УДК 517.9

А. М. Самойленко, чл.-корр. АН Украины (Ин-т математики АН Украины, Киев)
Ю. В. Теплинский, д-р физ.-мат. наук (Каменец-Подол. пед. ин-т)

О РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *

The conditions are found for existence of the change of variables that decomposes a countable system of differential equations on the whole real axis as well as on a semi-axis. Similar problems are considered for a countable system with pulse influence.

Знайдено умови існування заміни змінних, що розщеплює зчисленну систему диференціальних рівнянь як на півосі, так і на всій осі. Розглянуто аналогічні питання у випадку зчисленної системи з імпульсною дією.

Вопрос расщепляемости линейных систем дифференциальных уравнений исследовался многими авторами. В настоящее время хорошо известны результаты о расщепляемости дихотомичных систем на оси и полуоси, о расщепляемости линейных систем с квазипериодическими и почти-периодическими коэффициентами, о расщепляемости линейных расширений динамических систем на торе. Этой тематике и близким к ней проблемам посвящено большое число исследований, из которых отметим здесь работы [1 – 11].

Аналогичные вопросы для систем дифференциальных уравнений в пространстве $\mathfrak{M}$ ограниченных числовых последовательностей изучены слабо. В этой работе приведены результаты, распространяющие известные свойства расщепляемости линейных конечномерных систем дифференциальных уравнений на случай дифференциальных систем в пространстве $\mathfrak{M}$, называемых обычно счетными системами.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P_1(t)x + P_{12}(t)y, \quad \frac{dy}{dt} = P_{21}(t)x + P_2(t)y, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ принадлежит пространству $\mathfrak{M}$ ограниченных числовых последовательностей с нормой

$$\|x\| = \sup_i \{|x_i|\} \quad (i = 1, 2, \ldots);$$

$P_1(t), P_2(t), P_{12}(t), P_{21}(t)$ — бесконечные матрицы с непрерывными по t на $R^- = (-\infty, 0]$ элементами. Не исключен случай, что x или y принадлежит R^n.

Предположим, что все матрицы, стоящие в правых частях уравнений (1), ограничены по норме $\|\cdot\|_{T_1}$:

$$\|P(t)\|_{T_1} = \left\| \left[p_{ij}(t) \right]_{i,\, j=1}^{\infty} \right\|_{T_1} = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \max_{T_1} |p_{ij}(t)|,$$

где T_1 — любой конечный отрезок из R^-; матриципанты $\Omega_\tau^t(P_i)$ линейных систем $dz/dt = P_i(t)z$ дифференцируемы по $\tau \in R^-$ при $t = 0$, причем

$$\|\Omega_\tau^t(P_i)\| = \left\| \left[\omega_{sk}^{(i)}(t, \tau) \right]_{s,k=1}^{\infty} \right\| = \sup_s \sum_{k=1}^{\infty} \left| \omega_{sk}^{(i)}(t, \tau) \right| \le K \exp\{-\gamma |t - \tau|\}, \tag{2}$$

где $i = 1, 2$; K и γ — положительные постоянные; $t, \tau \in R^-$.

Пусть, кроме того, выполняется оценка

$$\max\{\|P_{12}(t)\|, \|P_{21}(t)\|\} \le \frac{\alpha\gamma}{K^2}, \tag{3}$$

* Эта работа выполнена при финансовой поддержке Госкомитета Украины по вопросам науки и технологии (фонд фундаментальных исследований).

где $0 < \alpha = \text{const} < \min\{1, 1/K^2\}$, $t \in R^-$.

Будем искать замену переменных

$$x = x_1 + U_1(t)\,y_1, \quad y = y_1 + U_2(t)\,x_1, \tag{4}$$

где $U_1(t), U_2(t)$ — бесконечные матрицы, приводящую на R^- систему уравнений (1) к виду

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathcal{P}_1(t)\,x_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = \mathcal{P}_2(t)\,y_1. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что если $U_1(t)$ и $U_2(t)$ являются решениями матричных уравнений Риккати

$$\frac{dU_1}{dt} = P_1(t)U_1(t) - U_1(t)P_2(t) - U_1(t)P_{21}(t)U_1(t) + P_{12}(t), \tag{6}$$

$$\frac{dU_2}{dt} = P_2(t)U_2(t) - U_2(t)P_1(t) - U_2(t)P_{12}(t)U_2(t) + P_{21}(t), \tag{7}$$

