УДК 517.5

А. С. Романюк, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

НАИЛУЧШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$. II

The order estimates are obtained for the best trigonometric and bilinear approximations of the classes $B^r_{p,\theta}$ of functions of many variables with respect to the metric L_q, when p and q satisfy certain relations.

Одержані порядкові оцінки найкращих тригонометричних і білінійних наближень класів функцій багатьох змінних $B^r_{p,\theta}$ в метриці L_q для деяких співвідношень між p і q.

В работах автора (см. [1, 2], там же изложена история вопроса) изучались наилучшие тригонометрические приближения, а также приближения билинейными формами классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. Настоящая работа является продолжением исследований в этих направлениях. При этом используются те же обозначения и определения, что и в работах [1, 2]. Напомним определение только тех аппроксимативных характеристик, которые будут непосредственно изучаться.

Основная часть работы посвящена исследованию величины

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) = \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \inf_{k^j,\, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} C_j e^{i(K^j,\,\cdot)} \right\|_q, \tag{1}$$

где точная нижняя грань берется сначала по коэффициентам $\{c_j\}_{j=1}^M$, а затем по всевозможным наборам векторов k^j из целочисленной решетки Z^m. Величины (1), как и в предыдущих работах, называем наилучшими тригонометрическими приближениями класса $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q.

В последующем полученные результаты по оценкам наилучших тригонометрических приближений используются для установления порядков приближения билинейными формами функций вида

$$f(x, y) = f(x-y),\ x, y \in \pi_m \overset{\text{df}}{=} \prod_{j=1}^{m} [-\pi; \pi],\ f\in B^r_{p,\theta}.$$

Пусть $L_q(\pi_{2m})$ обозначает множество функций $f(x, y)$, $x, y\in\pi_m$ с конечной "смешанной" нормой

$$\| f(x, y)\|_q = \| \, \| f(\cdot, y)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

где $q = (q_1, q_2)$. Тогда для $f\in L_q(\pi_{2m})$ наилучшее билинейное приближение порядка M определяется следующим образом:

$$\tau_M(f)_q = \inf_{u_i(x),\, v_i(y)} \left\| f(x, y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_q,$$

где предполагается, что $u_i\in L_{q_1}(\pi_m)$, $v_i\in L_{q_2}(\pi_m)$ и соответственно

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q_1, q_2} = \sup_{f\in B^r_{p,\theta}} \tau_M(f)_{q_1, q_2}. \tag{2}$$

Как и в [1, 2], для всех рассматриваемых функций предполагаем выполненным условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx_j = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

1. Наилучшие тригонометрические приближения. Для величины (1) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le q \le 2$, $r_1 > 1/p - 1/q$. *Тогда при* $1 \le \theta \le \infty$

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{(r_1 - 1/p + 2/q - 1/\theta)_+}}{M^{r_1 - 1/p + 1/q}},$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доказательство. Сначала получим оценку сверху. С этой целью для каждой функции $f \in B^r_{p,\theta}$ построим тригонометрический полином $t_M(x)$ с количеством гармоник, не превышающим по порядку M, с помощью которого и получим искомую оценку приближения.

Итак, пусть задано число M. Подберем $n \in N$ из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и положим

$$n_0 = n + (\nu - 1) \log n. \tag{3}$$

Полином $t_M(x)$ будем искать в виде

$$t_M(x) = P(x) + Q(x),$$

где

$$P(x) = \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f, x),$$

а слагаемое $Q(x)$ подберем следующим образом. Каждому натуральному числу l: $n \le l < n_0$ поставим в соответствие величину

$$S_l = \left(\sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} \| \delta_s(f, x) \|_p^{\theta} 2^{(s,r)\theta} \right)^{1/\theta}. \tag{4}$$

Упорядочив числа $\| \delta_s(f, x) \|_p$ в порядке убывания, обозначим их $\alpha_i(f, l)$. Тогда из (4) следует

$$\alpha_i(f, l) << i^{-1/\theta} 2^{-l r_1} S_l. \tag{5}$$

Пусть, далее, $m_l = [2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^{\theta}] + 1$, где $[a]$ — целая часть числа a. Рассмотрим функцию

$$R(x) = \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} \delta_s(f, x) \tag{6}$$

и для каждого l возьмем из внутренней суммы (6) первые m_l блоков $\delta_s(f, x)$, которым соответствуют числа $\alpha_i(f, l)$, $i = \overline{1, m_l}$. Полученный в результате проделанной процедуры полином обозначим через $Q(x)$.

Убедимся, что количество гармоник K полинома $t_M(x)$ не превышает по порядку M.

