УДК 517.96

С. А. Плакса, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О НЕТЕРОВОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ НА СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

In the theory of complete integral equation with a Cauchy kernel, the classes of curves and given functions are extended and the generalizations of classic Noether theorems are proved. As a consequence of these theorems, it is proved that the operators associated with this equation, which act into incomplete normed spaces, are Noetherian.

Розширено класи кривих та заданих функцій в теорії повного сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші та доведено узагальнення класичних теорем Нетера. Як наслідок цих теорем доведено нетеровість асоційованих з зазначеним рівнянням операторів, які діють в неповні нормовані простори.

Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая (з. ж. с. к.) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, D^+ и D^- соответственно внутренняя и внешняя области, ограниченные γ, $0 \in D^+$. Через C обозначим множество непрерывных на γ функций, через $H^\pm$ — множество непрерывных в $\overline{D^\pm}$ и голоморфных в $D^\pm$ (включая точку $z = \infty$ для D^-) функций, $\mathcal{H} := H^+ + H^-$ (в формульных определениях используются знаки ":=" и "=:", причем двоеточие пишется со стороны вводимого обозначения).

В настоящей работе расширяются классы заданных функций $a, b, f, k(t, \tau)$ и кривых γ в теории сингулярного интегрального уравнения

$$(K\varphi)(t) := a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (k\varphi)(t) = f(t), \tag{1}$$

где

$$(S\varphi)(t) := \frac{1}{\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\{\tau\in\gamma:\,|\tau-t|>\varepsilon\}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau + \varphi(t),$$

$$(k\varphi)(t) := \int\limits_{\gamma} k(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Предполагаем, что $a, b \in C$, $a^2(t) - b^2(t) \neq 0 \ \ \forall\, t \in \gamma$, $\ln\Big(t^{-\kappa}(a(t) - b(t)) / (a(t) + b(t))\Big) \in \mathcal{H}$, где

$$\kappa := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} d\ln\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)},$$

функция $k(t, \tau)$ принадлежит определяемому ниже классу $\mathcal{K}$, $f \in \mathcal{H}$. Исследуем разрешимость уравнения (1) в классе $\mathcal{H}$.

Классическая нетеровская теория уравнения (1) построена в гельдеровских пространствах на гладкой кривой γ при слабостепенных особенностях у функции $k(t, \tau)$ [1, 2]. Естественным обобщением этой теории является теория нетеровых операторов в банаховых пространствах (см., например, [3]). Применение последней к уравнению (1) в классе $\mathcal{H}$ весьма затруднительно в связи со сложностью наделения класса $\mathcal{H}$ структурой банахова пространства.

Введя топологию в классе $\mathcal{H}$, можно попытаться получить достаточные условия нетеровости соответствующего уравнению (1) оператора, используя результаты работ [4, 5] и приводимую ниже теорему 1 о разрешимости характеристического уравнения

$$(K^0\varphi)(t) := a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) = f(t), \tag{2}$$

Однако применяемый для исследования уравнения (1) метод регуляризации Карлемана – Векуа нейтрален к топологическим свойствам класса $\mathcal{H}$. Он позволяет при предположениях теоремы 4 доказать утверждения 1 – 3 (теоремы Нетера) этой теоремы, формулировки которых так же, как и сам метод Карлемана – Векуа, не требуют топологизации класса $\mathcal{H}$. При этом предполагается, что мера порции кривой γ в каждом круге с центром в точке кривой соизмерима с радиусом круга; a и b принадлежат классу I_γ функций, удовлетворяющих условию Дини; $f \in \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_1$ — не являющийся, вообще говоря, линейным пространством подкласс класса $\mathcal{H}$ такой, что $I_\gamma \subset \mathcal{H}_1$, $I_\gamma + \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1$ и при $f \in \mathcal{H}_1$ разрешимость уравнения (2) имеет классический вид; $k(t, \tau)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, в котором содержатся функции с большим, чем слабостепенным, ростом при $|t - \tau| \to 0$ и с осциллирующими разрывами при $t = \tau$. Как следствие теоремы 4 доказывается нетеровость ассоциированных с уравнением (1) сингулярных интегральных операторов, действующих в неполные нормированные подпространства пространства $\mathcal{H}$ с нормой $\|\varphi\| = \max\limits_{t\in\gamma} |\varphi(t)|$.

Отличительная особенность утверждений 1 – 3 теоремы 4 по сравнению с классическими теоремами Нетера [1, 2] состоит в наличии в их формулировках решений класса $\tilde{L}_\infty$ союзного однородного уравнения ($\tilde{L}_\infty := \bigcap_{1<p<\infty} L_p$, L_p — множество заданных на γ и суммируемых в степени p функций). Это вызвано более общими предположениями о функции $k(t, \tau)$, вследствие чего и нарушена прежняя симметрия между уравнением (1) и ему союзным.