функции $x_1(t), y_1(t), dx_1(t)/dt, dy_1(t)/dt$ ограничены по норме $\|\cdot\|$ на любом конечном отрезке $T_1 \subset R^-$, причем $U_i(t)$ вместе со своими производными $dU_i(t)/dt$ $(i = 1, 2)$ ограничены на нем по норме $\|\cdot\|_{T_1}$, то замена переменных (4) приводит (1) к виду

$$(E - U_1U_2)\frac{dx_1}{dt} = (P_1 + P_{12}U_2 - U_1U_2P_1 - U_1U_2P_{12}U_2)x_1,$$

$$(E - U_2U_1)\frac{dy_1}{dt} = (P_2 + P_{21}U_1 - U_2U_1P_2 - U_2U_1P_{21}U_1)y_1,$$

где E — единичная матрица.

Если матрицы $(E - U_1U_2)$, $(E - U_2U_1)$ обратимы, то система уравнений (1) приводится на R^- к виду (5), где

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1(t) &= (E - U_1U_2)^{-1}(P_1 + P_{12}U_2 - U_1U_2P_1 - U_1U_2P_{12}U_2),\\ \mathcal{P}_2(t) &= (E - U_2U_1)^{-1}(P_2 + P_{21}U_1 - U_2U_1P_2 - U_2U_1P_{21}U_1).\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если существуют решения* $U_i(t)$ $(i = 1, 2)$ *уравнений* (6), (7) *такие, что* $\|U_1(t)\|_{T_1}\|U_2(t)\|_{T_1} < 1$ *и* $\|dU_i(t)/dt\|_{T_1} < \infty$ $(i = 1, 2)$ *на любом конечном отрезке* $T_1 \subset R^-$, *то заменой переменных* (4) *система уравнений* (1) *сводится к виду* (5), *где матрицы* $\mathcal{P}_1(t)$ *и* $\mathcal{P}_2(t)$ *определяются равенствами* (8) *и ограничены по норме* $\|\cdot\|_{T_1}$.

Отметим, что тогда в области $R^- \times \mathfrak{M}$ для системы уравнений (5) справедлива теорема Коши существования и единственности решений [12], причем решения $x_1(t), y_1(t)$ этой системы вместе со своими производными по t ограничены по норме $\|\cdot\|$ на любом конечном отрезке $T_1 \subset R^-$.

Будем искать решения $U_1(t), U_2(t)$ уравнений (6), (7). Ограничимся, например, уравнением (7).

Обозначим через G множество матриц $P(t)$, для которых $\|P(t)\|_0 = \sup\limits_{t \in R^-} \|P(t)\| \le \alpha$. Положим

$$U_2(t) = \Omega_0^t(P_2)V_2(t)\Omega_t^0(P_1), \tag{9}$$

где $V_2(t) \in G$, причем

$$\| V_2(t) \|_{T_1} < \infty, \quad \| V_2(t)/dt \|_{T_1} < \infty \tag{10}$$

для любого конечного отрезка $T_1 \subset R^-$.

Подставляя (9) в (7), получаем уравнение

$$\frac{dV_2}{dt} = \Omega_t^0(P_2)P_{21}\Omega_0^t(P_1) - V_2\Omega_t^0(P_1)P_{12}\Omega_0^t(P_2)V_2. \tag{11}$$

Учитывая оценку (2), убеждаемся, что $\lim\limits_{t\to-\infty} V_2(t) = 0$. Это дает возможность перейти от (11) к интегральному уравнению

$$V_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{t}\left\{\Omega_s^0(P_2)P_{21}\Omega_0^s(P_1) - V_2\Omega_s^0(P_1)P_{12}\Omega_0^s(P_2)V_2\right\}ds.$$

Рассмотрим оператор L, действующий на G следующим образом:

$$LS = \int\limits_{-\infty}^{t}\left\{\Omega_s^0(P_2)P_{21}\Omega_0^s(P_1) - S\Omega_s^0(P_1)P_{12}\Omega_0^s(P_2)S\right\}ds, \quad S \in G.$$

Поскольку для любого $S \in G$ $\| LS \|_0 \le \alpha$, что следует из оценок (2), (3), то оператор L переводит множество G в себя.