В силу леммы Г из [3, с. 11], а также определения чисел m_l будем иметь

$$K << 2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{n_0} 2^l m_l <<$$

$$<<2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} \| \delta_s(f,x) \|_p^\theta 2^{(s,r)\theta} <<$$

$$<< 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \|f\|^\theta_{B^r_{p,\theta}} =$$

$$= 2^n n^{\nu-1}\left(1 + \| f \|^\theta_{B^r_{p,\theta}}\right) << 2^n n^{\nu-1} \asymp M.$$

Оценим $\| f(x) - t_M(x) \|_q$. Имеем

$$\| f(x) - t_M(x) \|_q = \| f(x) - P(x) - Q(x) \|_q =$$

$$= \| f(x) - \sum_{(s,\gamma) < n_0} \delta_s(f,x) + R(x) - Q(x) \|_q \le$$

$$\le \| f(x) - \sum_{(s,\gamma) < n_0} \delta_s(f,x) \|_q + \| R(x) - Q(x) \|_q = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 . \tag{7}$$

В силу теоремы 2 [4] для первой суммы получаем

$$\sum\nolimits_1 << 2^{-n_0(r_1 - 1/p + 1/q)} n_0^{(\nu-1)(1/q - 1/\theta)_+}$$

и, подставляя вместо n_0 его значение из (3), находим

$$\sum\nolimits_1 << 2^{-n(r_1 - 1/p+1/q)} n^{-(\nu-1)(r_1 - 1/p+1/q)} \asymp M^{-(r_1-1/p+1/q)} \tag{8}$$

при $\theta \in [1, q]$ и

$$\sum\nolimits_1 << \frac{(\log^{\nu-1} M)^{1/q-1/\theta}}{M^{r_1-1/p+1/q}} \tag{9}$$

при $\theta > q$.

Для оценки второй суммы в (7) воспользуемся одним вспомогательным утверждением [3, с. 25].

Лемма А. *Пусть* $1 < p < q < \infty$ *и* $f \in L_q(\pi_m)$. *Тогда*

$$\|f\|_q << \left\{ \sum_s \left(\left\| \delta_s(f,x) \right\|_p 2^{\|s\|_1 (1/p - 1/q)} \right)^q \right\}^{1/q},$$

где $\| s \|_1 = s_1 + \ldots + s_m$.

Итак, в силу леммы А и оценки (6) получим

$$\sum\nolimits_2 << \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i > m_l} \alpha_i^q(f,l) 2^{l(1/p-1/q)q} \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i > m_l} \alpha_i^\theta(f,l) \alpha_i^{q-\theta}(f,l) 2^{l(1/p-1/q)q} \right\}^{1/q} <<$$

$$<< \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{-l\theta r_1} 2^{l(1/p-1/q)q} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{l \le (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^\theta \right)^{1/q} << \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(r_1 - 1/p + 1/q)q} \times \right.$$

$$\times S_l^{q-\theta} S_l^{\theta}\Big)^{1/q} = \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(r_1-1/p+1/q)q} S_l^q \right)^{1/q}.$$

.Далее, подставив вместо m_l его значение, продолжим оценку

$$\sum\nolimits_2 \ll (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^{\theta} 2^{-l(r_1-1/p+1/q)q} 2^{lq(1/\theta-1/q)} \right)^{1/q} =$$

$$= (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{n_0} 2^{-lq(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} S_l^{\theta} \right)^{1/q} =$$

$$= (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \sum\nolimits_3 . \tag{10}$$

Чтобы оценить $\sum_3$, рассмотрим два случая:

а) $r_1 > 1/p - 2/q + 1/\theta$;

б) $1/p - 1/q < r_1 \le 1/p + 1/\theta - 2/q$;

предварительно отметив, что в случае а) при $\theta \ge q$ подразумевается $r_1 > > 1/p - 1/q$, а случай б) может иметь место только при $\theta \in [1, q]$.

Пусть сначала $r_1 > 1/p - 2/q + 1/\theta$. Тогда

$$\sum\nolimits_3 \ll 2^{-n(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} \left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^{\theta} \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll 2^{-n(r_1-1/p-1/\theta+2/q)} \| f \|_{B^r_{p,\theta}}^{\theta/q} \ll 2^{-n(r_1-1/p-1/\theta+2/q)}.$$

Отсюда и из (10) вытекает

$$\sum\nolimits_2 \ll (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} 2^{-n(r_1-1/p-1/\theta+2/q)} \asymp$$

$$\asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{(r_1-1/p+2/q-1/\theta)}}{M^{r_1-1/p+1/q}}. \tag{11}$$

Далее, сопоставляя поочередно (11) с (8) и (9), находим, что $\sum_1 \ll \sum_2$ и тогда из (11) и (7) следует искомая оценка.