1. Используя связь между уравнением (2) и краевой задачей Римана, рассуждениями, аналогичными изложенным в гл. III работы [6], получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* γ — *з. ж. с. к.*; $a, b \in C$; $a^2(t) - b^2(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in \gamma$; $\ln\left(t^{-\kappa}(a(t) - b(t)) / (a(t) + b(t)) \right) \in \mathcal{H}$; $f \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$; $\mathcal{H}_1$ *содержит все функции вида* $(a(t) + b(t))r(t)$, *где* r — *рациональная функция из* C. *Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

$$1)\quad \frac{f(t)}{Z(t)} \in \mathcal{H} \quad \forall\, f \in \mathcal{H}_1, \tag{3}$$

где

$$Z(t) := (a(t) - b(t))t^{-\kappa} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\ln\left(\tau^{-\kappa}\frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)} \right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ln\left(t^{-\kappa}\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} \right) \right) \frac{d\tau}{\tau - t} \right);$$

2) *если* $\kappa \geq 0$, *то уравнение* (2) *разрешимо в классе* $\mathcal{H}$ *для всех* $f \in \mathcal{H}_1$, *а если* $\kappa < 0$, *то для его разрешимости в классе* $\mathcal{H}$ *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\int_\gamma \psi_f(t)t^{s-1}dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, -\kappa,$$

где $\psi_f(t) := f(t)/Z(t)$.

Общее решение уравнения (2) *в классе* $\mathcal{H}$ *имеет вид*

$$\varphi(x) = \frac{1}{a^2(x) - b^2(x)}\Big(a(x)f(x) - b(x)Z(x)(S\psi_f)(x) - b(x)Z(x)P_{\kappa-1}(x) \Big), \tag{4}$$

где $P_{\kappa-1}$ — *произвольный многочлен степени не выше* $\kappa-1$ *при* $\kappa>0$ *и* $P_{\kappa-1}\equiv 0$ *при* $\kappa\le 0$.

Работы многих авторов посвящены нахождению условий на функции a, b, f, достаточных для выполнения условий (3) и $\ln\left(t^{-\kappa}(a(t)-b(t))/(a(t)+b(t))\right)\in\mathcal{H}$. Наиболее общие результаты такого рода получены в работах [7–10]. Кроме того, в [11] получены необходимые и достаточные условия того, что $g\in\mathcal{H}$.

Отметим некоторые факты, вытекающие из [7–11] и относящиеся к случаю з. ж. с. к. γ, удовлетворяющей условию $\theta(\varepsilon):=\sup\limits_{x\in\gamma}\operatorname{mes}\{t\in\gamma\colon |t-x|\le\varepsilon\}=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, где mes обозначает линейную меру Лебега на γ:

1) если

$$a,b\in I_\gamma:=\left\{g\in C\colon \int\limits_0^d \frac{\omega(g,\gamma,y)}{y}dy<\infty\right\}$$

$\left(\text{здесь}\quad \omega(g,\gamma,y):=\sup\limits_{t_1,t_2\in\gamma,|t_1-t_2|\le y}|g(t_1)-g(t_2)|,\quad d:=\sup\limits_{t,x\in\gamma}|t-x|\right)$ и $a^2(t)-b^2(t)\ne 0$ $\forall\, t\in\gamma$, то $\ln\left(t^{-\kappa}(a(t)-b(t))/(a(t)+b(t))\right)\in\mathcal{H}$;

2) если $a,b\in I_\gamma$ и $a^2(t)-b^2(t)\ne 0$ $\forall\, t\in\gamma$, то выполняется условие (3) при $\mathcal{H}_1=\Phi:=\bigcup_{n=0}^\infty\Phi_n$, где Φ_n обозначает класс функций f, представимых в виде

$$f(t)=\sum_{j=0}^n M_j(t)c_j^+(t)\quad\forall\, t\in\gamma, \tag{5}$$

где $M_0,M_1,\ldots,M_n\in I_\gamma$; $c_0^+\equiv 1$; $c_1^+,c_2^+,\ldots,c_n^+\in H^+$;

3) если

$$a,b\in I'_\gamma:=\left\{g\in C\colon \int\limits_0^d \frac{\omega(g,\gamma,y)}{y}\ln\frac{2d}{y}dy<\infty\right\},$$

$a^2(t)-b^2(t)\ne 0$ $\forall\, t\in\gamma$, то выполняется условие (3) при $\mathcal{H}_1=\mathcal{H}$.

2. Пусть γ — з. ж. с. к., $\theta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$. Обозначим через $\mathcal{K}$ класс непрерывных на $\gamma\times\gamma\setminus\{(t,\tau)\in\gamma\times\gamma\colon t=\tau\}$ функций $k(t,\tau)$, удовлетворяющих условиям

$$\int\limits_0^d\frac{\omega^{1,0}(k,y)}{y}dy<\infty, \tag{6}$$

$$\int\limits_0^\varepsilon \sup_{\substack{\tau\colon\tau\in\gamma\\ x\le|\tau-t|\le 2x}}\int\limits_0^\varepsilon\frac{M_{\tau,3\varepsilon}(k_\tau,\gamma,y)}{y+x}dy\,dx\to 0\quad(\varepsilon\to 0)\quad\forall\, t\in\gamma,$$

$$\left(\int\limits_0^\varepsilon \sup_{\substack{\tau\colon\tau\in\gamma\\ x\le|\tau-t|\le 2x}}\int\limits_0^{x/4}\frac{\omega_t(k_\tau,\gamma,y,2y)}{y}dy\,dx\right.+$$