При любых $S_1, S_2 \in G$ справедливы неравенства

$$\| LS_1 - LS_2 \|_0 \le \sup_{t\in R^-}\left\{\int\limits_{-\infty}^{t}\| S_1 \| K^2 e^{2\gamma s}\| P_{12} \|\| S_1 - S_2 \| ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{t}\| P_{12} \| K^2 e^{2\gamma s}\| S_2 \|\| S_1 - S_2 \| ds\right\} \le \sup_{t\in R^-}\alpha^2 e^{2\gamma t}\| S_1 - S_2 \|_0 \le \alpha \| S_1 - S_2 \|_0.$$

Таким образом, оператор L является сжимающим. Покажем, что пространство G полно в метрике $\rho(S_1, S_2) = \| S_1 - S_2 \|_0$.

Пусть $\left\{\overset{(n)}{P}(t)\right\}$ — фундаментальная последовательность в G. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n > N$, $m > N$

$$\sup_{t\in R^-}\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\left|\overset{(n)}{p}_{ij}(t) - \overset{(m)}{p}_{ij}(t)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\left\{\overset{(n)}{P}(t)\right\}$ сходится покоординатно к некоторой матрице $P(t)$. Покажем, что эта последовательность сходится к $P(t)$ по норме $\| \cdot \|_0$.

В неравенстве $\sum_{j=1}^{k}\left|\overset{(n)}{p}_{ij} - \overset{(m)}{p}_{ij}\right| < \varepsilon$ перейдем к пределу при $m \to \infty$ и получим оценку $\sum_{j=1}^{k}\left|\overset{(n)}{p}_{ij} - p_{ij}\right| < \varepsilon$ при любом натуральном k. Переходя еще раз к пределу при $k \to \infty$, имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\overset{(n)}{p}_{ij}(t) - p_{ij}(t)\right| \le \varepsilon$$

при любом натуральном i, откуда следует требуемая сходимость. Поскольку $\left\|\overset{(n)}{P}(t)\right\|_0 \leq \alpha (n = 1, 2, \dots)$, то $\| P(t) \|_0 \leq \alpha$, т. е. $P(t) \in G$.

В силу полноты G уравнение $LS = S$ имеет единственное решение $V_2(t) \in \in G$. Его можно представить в виде $V_2(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \overset{(n)}{V_2}(t)$, где $\overset{(n)}{V_2}(t)$ определены рекуррентными соотношениями $\overset{(n+1)}{V_2}(t) = L\overset{(n)}{V_2}(t)$, причем за $\overset{(0)}{V_2}(t)$ можно принять любую матрицу из G.

Матрица $U_2(t)$, определенная равенством (9), является решением уравнения (7), если $V_2(t)$ удовлетворяет условию (10). Поскольку $K^2\alpha < 1$, то $\| U_2(t) \|_0 < 1$ при $t \in R^-$.

Если положить

$$U_1(t) = \Omega_0^t(P_1)V_1(t)\Omega_t^0(P_2),$$

то уравнение (6) принимает вид

$$\frac{dV_1}{dt} = \Omega_t^0(P_1)P_{12}\Omega_0^t(P_2) - V_1\Omega_t^0(P_2)P_{21}\Omega_0^t(P_1)V_1 \tag{12}$$

и решается аналогично уравнению (7).

В результате справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При сделанных предположениях система уравнений* (1) *расщепляема на полуоси* R^-, *если решения* V_2 *и* V_1 *из* G *уравнений* (11) *и* (12) *удовлетворяют условию* (10). *Если при этом* $\| V_i(t) \|_{T_1} < 1$ $(i = 1, 2)$, *то для системы* (5) *справедлива теорема Коши существования и единственности решений в области* $R^- \times \mathfrak{M}$.

Перенесем утверждение теоремы 1 на правую полуось $R^+ = [0, +\infty)$.