Пусть теперь $1/p - 1/q < r_1 < 1/p + 1/\theta - 2/q$. Тогда

$$\sum\nolimits_2 \ll 2^{-n_0(r_1-1/p-1/\theta+2/q)} \left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^{\theta} \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll 2^{-n_0(r_1-1/p-1/\theta+2/q)} \| f \|_{B^r_{p,\theta}}^{\theta/q} \ll 2^{-n(r_1-1/p-1/\theta+2/q)} n^{-(\nu-1)(r_1-1/p-1/\theta+2/q)}.$$

Подставляя эту оценку в (10) и затем сравнивая (10) и (9), из (7) получаем

$$\| f(x) - t_M(x) \|_q \ll M^{-(r_1-1/p+1/q)}.$$

Таким образом, оценка сверху установлена.

Для оценки снизу потребуется утверждение В. Н. Темлякова [3, с. 86], которое использовалось им при оценке снизу величины $e_M(W^r_p, L_q)$.

Пусть

$$A_s(f) = \left(\sum_{k \in \rho(s)} \left| \hat{f}(k) \right|^2 \right)^{1/2}, \quad s = (s_1, \dots, s_m), \ s_j \in N, \ j = \overline{1, m},$$

где $\hat{f}(k)$ — коэффициенты Фурье $f(x)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема Т. *Пусть задана таблица чисел* $\varepsilon_s \geq 0$ *и* F_ε *обозначает множество функций* $f(x)$, *для которых при всех* s: $A_s(f) \geq \varepsilon_s$. *Тогда выполняется соотношение*

$$\inf_{f \in F_\varepsilon} \| f \|_q \asymp \left(\sum_s \left(\varepsilon_s 2^{\| s \|_1 / 2} \right)^q 2^{-\| s \|_1} \right)^{1/q}, \quad 1 < q \leq 2.$$

Как известно (см., например, [1]), оценку снизу достаточно установить при $\nu = m$.

Пусть задано натуральное число M. Подберем число $n \in N$ так, чтобы $M \asymp \asymp 2^n n^{m-1}$ и количество элементов множества

$$Q_n = \bigcup_{\| s \|_1 = n} \rho(s)$$

было больше $4M$, т. е. $\| Q_n \| > 4M$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2^{-n(r_1 + 1 - 1/p)} n^{-(m-1)/\theta} \sum_{k \in Q_n} e^{i(k, x)} =$$

$$= 2^{-n(r_1 + 1 - 1/p)} n^{-(m-1)/\theta} d_n(x)$$

и оценим $\| f \|_{B^r_{p,\theta}}$.

Принимая во внимание, что для s: $\| s \|_1 = n$

$$\| \delta_s(d_n, x) \|_p = \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)} \right\|_p \asymp 2^{\| s \|_1 (1 - 1/p)} = 2^{n(1 - 1/p)},$$

имеем

$$\| f \|_{B^r_{p,\theta}} \asymp 2^{-n(r_1 + 1 - 1/p)} n^{-(m-1)/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{\| s \|_1 = n} 2^{(s, r)\theta} \| \delta_s(d_n, x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(r_1 + 1 - 1/p)} n^{-(m-1)/\theta} 2^{n(r_1 + 1 - 1/p)} \left(\sum_{\| s \|_1 = n} 1 \right)^{1/\theta} \leq C_1. \tag{12}$$

(Здесь и далее C_i, $i = 1, 2, \dots$, — абсолютные постоянные, зависящие, возможно, от параметров, определяющих классы $B^r_{p,\theta}$, и метрики, в которых измеряется погрешность приближения.)

Таким образом, из (12) следует, что $f \in C_1^{-1} B^r_{p,\theta}$.