$$+\left.\int\limits_{4\varepsilon}^d \sup_{\substack{\tau\colon\tau\in\gamma\\ x\le|\tau-t|\le 2x}}\int\limits_0^\varepsilon\frac{\omega_t(k_\tau,\gamma,y,2y)}{y}dy\,dx\right)\to 0\quad(\varepsilon\to 0)\quad\forall\, t\in\gamma,$$

$$\omega^{0,1}(k,\varepsilon)\to 0\quad(\varepsilon\to 0),$$

$$\sup_{\tau\in\gamma}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\frac{M_{\tau,3\varepsilon}(k_\tau,\gamma,y)}{y+x}dydx \to 0 \quad (\varepsilon\to 0),$$

$$\sup_{\tau\in\gamma}\Bigg(\int_0^{\varepsilon}\sup_{\substack{t:\,t\in\gamma\\ x\le|t-\tau|\le 2x}}\int_0^{x/4}\frac{\omega_t(k_\tau,\gamma,y,2y)}{y}dydx\,+$$

$$+\int_{4\varepsilon}^{d}\sup_{\substack{t:\,t\in\gamma\\ x\le|t-\tau|\le 2x}}\int_0^{\varepsilon}\frac{\omega_t(k_\tau,\gamma,y,2y)}{y}dydx\Bigg)\to 0 \quad (\varepsilon\to 0),$$

где интегралы понимаются как несобственные верхние интегралы Дарбу

$$\omega^{1,0}(k,y) := \sup_{t_1,t_2\in\gamma,|t_1-t_2|\le y}\int_\gamma |k(t_1,\tau)-k(t_2,\tau)|\,|d\tau|,$$

$$\omega^{0,1}(k,y) := \sup_{\tau_1,\tau_2\in\gamma,|\tau_1-\tau_2|\le y}\int_\gamma |k(t,\tau_1)-k(t,\tau_2)|\,|d\tau|,$$

$$k_\tau(t) := k(t,\tau),\ \ M_{\tau,\varepsilon}(k_\tau,\gamma,\delta) :=$$

$$:= \sup\{|k(\zeta,\tau)|:\ \zeta\in\gamma,\ \delta<|\zeta-\tau|\le\varepsilon\},$$

$$\omega_t(k_\tau,\gamma,y,2y) := \sup\{|k_\tau(\zeta)-k_\tau(t)|:\ \zeta\in\gamma,\ y\le|\zeta-\tau|\le 2y\}.$$

В классе $\mathcal{K}$ содержатся функции со слабостепенной особенностью при $t = \tau$ [1, 2], в нем имеются функции с большим, чем слабостепенным, ростом при $|t-\tau|\to 0$, а также функции с осциллирующими разрывами при $t=\tau$.

Множество C будем рассматривать также как банахово пространство с нормой $\|\varphi\|_C := \max_{t\in\gamma}|\varphi(t)|\ \ \forall\,\varphi\in C$. Обозначим

$$(K_{-1}^0 g)(t) := \frac{1}{a^2(t)-b^2(t)}\Big(a(t)g(t)-b(t)Z(t)(S\psi_g)(t)\Big).$$

С учетом теоремы 1 [12] получим

$$(K_{-1}^0 k\varphi)(t) = \int_\gamma\Bigg(\frac{k(t,\tau)}{a(t)+b(t)}+\frac{b(t)Z(t)k(t,\tau)}{\pi i(a^2(t)-b^2(t))}\int_\gamma\left(\frac{1}{Z(\zeta)}-\frac{1}{Z(t)}\right)\frac{d\zeta}{\zeta-t}\,-$$

$$-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i(a^2(t)-b^2(t))}\int_\gamma\frac{k(\zeta,\tau)-k(t,\tau)}{Z(\zeta)(\zeta-t)}\,d\zeta\Bigg)\varphi(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* γ — *з. ж. с. к.;* $\theta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$; $a,\,b\in I_\gamma$; $a^2(t)-b^2(t)\ne 0\ \ \forall\,t\in\gamma$; $f\in\mathcal{H}_1\subset\mathcal{H}$; $I_\gamma\subset\mathcal{H}_1$; $I_\gamma+\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_1$; *выполнено условие* (3); $k(t,\tau)\in\mathcal{K}$. *Тогда:*

1) *при* $\kappa\ge 0$ *уравнение* (1) *эквивалентно (в смысле нахождения решений класса* $\mathcal{H}$*) уравнению*

$$\varphi(x)+(K_{-1}^0 k\varphi)(x) = f_0(x)\quad\forall\,x\in\gamma, \tag{8}$$

где через $f_0(x)$ *обозначена правая часть равенства* (4), *а при* $\kappa<0$ *оно эквивалентно (в том же смысле) системе уравнений* (8) *и*

$$\int_\gamma\left(\int_\gamma\frac{k(\tau,t)\tau^j}{Z(\tau)}d\tau\right)\varphi(t)dt = \int_\gamma\frac{t^j f(t)}{Z(t)}\,dt,\ j=0,1,\ldots,-\kappa-1; \tag{9}$$