Наряду с (1) рассмотрим последовательности укороченных систем уравнений

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{P_1}(t)\overset{(n)}{x} + \overset{(n)}{P_{12}}(t)\overset{(n)}{y}, \quad \frac{d\overset{(n)}{y}}{dt} = \overset{(n)}{P_{21}}(t)\overset{(n)}{x} + \overset{(n)}{P_2}(t)\overset{(n)}{y}, \tag{13}$$

где

$$\overset{(n)}{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, \quad \overset{(n)}{y} = (y_1, \dots, y_n) \in R^n, \quad \overset{(n)}{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j=1}^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что если

$$\left\| \Omega_\tau^t(\overset{(n)}{P_i}) \right\| \leq K(n) \exp\{-\gamma(n)|t - \tau|\} \quad (i = 1, 2;\ t, \tau \in R^-) \tag{14}$$

и для матриц $\overset{(n)}{P_{12}}(t)$, $\overset{(n)}{P_{21}}(t)$ выполняется условие (3), в котором K и γ заменены на $K(n)$ и $\gamma(n)$, то существует замена переменных

$$\overset{(n)}{x} = \overset{(n)}{x_1} + \overset{(n)}{U_1}\overset{(n)}{y_1}, \quad \overset{(n)}{y} = \overset{(n)}{y_1} + \overset{(n)}{U_2}\overset{(n)}{x_1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

приводящая каждую из систем (13) к виду

$$\frac{d\overset{(n)}{x_1}}{dt} = \overset{(n)}{\mathcal{P}_1}(t)\overset{(n)}{x_1}, \quad \frac{d\overset{(n)}{y_1}}{dt} = \overset{(n)}{\mathcal{P}_2}(t)\overset{(n)}{y_1}$$

на множестве R^-. При этом $\overset{(n)}{U_1}(t)$, $\overset{(n)}{U_2}(t)$ — решения уравнений Риккати вида

$$\frac{d\overset{(n)}{U_1}}{dt} = \overset{(n)}{P_1}\overset{(n)}{U_1} - \overset{(n)}{U_1}\overset{(n)}{P_2} - \overset{(n)}{U_1}\overset{(n)}{P_{21}}\overset{(n)}{U_1} + \overset{(n)}{P_{12}}, \tag{15}$$

$$\frac{d\overset{(n)}{U_2}}{dt} = \overset{(n)}{P_2}\overset{(n)}{U_2} - \overset{(n)}{U_2}\overset{(n)}{P_1} - \overset{(n)}{U_2}\overset{(n)}{P_{12}}\overset{(n)}{U_2} + \overset{(n)}{P_{21}}, \tag{16}$$

причем $\| \overset{(n)}{U_i}(t) \| \le \alpha < 1$ $(i = 1, 2)$, $t \in R^-$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть существует такая последовательность натуральных чисел* $m_1 < m_2 < \ldots < m_\nu < \ldots$, *что при* $n = m_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *справедливы оценки* (14) *и неравенства* (3), *в которых* K *и* γ *заменены на* $K(n)$ *и* $\gamma(n)$ *соответственно, причем решения* $\overset{(m_\nu)}{U_1}$, $\overset{(m_\nu)}{U_2}$ *уравнений Риккати* (15) *и* (16) *таковы, что*

$$\lim_{\nu \to \infty} \overset{(m_\nu)}{U_i}(t) = U_i(t) \quad (i = 1, 2)$$

по норме $\|\cdot\|$ *равномерно по* $t \in T_1$, *где* T_1 — *произвольный конечный отрезок из* R^-.

Тогда система (1) *заменой переменных* (4) *приводится к виду* (5), *если только матрицы* $U_i(t)$ $(i = 1, 2)$ *удовлетворяют условию* (10).

Доказательство сводится к проверке равенств (6), (7). Докажем первое из них. Положим $m_\nu = s$ и запишем тождество

$$\frac{d\overset{(s)}{U_1}(t)}{dt} = \overset{(s)}{P_1}(t)\overset{(s)}{U_1}(t) - \overset{(s)}{U_1}(t)\overset{(s)}{P_2}(t) - \overset{(s)}{U_1}(t)\overset{(s)}{P_{21}}(t)\overset{(s)}{U_1}(t) + \overset{(s)}{P_{12}}(t) \quad (t \in R^-). \tag{17}$$

Достаточно показать, что в (17) допустим поэлементный переход к пределу при $s \to \infty$ и в левой части $\lim\limits_{s \to \infty}$ и d/dt можно поменять местами.