Пусть Ω_M — некоторый набор из M m-мерных векторов $k^1, \dots, k^M$, $k^i = (k^i_1, \dots, k^i_m)$, $i = \overline{1, M}$, с целочисленными координатами и S — множество векторов $s = (s_1, \dots, s_m)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, m}$, таких, что $\| s \|_1 = n$ и для количества элементов подмножеств $\Omega_M \cap \rho(s)$ выполняются соотношения

$$|\Omega_M \cap \rho(s)| \le (1/2)|\rho(s)|.$$

Пусть, далее, $g(x)$ — некоторый полином, гармоники которого имеют "номера" из множества Ω_M. Тогда в силу теоремы Т, принимая во внимание, что $|S| \asymp n^{m-1}$, имеем

$$\|f-g\|_q >> \left(\sum_{\|s\|_1 = n} \left\|\delta_s(f-g,x)\right\|_2^q\right)^{1/q} \times 2^{n(1/2-1/q)} >>$$

$$>> \left(\sum_{s\in S} \left\|\delta_s(f-g,x)\right\|_2^q\right)^{1/q} 2^{n(1/2-1/q)} >> |S|^{1/q} 2^{-n(r_1+1-1/p)} n^{-(m-1)/\theta} 2^{n/2} 2^{n(1/2-1/q)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(r_1+1/p-1/q)} n^{(m-1)(1/q-1/\theta)} \asymp \frac{(\log^{m-1} M)^{(r_1-1/p-1/\theta+2/q)}}{M^{r_1-1/p+1/q}}.$$

Полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху в случае $r_1 \ge \ge 1/p - 2/q + 1/\theta$. Если же $1/p - 1/q < r_1 < 1/p - 2/q + 1/\theta$, то необходимая оценка следует из одномерного случая, поскольку найденная выше оценка сверху не зависит от размерности. Теорема доказана.

Отметим, что в рассмотренной области изменения параметров p и q порядки величин $e_M(W^r_p, L_q)$ и $e_M(H^r_p, L_q)$ известны. Порядок убывания наилучших тригонометрических приближений классов H^r_p, а также классов W^r_p большой гладкости установил В. Н. Темляков [3]. В случае малой гладкости оценка сверху величины $e_M(W^r_p, L_q)$ позже получена Э. С. Белинским [5]. При этом проводимые им рассуждения позволяют получить оценку сверху и для классов функций большой гладкости.

Теперь перейдем к изучению случая, который, по-видимому, не был изучен ни на классах $B^r_{p,\theta}$, ни на W^r_p и H^r_p. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$, $r_1 > 0$. *Тогда при* $1 \le \theta \le \infty$ *справедлива оценка*

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{(r_1+1/2-1/\theta)_+}}{M^{r_1}}.$$

Доказательство. Оценка сверху следует из теоремы 1 [6], поскольку

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \le e^{\perp}_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$$

(определение $e^{\perp}_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ см. в [6], там же изложена история вопроса исследования этой величины).

При установлении оценки снизу нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения и определения. Пусть

$$RT(n),\quad n = (n_1, \dots, n_m),\quad n_j \in N,\quad j = \overline{1, m},$$

обозначает множество тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j,\ j = \overline{1, m}} c_k e^{i(k,x)},$$

где c_k — действительные числа.

Каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_m)$, s_j — четные числа, $j = \overline{1, m}$, поставим в соответствие множество

$$\rho^+(s) = \{k\colon\ k = (k_1, \dots, k_m),\ 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j},\ k_j \in N\}$$

и заметим, что каждый полином

$$t(x) = \sum_{k \in \rho^+(s)} c_k e^{i(k,x)}, \quad s_j \ge 2, \quad j = \overline{1, m}, \quad c_k \in R,$$

может быть представлен в виде

$$t(x) = e^{i(k^s, x)} t_s(x),$$

где $k_j^{s_j} = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$ и $t_s(x)$ — полином степени 2^{s_j-2} по переменной x_j.

Определим для четного n множества

$$S_n = \{s\colon\ (s, 1) = n, \quad s_j \text{— четные числа}, \quad j = \overline{1, m}\},$$

$$Q_n' = \bigcup_{s \in S_n} \rho^+(s), \quad T(Q_n') =$$

$$= \left\{ t(x) = \sum_{s \in S_n} e^{i(k^s, x)} t_s(x),\ t_s(x) \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение [7, с. 142].

Лемма Б. *Пусть* $M \le (1/4)|Q_n'|$. *Тогда для любого подпространства* $\Psi \in L_1(\pi_m)$ *размерности не более* M *найдется такая* $g(x) \in T(Q_n')$, *что для*

$$\overline{\delta}_s(g, x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k \in \rho^+(s)} \hat{g}(k) e^{i(k,x)},$$

где $\hat{g}(k)$ *— коэффициенты Фурье* $g(x)$, *выполняется соотношение*

$$\| \overline{\delta}_s(g, x) \|_\infty \le |S_n|^{-1/2}, \quad s \in S_n,$$

причем $\| g \|_2 \ge C(m) > 0$ *и для произвольного* $\psi \in \Psi$ $(g, \psi) = 0$.

