-т, 1961. – 210 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1971–1975. – Т. I–III. – 664 с.; 639 с.; 496 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы. – Киев: Наук. думка, 1976. – 510 с.
4. *Писанец С. И.* Предельные теоремы для процессов диффузионного типа в R^m // Теория вероятностей и ее применения. – 1981. – Вып. 3. – С. 597 – 606.

Получено 10.01.93