2) *оператор* $K^0_{-1}k$ *вполнė непрерывен в* C;

3) *если* $f \in \Phi_n$ (*т. е. справедливо равенство* (5)), *то решение уравнения* (1) φ *класса* $\mathcal{H}$ (*если* (1) *разрешимо в классе* $\mathcal{H}$) *принадлежит* Φ_{n+1} *и*

$$\omega(\varphi, \gamma, \delta) \le c\Bigg(\sum_{j=0}^{n} \omega(c_j^+, \gamma, \delta) +$$

$$+ \int_0^{2d} \Bigg(\omega(a, \gamma, y) + \omega(b, \gamma, y) + \sum_{j=0}^{n} \omega(M_j, \gamma, y) + \omega^{1,0}(k, y) \Bigg) \frac{dy}{y(1+y/\delta)} \Bigg),$$

где постоянная c *не зависит от* δ.

Доказательство. Поскольку в силу условия (6) $(k\varphi)(t) \in I_\gamma \;\; \forall\, \varphi \in C$, то утверждение 1 теоремы следует из теоремы 1. Утверждения 2, 3 теоремы следуют из результатов работ [9, 10] и теоремы 2 [12]. Теорема доказана.

Операторы

$$(K^{0\prime} g)(t) := a(t)g(t) - (S(bg))(t),$$

$$(k'g)(t) := \int_\gamma k(\tau, t) g(\tau) d\tau, \quad (K'g)(t) := (K^{0\prime} g)(t) + (k'g)(t)$$

называются союзными соответственно операторам K^0, k, K.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* γ — *з. ж. с. к.*; $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$; $a, b \in I_\gamma$; $a^2(t) - b^2(t) \ne 0 \;\; \forall\, t \in \gamma$; $k(t, \tau) \in \mathcal{K}$. *Тогда оператор* $(K^0_{-1}k)'$ *вполне непрерывен в* C.

Доказательство. В силу (7) справедливо равенство $(K^0_{-1}k)' = T_1 - T_2$, где

$$(T_1 g)(t) := \int_\gamma \Bigg(\frac{k(\tau,t)}{a(\tau)+b(\tau)} + \frac{b(\tau)Z(\tau)k(\tau,t)}{\pi i(a^2(\tau)-b^2(\tau))} \times$$

$$\times \int_\gamma \Bigg(\frac{1}{Z(\zeta)} - \frac{1}{Z(\tau)} \Bigg) \frac{d\zeta}{\zeta - \tau} \Bigg) g(\tau) d\tau,$$

$$(T_2 g)(t) := \int_\gamma \Bigg(\frac{b(\tau)Z(\tau)}{\pi i(a^2(\tau)-b^2(\tau))} \int_\gamma \frac{k(\zeta,t)-k(\tau,t)}{Z(\zeta)(\zeta-\tau)} d\zeta \Bigg) g(\tau) d\tau.$$

Очевидно, T_1 вполне непрерывен в C. Покажем, что T_2 вполне непрерывен в C. Пусть $t_1, t_2 \in \gamma$, $|t_1 - t_2| \le \delta < \varepsilon$. Имеем

$$(T_2 g)(t_1) - (T_2 g)(t_2) = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{b(\tau)Z(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)} \times$$

$$\times \Bigg(\int_{\gamma_\varepsilon(\tau)} \frac{k(\zeta,t_1)-k(\tau,t_1)}{Z(\zeta)(\zeta-\tau)} d\zeta \Bigg) g(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{b(\tau)Z(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)} \times$$

$$\times \Bigg(\int_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon(\tau)} \frac{k(\zeta,t_1)-k(\zeta,t_2)+k(\tau,t_2)-k(\tau,t_1)}{Z(\zeta)(\zeta-\tau)} d\zeta \Bigg) g(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{b(\tau)Z(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)} \Bigg(\int_{\gamma_\varepsilon(\tau)} \frac{k(\zeta,t_2)-k(\tau,t_2)}{Z(\zeta)(\zeta-\tau)} d\zeta \Bigg) g(\tau) d\tau =: I_1 + I_2 - I_3,$$

$$|I_2| \le c_1 \| g \|_C \frac{1}{\varepsilon} \Bigg(\int_\gamma \Bigg(\int_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon(\tau)} | k(\zeta, t_1) - k(\zeta, t_2) | \, | d\zeta | \Bigg) | d\tau | +$$

$$+ \int_{\gamma} |k(\zeta, t_2) - k(\zeta, t_1)| \, |d\tau| \Big) \le c_2 \|g\|_C \frac{1}{\varepsilon} \omega^{0,1}(k, \delta),$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от g, ε, δ. Интегралы I_1, I_3 оцениваются согласно лемме 2 [12].

Учитывая указанные соотношения, определение класса $\mathcal{K}$ и лемму 2 [12], заключаем, что оператор T_2 переводит каждое ограниченное в C множество в множество равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций. Таким образом, оператор T_2 вполне непрерывен в C, а значит, вполне непрерывен в C и оператор $(K_{-1}^0 k)'$. Теорема доказана.