Далее, пусть $V_l(t)$ обозначает ядро Валле — Пуссена

$$V_l(t) = \sum_{k=1}^{l-1} \cos kt + \sum_{k=l}^{2l} \left(2 - \frac{k}{l}\right) \cos kt.$$

Тогда для четных s_j, $j = \overline{1, m}$, положим

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{m} \left(V_{2^{s_j-1}}(x_j) - V_{2^{s_j-2}}(x_j) \right),$$

а через $A_s(f, x)$ обозначим свертку

$$A_s(f, x) = f * A_s(x).$$

Для $f \in L_p(\pi_m)$ рассмотрим следующие нормы:

$$\| f \|_{B^0_{p,\theta}} = \left(\sum_s \| A_s(f, x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le p \le \infty, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

и

$$\| f \|_{B^0_{p,\infty}} = \sup_s \| A_s(f, x) \|_p, \quad 1 \le p \le \infty, \quad \theta = \infty,$$

которые в случае $1 < p < \infty$ равносильны соответственно

$$\|f\|_{B^0_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta\right)^{1/\theta}, \quad 1 < \theta < \infty,$$

и

$$\|f\|_{B^0_{p,\infty}} = \sup_s \|\delta_s(f,x)\|_p, \quad \theta = \infty.$$

Покажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \theta < \infty$ *и* $r_1 > 0$. *Тогда*

$$e_M\left(B^r_{p,\theta} \cap T(Q'_n),\ B^0_{1,1}\right) >> M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-1/\theta}.$$

Доказательство. Как отмечено выше, достаточно рассмотреть случай $\nu = m$.

Пусть задано число M. Выберем четное число n из соотношения $|Q'_{n-2}| < 4M \le |Q'_n|$. Пусть, далее, $P = \{k^i\}_{i=1}^M$ — произвольный набор векторов $k^i = \left(k^i_1, \ldots, k^i_m\right)$, $i = \overline{1, M}$, с целочисленными координатами и Ω_M — подпространство, натянутое на экспоненты с показателями из множества P. Рассмотрим функцию

$$f(x) = g(x) 2^{-r_1 n} |S_n|^{1/2-1/\theta},$$

где функция $g(x) \in T(Q'_n)$ подобрана в соответствии с леммой Б, т. е.

$$\|\bar{\delta}_s(g,x)\|_\infty \le |S_n|^{-1/2}, \quad s \in S_n,$$

$$\|g\|_2 \ge C(m) > 0, \quad (g,t) = 0, \quad t \in \Omega_M.$$

Нетрудно убедиться, что $f(x) \in C_2 B^r_{p,\theta}$.

Оценим теперь $\|f - t\|_{B^0_{1,1}}$, $t \in \Omega_M$. С этой целью рассмотрим $(f - t, g)$. Тогда, учитывая, что $(g,t) = 0$, имеем

$$(f - t, g) = (f, g) = 2^{-r_1 n}|S_n|^{1/2-1/\theta}\|g\|_2^2 \ge C^2(m) 2^{-r_1 n}|S_n|^{1/2-1/\theta}. \tag{13}$$

В силу неравенства Гельдера и определения нормы в пространстве $B^0_{1,1}$ находим

$$(f - t, g) = \sum_{s \in S_n} (\bar{\delta}_s(f - t, x), \bar{\delta}_s(g, x)) =$$

$$= \sum_{s \in S_n} \left(\left(\sum_{\|s'-s\|_\infty \le 1} A_{s'}(f - t, x)\right),\ \bar{\delta}_s(g,x)\right) \le$$

$$\le \max_{s \in S_n} \|\bar{\delta}_s(g,x)\|_\infty \sum_s \|A_s(f - t, x)\|_1 =$$

$$= \max_{s \in S_n} \|\bar{\delta}_s(g,x)\|_\infty \|f - t\|_{B^0_{1,1}} \le |S_n|^{-1/2} \|f - t\|_{B^0_{1,1}}. \tag{14}$$

Сопоставляя (13) и (14), получаем оценку

$$\|f - t\|_{B^0_{1,1}} >> 2^{-r_1 n}|S_n|^{1-1/\theta}.$$

Наконец, принимая во внимание, что $M \asymp 2^n n^{m-1}$ и $|S_n| \asymp n^{m-1}$, имеем

$$e_M\left(B^r_{p,\theta} \cap T(Q'_n),\ B^0_{1,1}\right) >> M^{-r_1}(\log^{m-1} M)^{r_1+1-1/\theta}. \tag{15}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *и* $r_1 > 0$. *Тогда*

$$e_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \gg M^{-r_1}(\log^{m-1}M)^{r_1+1/2-1/\theta}.$$

Доказательство. В силу неравенства Гельдера для $f \in T(Q'_n)$ справедливо соотношение

$$\|f\|_{B^0_{1,1}} = \sum_{s\in S_n}\|A_s(f,x)\|_1 \le \left(\sum_{s\in S_n}\|A_s(f,x)\|_1^2\right)^{1/2}\left(\sum_{s\in S_n}1\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \|f\|_{B^0_{1,2}}|S_n|^{1/2}.$$

Отсюда и из (15) находим

$$e_M\left(B^r_{p,\theta}\cap T(Q'_n),\ B^0_{1,2}\right) \gg |S_n|^{-1/2}e_M\left(B^r_{p,\theta}\cap T(Q'_n),\ B^0_{1,1}\right) \gg$$

$$\gg M^{-r_1}(\log^{m-1}M)^{r_1+1/2-1/\theta}. \tag{16}$$

Покажем теперь, что $\forall\, q \in (1, 2]$ справедливо неравенство

$$\|f\|_q \gg \left(\sum_s\|\delta_s(f,x)\|_q^2\right)^{1/2} \gg \|f\|_{B^0_{1,2}}, \tag{17}$$

откуда с учетом (16) следует необходимая оценка.

Согласно следствию Д. 1.2 из [8, с. 392] имеем

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_{q'}\le 1}(f,g) = \sup_{\|g\|_{q'}\le 1}\sum_s(\delta_s(f,x),(\delta_s(g,x)), \tag{18}$$

где q' обозначает показатель, двойственный к q, т. е. $(q')^{-1}+q^{-1}=1$.

Но так как $q\in(1,2]$, то $q'\in[2,\infty)$, и в силу теоремы Литтлвуда — Пэли и неравенства Минковского для $f\in L_{q'}(\pi_m)$ получаем

$$\|f\|_{q'} \ll \left\|\left(\sum_s|\delta_s(f,x)|^2\right)^{1/2}\right\|_{q'} = \left(\left\|\sum_s|\delta_s(f,x)|^2\right\|_{q'/2}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_s\left\||\delta_s(f,x)|^2\right\|_{q'/2}\right)^{1/2} = \left(\sum_s\|\delta_s(f,x)\|_{q'}^2\right)^{1/2}, \tag{19}$$

после чего, принимая во внимание (19), продолжаем соотношение (18):

$$\gg \sup_{\substack{g,\{\alpha_s\}:\\ \|\delta_s(g,x)\|_{q'}\le\alpha_s\\ \left(\sum_s\alpha_s^2\right)^{1/2}\le 1}}\sum_s(\delta_s(f,x),\delta_s(g,x)) = \sup_{\substack{\{\alpha_s\}:\\ \|\{\alpha_s\}\|_{l_2}\le 1}}\sum_s\alpha_s\|\delta_s(f,x)\|_q =$$

$$= \|\{\|\delta_s(f,x)\|_q\}\|_{l_2} = \left(\sum_s\|\delta_s(f,x)\|_q^2\right)^{1/2} \gg \|f\|_{B^0_{1,2}}.$$

Таким образом, оценка (17), а вместе с ней и следствие 1, доказаны.

Заметим, что установленная в следствии 1 оценка совпадает по порядку с оценкой сверху теоремы 2 при $r_1 \ge 1/\theta - 1/2$. Если же $0 < r_1 < 1/\theta - 1/2$, то необходимая оценка следует из одномерного случая. Теорема 2 доказана.

В заключение приведем некоторые замечания к теореме 2.

Как отмечалось выше, в рассмотренной области значений параметров p и q

оценки величин $e_M(H^r_p, L_q)$ и $e_M(W^r_p, L_q)$ автору были не известны. Эти оценки легко записать, воспользовавшись результатом теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$, $r_1 > 0$. *Тогда*

$$e_M(H^r_p, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2}}{M^{r_1}}. \tag{20}$$

Для доказательства достаточно заметить, что $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, и воспользоваться теоремой 2 при $\theta = \infty$.