Основным утверждением данной работы является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* γ — *з. ж. с. к.*;

$$\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon), \ \varepsilon \to 0; \ a, b \in I_\gamma; \ a^2(t) - b^2(t) \ne 0 \ \ \forall\, t \in \gamma;$$

$$f \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}; \ I_\gamma \subset \mathcal{H}_1; \ I_\gamma + \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1;$$

выполнено условие (3); $k(t, \tau) \in \mathcal{K}$. *Тогда*:

1) $m := \dim\{\varphi \in \mathcal{H}\colon (K\varphi)(t) = 0\} < \infty$;

2) *уравнение* (1) *разрешимо в классе* $\mathcal{H}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\gamma} f(t)\psi(t)\,dt = 0 \quad \forall\, \psi \in \tilde{L}_\infty\colon \ (K'\psi)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0.$$

$$m' := \dim\{\psi \in \tilde{L}_\infty\colon \ (K'\psi)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0\} < \infty;$$

3) $m - m' = \kappa$.

Доказательство. Согласно теореме 2 уравнение (1) эквивалентно уравнению (8) и дополнительным (при $\kappa < 0$) условиям (9). Условия разрешимости уравнения (8) имеют вид

$$\int_{\gamma} \omega_j(t) f_0(t)\,dt = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

где $\omega_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — полная система линейно независимых решений уравнения

$$g(t) + \Big((K_{-1}^0 k)' g \Big)(t) = 0 \quad \forall\, t \in \gamma \tag{11}$$

в C (если уравнение (11) в C имеет только тривиальное решение, то условия (10) отсутствуют).

Пусть сначала $\kappa \ge 0$. В этом случае условия (10) представляются в виде [2, с. 335]

$$\sum_{j=1}^{\kappa} \gamma_{ij} A_j = \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где γ_{ij} — вполне определенные постоянные, не зависящие от f, A_j — коэффициенты многочлена $P_{\kappa-1}$, взятые в произвольном порядке,

$$\delta_i := \int_{\gamma} \omega_i'(t) f(t)\,dt, \ \ \omega_i'(t) := (K_{-1}^{0\prime} \omega_i)(t).$$

Из ограниченности сингулярного оператора Коши в L_p, $1 < p < \infty$ [13], следует, что $\omega_i' \in L_p \ \ \forall p \in (1, \infty)$, а значит, $\omega_i' \in \tilde{L}_\infty$.

Покажем, что функции ω_i', $i = 1, 2, \dots, n$, линейно независимы. Для этой цели выразим ω_i через ω_i'. Приводя уравнение $(K_{-1}^{0\prime}\omega)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \omega_i'(t)$ к граничной задаче сопряжения в постановке Привалова [14, с. 112] и используя факторизацию функции $(a(t) - b(t)) / (a(t) + b(t))$, теорему 1 из [14, с. 139], ограниченность сингулярного оператора Коши в пространствах L_p, $1 < p < \infty$ [13], получаем следующие утверждения: 1) индекс оператора $K_{-1}^{0\prime}\colon L_p \to L_p$ равен $\kappa \geq 0$ при всех $p \in (1, \infty)$; 2) уравнение $(K_{-1}^{0\prime}\omega)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \omega_i'(t)$ разрешимо в $\tilde{L}_\infty$ и общее его решение представляется в виде

$$\omega(t) = (K^{0\prime}\omega_i')(t) + Q_{\kappa-1}(t), \tag{12}$$

где $Q_{\kappa-1}$ — произвольный полином степени не выше $\kappa - 1$ при $\kappa > 0$ и $Q_{\kappa-1} \equiv 0$ при $\kappa = 0$, $Q_{\kappa-1}$ — общее решение уравнения $(K_{-1}^{0\prime}\omega)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$ в классе $\tilde{L}_\infty$.

Предположим, что функции ω_i', $i = 1, 2, \dots, n$, линейно зависимы, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i'(t) = 0$$

при почти всех $t \in \gamma$ и среди чисел a_i, $i = 1, 2, \dots, n$, есть отличные от нуля. Тогда с учетом (12) при $\kappa = 0$ при почти всех $t \in \gamma$ получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i(t) = 0,$$

которое противоречит линейной независимости функций ω_i, $i = 1, 2, \dots, n$, и тем самым при $\kappa = 0$ линейная независимость функций ω_i', $i = 1, 2, \dots, n$, доказана, а при $\kappa > 0$ при почти всех $t \in \gamma$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i(t) = Q_{\kappa-1}^0(t),$$

где $Q_{\kappa-1}^0$ — некоторый многочлен степени не выше $\kappa - 1$. Тогда $Q_{\kappa-1}^0$ является решением уравнения (11). С учетом теоремы 3 [12] легко получаем равенство $((K_{-1}^0 k)' Q_{\kappa-1}^0)(t) = (k' K_{-1}^{0\prime} Q_{\kappa-1}^0)(t)$. Поэтому

$$0 = Q_{\kappa-1}^0(t) + (k' K_{-1}^{0\prime} Q_{\kappa-1}^0)(t) \overset{\text{п.в.}}{=}$$

$$\overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i(t) + \left(k'\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i'(\tau) \right) \right)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i(t),$$

откуда следует линейная зависимость функций ω_i, $i = 1, 2, \dots, n$, что противоречит их определению. Таким образом, доказана линейная независимость функций ω_i', $i = 1, 2, \dots, n$.