Отметим, что оценка (20) совпадает по порядку с оценкой колмогоровского поперечника $d_M(H^r_p, L_q)$ [9]

Следствие 3. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$, $r_1 > 0$. *Тогда*

$$e_M(W^r_p, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1}}{M^{r_1}}.$$

Доказательство. Оценка снизу следует непосредственно из теоремы 2, поскольку (см., например, [4]) при $p \geq 2$ $B^r_{p,2} \subset W^r_p$, и следовательно,

$$e_M(W^r_p, L_q) >> e_M(B^r_{p,2}, L_q) \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1}}{M^{r_1}}. \tag{21}$$

Оценка сверху получается из известных оценок [10] приближения класса W^r_p в пространстве L_q суммами Фурье вида

$$S^{\gamma}_n(f, x) = \sum_{(s,\gamma)<n} \delta_s(f, x)$$

при условии, что n удовлетворяет соотношению $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Сравнивая (21) с известной оценкой колмогоровского поперечника класса W^r_p [9], видим, что порядки величин $e_M(W^r_p, L_q)$ и $d_M(W^r_p, L_q)$, как и в случае классов H^r_p, совпадают.

Несколько иная ситуация на классах $B^r_{p,\theta}$. В частности, при $2 \leq q < p < \infty$ и $1 \leq \theta < 2$, сопоставив теорему 2 настоящей работы с теоремой 1 работы [11, с. 88], обнаруживаем различие в поведении величин $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ и $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$; при этом порядок $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ меньше, чем $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$. Кроме того, при исследовании величины $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ обнаружено явление малой гладкости, а также независимость порядка наилучшего тригонометрического приближения от размерности пространства R^m, если только выполняется соотношение $r_1 + 1/2 - 1/\theta \leq 0$. Другими словами, сужая классы $B^r_{p,\theta}$ (известно, что при $1 \leq \theta \leq 2$ и $2 \leq p < \infty$ $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{p,2} \subset W^r_p$) получаем возможность выявить факты, которые на классах W^r_p и H^r_p в данном случае, как было отмечено выше, не проявляются.

2. Приближение билинейными формами. Используя результаты теорем 1 и 2, установим в ряде случаев оценки величин (2). Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p \leq q_1 \leq 2$, $1 \leq q_2 \leq \infty$, $1 \leq \theta < q_1$ *и* $1/p - 1/q_1 < r_1 < 1/p - 2/q_1 + 1/\theta$. *Тогда*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q_1,q_2} \asymp M^{-(r_1-1/p+1/q_1)}.$$

Доказательство. Оценку сверху получим при $q_2 = \infty$. В силу теоремы 1 $\forall f \in B^r_{p,\theta}$ найдется множество m-мерных векторов $(k^1, \ldots, k^m)$ с целочисленными компонентами и чисел $c_1, \ldots, c_M$ таких, что

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\, x)} \right\|_{q_1} \ll M^{-(r_1 - 1/p + 1/q_1)} \tag{22}$$

при $1/p - 1/q_1 < r_1 < 1/p - 2/q_1 + 1/\theta$. Кроме того,

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\, x)} \right\|_{q_1} = \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\, x-y)} \right\|_{q_1,\, \infty} =$$

$$= \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\, x)} e^{-i(k^j,\, y)} \right\|_{q_1,\, \infty}. \tag{23}$$

Полагая в последней сумме $u_j(x) = c_j e^{i(k^j,\, x)}$, $v_j(y) = e^{-i(k^j,\, y)}$ и сопоставляя (22) и (23), получаем оценку

$$\left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,\, \infty} \ll M^{-(r_1 - 1/p + 1/q_1)}.$$

Оценку снизу получим для случая $q_2 = 1$. При этом ее достаточно установить при $m = 1$, так как установленная выше оценка сверху не зависит от размерности.

Пусть $M = 2^n$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = M^{-(r_1 + 1 - 1/p)} D_M(x),$$

где $D_M(x) = \sum_{|k| \le M} e^{ikx}$ — ядро Дирихле порядка $2M$.

Нетрудно убедиться, что $f \in C_3 B^r_{p,\theta}$.

Пусть $q_1 = 2$. Поскольку ядро $D_M(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2 [12, с. 250], то

$$\tau_M(D_M(x-y))_{2,\,1} \gg M^{1/2}. \tag{24}$$

Отсюда следует

$$\tau_M(f(x-y))_{2,\,1} \gg M^{-(r_1 - 1/p + 1/2)}.$$

Пусть теперь $1 < q_1 < 2$ и система функций $u_i(x)$, $v_i(y)$, $i = \overline{1, M}$, такова, что

$$\left\| D_M(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,\, 1} \le 2\tau_M(D_M(x-y))_{q_1,\, 1}.$$

В силу того, что $D_M(\cdot)$ есть полином порядка $2M$, можно считать, что функции $u_i(x)$ и $v_i(y)$ являются тригонометрическими полиномами порядка $4M$ и для них справедлива оценка

$$\left\| D_M(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,\, 1} \ll \tau_M(D_M(x-y))_{q_1,\, 1}. \tag{25}$$