Через r обозначим ранг матрицы $\| \gamma_{ij} \|$. Стандартными рассуждениями [2, с. 335] убеждаемся, что: 1) условия разрешимости уравнения (8), а значит, и уравнения (1) имеют вид (при $r = n$ эти условия отсутствуют)

$$\int_\gamma \lambda_j(t) f(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - r,$$

где λ_j — вполне определенные линейно независимые функции, принадлежащие $\tilde{L}_\infty$; 2) уравнение $(K\varphi)(t) = 0$ имеет $\kappa + n - r$ линейно независимых решений класса $\mathcal{H}$.

Рассмотрим теперь случай $\kappa < 0$. При $\kappa < 0$ условия (10) сводятся к условиям

$$\int_\gamma \lambda_j(t) f(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

где $\lambda_j(t) = \omega'_j(t)$. При рассмотрении случая $\kappa \geq 0$ доказано, что $\omega'_j \in \tilde{L}_\infty$ $\forall j \in \overline{1, n}$.

Покажем, что функции ω'_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, линейно независимы. Рассуждениями, аналогичными изложенным в случае $\kappa \geq 0$ относительно уравнения $(K_{-1}^{0\prime}\omega)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \omega'_i(t)$, показывается, что индекс оператора $K^{0\prime}\colon L_p \to L_p$ равен $-\kappa > 0$ при всех $p \in (1, \infty)$, уравнение $(K^{0\prime}\omega')(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \omega_j(t)$ разрешимо в $\tilde{L}_\infty$ и одним из его решений есть функция $\omega'_i(t) = (K_{-1}^{0\prime}\omega_j)(t)$. Поэтому, если бы функции ω'_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, были линейно зависимы, то были бы линейно зависимы и функции $\omega_j(t) = (K^{0\prime}\omega'_j)(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, что противоречит их определению.

При выполнении условий (13) общее решение уравнения (8), принадлежащее при выполнении соотношений (9) в силу теоремы 2 классу $\mathcal{H}$, выражается формулой

$$\varphi(t) = (K_{-1}^{0} f)(t) + (\Gamma K_{-1}^{0} f)(t) + \sum_{i=1}^{n} c_j \chi_j(t), \tag{14}$$

где χ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — полная система линейно независимых решений уравнения

$$\varphi(t) + (K_{-1}^{0} k\varphi)(t) = 0;$$

c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — произвольные постоянные;

$$(\Gamma g)(t) := \int_\gamma \Gamma(t, \tau) g(\tau)\, d\tau$$

— вполне непрерывный в C оператор, $\Gamma(t, \tau)$ — обобщенная резольвента Фредгольма интегрального ядра оператора (7).

Решение (14) уравнения (8) подставим в соотношения (9), получим систему уравнений относительно неизвестных c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma'_{ij} c_j = \delta'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, -\kappa, \tag{15}$$

где γ'_{ij} — вполне определенные постоянные, не зависящие от f,

$$\delta'_i := \int_\gamma f(t) \left(\frac{t^{i-1}}{Z(t)} - \left(K_{-1}^{0\prime} k' \left(\frac{\tau^{i-1}}{Z(\tau)} \right) \right)(t) - \left(K_{-1}^{0\prime} \Gamma' k' \left(\frac{\tau^{i-1}}{Z(\tau)} \right) \right)(t) \right) dt.$$

Через r' обозначим ранг матрицы $\| \gamma'_{ij} \|$. Условия разрешимости системы (15) сводятся [2, с. 338] к условиям вида (при $r' = -\kappa$ эти условия отсутствуют)

$$\int_{\gamma} \lambda_j(t) f(t)\, dt = 0, \quad j = n+1, n+2, \ldots, n-\kappa-r', \tag{16}$$

где

$$\lambda_{n+j}(t) = \frac{t^{k_{r'+j}}}{Z(t)} + \sum_{i=1}^{r'} a_{ji} \frac{t^{k_i}}{Z(t)} - \left(K_{-1}^{0\prime} k' \left(\frac{\tau^{k_{r'+j}}}{Z(\tau)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{r'} a_{ji} \frac{\tau^{k_i}}{Z(\tau)} \right) \right)(t) - \left(K_{-1}^{0\prime} \Gamma' k' \left(\frac{\tau^{k_{r'+j}}}{Z(\tau)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{r'} a_{ji} \frac{\tau^{k_i}}{Z(\tau)} \right) \right)(t), \quad j = 1, 2, \ldots, -\kappa - r';$$

a_{ji} — вполне определенные постоянные, не зависящие от f; k_i, $i = 1, 2, \ldots, -\kappa$, обозначают числа $0, 1, \ldots, -\kappa - 1$, взятые в некотором порядке. В силу [15, с. 195] следует, что Γ' — вполне непрерывный в C оператор, кроме того, $K_{-1}^{0\prime}$ — ограниченный оператор в L_p $\forall\, p \in (1, \infty)$ [13]. Поэтому $\lambda_j \in \tilde{L}_\infty$ $\forall\, j \in \overline{n+1, n-\kappa-r'}$.