Далее, в силу неравенства разных метрик Никольского и соотношения (25) получаем

$$\left\| D_M(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,1} \ll$$

$$\ll M^{1/q_1 - 1/2} \left\| D_M(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll$$

$$\ll M^{1/q_1 - 1/2} \tau_M(D_M(x-y))_{q_1,1}. \tag{26}$$

Теперь учитывая, что

$$\left\| D_M(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,1} \ll M^{1/2}$$

и сопоставляя это соотношение с (26), получаем оценку

$$\tau_M(D_M(x-y))_{q_1,1} \gg M^{(1-1/q_1)}.$$

Отсюда и из определения функции $f(x)$ следует

$$\tau_M(f(x-y))_{q_1,q_2} \gg \tau_M(f(x-y))_{q_1,1} \gg M^{-(r_1 - 1/p + 1/q_1)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $2 \le q_1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *и* $r_1 > 0$. *Тогда при* $1 \le \le q_2 \le \infty$

$$\tau_M\left(B^r_{p,\theta}\right)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 + 1/2 - 1/\theta)_+}.$$

Доказательство. Оценка сверху получается из теоремы 2 так же, как и в предыдущей теореме. Поэтому установим оценку снизу для случая $q_1 = 2$, $q_2 = = 1$ и $\nu = m$.

Пусть задано натуральное число M и n таково, что для количества элементов множества

$$Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 = n} \rho(s)$$

выполнены соотношения: 1) $|Q_n| > 4M$; 2) $|Q_n| \asymp 2^n n^{m-1}$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2^{-n(r_1 + 1/2)} n^{-(m-1)\theta} \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{m} R_{s_j}(x_j) = 2^{-n(r_1+1/2)} n^{-(m-1)\theta} R(x),$$

где

$$R_k(t) = \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k - 1} \varepsilon_j e^{ijt}, \quad \varepsilon_j = \pm 1,$$

— полиномы Рудина — Шапиро (см., например, [13, с. 155]), имеющие свойства $\| R_k \|_\infty \ll 2^{k/2}$. Тогда легко проверить, что $f \in C_4 B^r_{p,\theta}$.

Далее, поскольку $R(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3.1 [3, с. 98], то

$$\tau_M(R(x-y))_{2,1} \gg M^{1/2} \asymp 2^{n/2} n^{(m-1)/2},$$

и следовательно,

$$\tau_M(f(x-y))_{2,1} = 2^{-n(r_1+1/2)} n^{-(m-1)\theta} \tau_M(R(x-y))_{2,1} \gg$$

$$>> 2^{-nr_1} n^{(m-1)(1/2-1/\theta)} \asymp \frac{(\log^{m-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}}{M^{r_1}}.$$

Полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху при $r_1 \geq 1/\theta - 1/2$. Если же $0 < r_1 < 1/\theta - 1/2$, то требуемая оценка следует из одномерного случая. Теорема доказана.

В заключение приведем такие следствия.

Следствие 4. *Пусть* $2 \leq q_1 < p < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ *и* $r_1 > 0$. *Тогда*

$$\tau_M(H_p^r)_{q_1, q_2} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2}.$$

Следствие 5. *Пусть* $2 \leq q_1 < p < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ *и* $r_1 > 0$. *Тогда*

$$\tau_M(W_p^r)_{q_1, q_2} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

В следствии 4 оценку получаем непосредственно из теоремы 5 при $\theta = \infty$, а в следствии 5 оценка сверху вытекает из следствия 3, а оценка снизу — из включения $B_{p,2}^r \subset W_p^r$ при $p \geq 2$ и теоремы 5.

1. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^r$. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535 – 1547.
2. *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бессова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 663 – 675.
3. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной. – М.: Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1986. – **178**. – 112 с.
4. *Романюк А. С.* Приближение классов Бессова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
5. *Белинский Э. С.* Приближение плавающей системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16 –33.
6. *Романюк А. С.* О приближении классов Бесова функций многих переменных частными суммами с заданным числом гармоник // Оптимизация методов приближения. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 70 – 78.
7. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **189**. – С. 138 – 168.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
9. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\tilde{W}_p^{\overline{\alpha}}$ и $\tilde{H}_p^{\overline{\alpha}}$ в пространстве $\tilde{L}_q$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 916 – 934.
10. *Галеев Э. М.* Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике // Успехи мат. наук. – 1977. – **32**, № 4. – С. 251 – 252.
11. *Романюк А. С.* О колмогоровских и линейных поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных // Исследования по теории приближения функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 86 – 92.
12. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 243 –252.
13. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.

Получено 09.07.92