Покажем, что система функций λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n-\kappa-r'$, из условий (13), (16) линейно независима. Предположим противное: пусть система указанных функций линейно зависима. Тогда при почти всех $t \in \gamma$ имеем равенство

$$0 = \sum_{j=1}^{n-\kappa-r'} a_j \lambda_j(t) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_j (K_{-1}^{0\prime} \omega_j)(t) + \frac{Q_{-\kappa-1}(t)}{Z(t)} -$$

$$- \left(K_{-1}^{0\prime} k' \left(\frac{Q_{-\kappa-1}(\tau)}{Z(\tau)} \right) \right)(t) - \left(K_{-1}^{0\prime} \Gamma' k' \left(\frac{Q_{-\kappa-1}(\tau)}{Z(\tau)} \right) \right)(t), \tag{17}$$

где среди чисел a_j, $j = 1, 2, \ldots, n-\kappa-r'$, есть отличные от нуля, $Q_{-\kappa-1}$ — некоторый многочлен степени не выше $-\kappa - 1$. Ввиду изложенного система функций $\lambda_j(t) \equiv \omega_j'(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, линейно независима, поэтому среди коэффициентов многочлена $Q_{-\kappa-1}$ должны быть отличные от нуля. Как отмечалось, индекс оператора $K^{0\prime}\colon L_p \to L_p$ равен $-\kappa > 0$ при всех $p \in (1, \infty)$. Поэтому уравнение

$$(K^{0\prime}\psi)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{j=1}^{n} a_j\, \omega_j(t) - \left(\Gamma' k' \left(\frac{Q_{-\kappa-1}(\tau)}{Z(\tau)} \right) \right)(t) - \left(k' \left(\frac{Q_{-\kappa-1}(\tau)}{Z(\tau)} \right) \right)(t)$$

разрешимо в $\tilde{L}_\infty$ и одним из его решений есть функция

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j (K_{-1}^{0\prime} \omega_j)(t) - \left(K_{-1}^{0\prime} \Gamma' k' \left(\frac{Q_{-\kappa-1}(\tau)}{Z(\tau)} \right) \right)(t) -$$

$$- \left(K_{-1}^{0\prime} k' \left(\frac{Q_{-\kappa-1}(\tau)}{Z(\tau)} \right) \right)(t).$$

Кроме того,

$$\left(K^{0\prime} \left(\frac{Q_{-\kappa-1}(\tau)}{Z(\tau)} \right) \right)(t) = 0 \quad \forall\, t \in \gamma.$$

Поэтому, действуя на равенство (17) оператором $K^{0\prime}$, получаем

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\omega_j(t) - \left(\Gamma' K'\left(\frac{Q_{-\kappa-1}(\tau)}{Z(\tau)}\right)\right)(t) - \left(K'\left(\frac{Q_{-\kappa-1}(\tau)}{Z(\tau)}\right)\right)(t) \qquad (18)$$

при почти всех $t \in \gamma$. Подставляя (18) в (17) получаем равенство $0 = Q_{-\kappa-1}(t)/Z(t)$ при почти всех $t \in \gamma$. В силу того, что среди коэффициентов $Q_{-\kappa-1}$ есть отличные от нуля, последнее равенство не выполняется. Полученное противоречие доказывает линейную независимость функций λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n-\kappa-r'$, из условий (13), (16).

Соотношения (13), (16) являются необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения (1) при $\kappa < 0$. При их выполнении система (15) разрешима, и в общем ее решении $n - r'$ чисел из c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, произвольны, общее решение уравнения (1) представляется формулой (14), в которой c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют системе (15). Отсюда заключаем, что число линейно независимых решений уравнения $(K\varphi)(t) = 0$ есть $n - r'$.

Теперь доказательство теоремы заканчивается стандартными рассуждениями [2, с. 339].

Замечание. В теоремах 1, 2, 4 не предполагается линейность $\mathcal{H}_1$.

3. Пусть γ — з. ж. с. к.; $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, $\mathcal{H}_1$ — векторное подпространство $\mathcal{H}$, $I_\gamma + \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1$. Рассмотрим ассоциированный с уравнением (1) оператор $K\colon D(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{H}_1$ с областью определения $D(\mathcal{H}_1) = \{\varphi \in \mathcal{H}\colon K\varphi \in \mathcal{H}_1\}$. Введя норму $\|\varphi\|_{\mathcal{H}_1} := \|\varphi\|_C$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{H}_1$, превратим $\mathcal{H}_1$ в неполное нормированное пространство.

В качестве $\mathcal{H}_1$ будут рассматриваться, в частности, пространства $\Phi_{M_n, M_{n-1}, \ldots, M_1}$ функций $f \in \Phi_n$ вида (5) с фиксированными функциями M_n, $M_{n-1}, \ldots, M_1$ и $\Phi_{M_n, c_{n-1}^+, \ldots, c_1^+}$ функций $f \in \Phi_n$ вида (5) с фиксированными функциями $M_n, c_{n-1}^+, \ldots, c_1^+$. Легко проверяется, что при

$$a, b \in I_\gamma \quad D\left(\Phi_{b, M_{n-1}, \ldots, M_1}\right) = \Phi_{\frac{b}{a-b}, \frac{M_{n-1}}{a-b}, \ldots, \frac{M_1}{a-b}},$$

$$D(\Phi) = \Phi, \quad D\left(\Phi_{b, c_{n-1}^+, \ldots, c_1^+}\right) = \Phi_{\frac{b}{a-b}, c_{n-1}^+, \ldots, c_1^+},$$

а при $a, b \in I'_\gamma$ $D(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

В теории линейных операторов *нетеровым* называется оператор A, образ которого замкнут, а ядро и коядро конечномерны. При этом разность размерностей ядра и коядра называется *индексом* оператора A (обозначим $\operatorname{Ind} A$).

Учитывая очевидные включения

$$\mathcal{H}_1 \subset \tilde{L}_\infty \subset L_2 = L_2^* \subset \mathcal{H}_1^* \subset \mathcal{H}_1^\#$$

(здесь L_2^*, $\mathcal{H}_1^*$ — пространства, топологически сопряженные соответственно к L_2, $\mathcal{H}_1$, а $\mathcal{H}_1^\#$ — алгебраически сопряженное к $\mathcal{H}_1$ пространство) и используя теорему 4, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* γ — *з. ж. с. к.;* $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$; $a, b \in I_\gamma$; $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ $\forall\, t \in \gamma$; $k(t, \tau) \in \mathcal{K}$ *и выполнено одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{H}_1 = \Phi_{b, M_{n-1}, \ldots, M_1}$;

б) $\mathcal{H}_1 = \Phi_{b, c_{n-1}^+, \ldots, c_1^+}$;

в) $\mathcal{H}_1 = \Phi$;

г) $a, b \in I'_\gamma$ *и* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$.

Тогда:

1) *оператор* K: $D(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{H}_1$ *нетеров*;

2) $\operatorname{Ind} K = \operatorname{Ind} K^0 = \kappa$;

3) $\operatorname{Ker} K^\# \subset \tilde{L}_\infty$, *где* $\operatorname{Ker} K^\#$ — *ядро алгебраически сопряженного к* K *оператора* $K^\#$.

Введением нормы

$$\|f\|_{I_\gamma} := \|f\|_C + \int_0^d \frac{\omega(f, \gamma, y)}{y} dy$$

класс I_γ наделяется структурой банахова пространства. Используя непрерывность оператора K_{-1}^0: $I_\gamma \to C$ и теорему 8 из [5], получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* γ — *з. ж. с. к.*; $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$; $a, b \in I_\gamma$; $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ $\forall\, t \in \gamma$; *функция* $k(t, \tau)$ *удовлетворяет условию* (6). *Тогда оператор* K: $D(I_\gamma) \to I_\gamma$ *нетеров и* $\operatorname{Ind} K = \operatorname{Ind} K^0 = \kappa$.

Замечание. При условиях теоремы 6 оператор k: $C \to I_\gamma$, вообще говоря, некомпактен. Кроме того, теоремы 5, 6 не предполагают топологизацию области определения оператора K.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
4. *Плакса С. А.* О возмущении полунетеровых операторов в неполных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 270–278.
5. *Плакса С. А.* О возмущении полунетеровых операторов в неполных пространствах. II // Там же. – 1993. – № 3. – С. 398–402.
6. *Литвинчук Г. С., Спитковский И. М.* Факторизация матриц-функций. I. – Одесса, 1984. – 249 с. – Деп. в ВИНИТИ 03. 04. 84, № 2410.
7. *Белармино Г. Д.* Краевая задача Римана и сингулярные интегральные уравнения // Науч. тр. МВ и ССО АзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – № 6. – С. 76–85.
8. *Герус О. Ф.* Об одном особом интегральном уравнении и краевой задаче Римана // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 3. – С. 382–385.
9. *Бабаев А. А., Салаев В. В.* Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре // Мат. заметки. – 1982. – **31**, № 4. – С. 571–580.
10. *Герус О. Ф.* Гладкостные свойства интегралов типа Коши и некоторые их приложения // Теория приближения функций: Труды Международной конференции по теории приближения функций (Киев, 31 мая – 5 июня 1983 г.). – М.: Наука, 1987. – С. 114–116.
11. *Токов А. О.* Особый интеграл, интеграл типа Коши с непрерывной плотностью и краевая задача Римана: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Баку, 1984. – 16 с.
12. *Плакса С. А.* О композиции сингулярного и регулярного интегралов на спрямляемой кривой // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 104–112.
13. *David G.* Opérateurs integraux sur certaines courbes du plan complexe // Ann. Sci. de l'École Normale Supérieure, 4 ser. – 1984. – **14**, № 1. – P. 157–189.
14. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техники. Сер. совр. пробл. математики. – 1975. – **7**. – С. 5–162.
15. *Рис Ф.* О линейных функциональных уравнениях // Успехи мат. наук. – 1936. – **1**. – С. 175–199.

Получено 16.01.92