Положим

$$\overset{(s)}{U_1}(t) = [\overset{(s)}{u}_{ij}]_{i,j=1}^{s}, \quad U_1(t) = [u_{ij}]_{i,j=1}^{\infty},$$

$$P_l(t) = [\overset{(l)}{p}_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}, \quad P_{lk}(t) = [\overset{(lk)}{p}_{ij}]_{i,j=1}^{\infty},$$

где l, k принимают значения 1 и 2. Для определенности запишем уравнение (17) для элемента $\overset{(s)}{u}_{11}$:

$$\frac{d\overset{(s)}{u}_{11}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \overset{(1)}{p}_{1i}\overset{(s)}{u}_{i1} - \sum_{i=1}^{s} \overset{(s)}{u}_{1i}\overset{(2)}{p}_{i1} - \sum_{r=1}^{s}\sum_{i=1}^{s} \overset{(s)}{u}_{r1}\overset{(s)}{u}_{1i}\overset{(21)}{p}_{ir} + \overset{(12)}{p}_{11}. \tag{18}$$

Поскольку

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{i=1}^{s} \overset{(1)}{p}_{1i} u_{i1} = \sum_{i=1}^{\infty} \overset{(1)}{p}_{1i} u_{i1}$$

равномерно по $t \in T_1$ и

$$\left| \sum_{i=1}^{s} \overset{(1)}{p}_{1i}\overset{(s)}{u}_{i1} - \sum_{i=1}^{s} \overset{(1)}{p}_{1i} u_{i1} \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |\overset{(1)}{p}_{1i}|\,|u_{i1} - \overset{(s)}{u}_{i1}| \le \|P_1\|\,\|U_1 - \overset{(s)}{U_1}\|,$$

то

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\overset{(1)}{p}_{1i}\,\overset{(s)}{u}_{i1} = \sum_{i=1}^{s}\overset{(1)}{p}_{1i}\,u_{i1} \tag{19}$$

равномерно по $t\in T_1$.

Аналогично получаем, что равномерно по $t\in T_1$

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\overset{(s)}{u}_{1i}\,\overset{(2)}{p}_{i1} = \sum_{i=1}^{\infty}u_{1i}\,\overset{(2)}{p}_{i1}. \tag{20}$$

Положим

$$\sum_{r=1}^{s}\sum_{i=1}^{s}\overset{(s)}{u}_{r1}\,\overset{(s)}{u}_{1i}\,\overset{(21)}{p}_{ir} = J(t,s),\quad \sum_{r=1}^{s}\sum_{i=1}^{s}u_{r1}\,u_{1i}\,\overset{(21)}{p}_{ir} = J^{*}(t,s),$$

$$\mathcal{L}(t,s) = J^{*}(t,s)-J(t,s).$$

Справедливы неравенства

$$|\mathcal{L}(t,s)| \le \sum_{r=1}^{s}\sum_{i=1}^{s}\left|u_{r1}u_{1i}+u_{r1}\overset{(s)}{u}_{1i}-u_{r1}\overset{(s)}{u}_{1i}-\overset{(s)}{u}_{r1}\overset{(s)}{u}_{1i}\right\|\overset{(21)}{p}_{ir}\Big| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{s}\left|u_{1i}-\overset{(s)}{u}_{1i}\right|\sum_{r=1}^{s}|u_{r1}|\,|\overset{(21)}{p}_{ir}| + \sum_{i=1}^{s}|\overset{(s)}{u}_{1i}|\sum_{r=1}^{s}\left|u_{r1}-\overset{(s)}{u}_{r1}\right|\,|\overset{(21)}{p}_{ir}| \le$$

$$\le \|P_{21}\|\left\{\|U_1\|\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_{1i}-\overset{(s)}{u}_{1i}\right|+\left\|U_1-\overset{(s)}{U}_1\right\|\sum_{i=1}^{\infty}\left|\overset{(s)}{u}_{1i}\right|\right\} \le \frac{2\alpha\gamma}{K^2}\left\|U_1-\overset{(s)}{U}_1\right\|,$$

из которых следует, что равномерно по $t\in T_1$

$$\lim_{s\to\infty}(J(t,s)-J^{*}(t,s)) = 0.$$

Но

$$\lim_{s\to\infty}J^{*}(t,s) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}u_{r1}u_{1i}\overset{(21)}{p}_{ir},$$

а значит, равномерно по $t\in T_1$

$$\lim_{s\to\infty}J(t,s) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}u_{r1}u_{1i}\overset{(21)}{p}_{ir}. \tag{21}$$

Учитывая (19) – (21) при переходе к пределу при $s\to\infty$ в (18), получаем тождество

$$\frac{du_{11}}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty}\overset{(1)}{p}_{1i}\,u_{i1}-\sum_{i=1}^{\infty}u_{1i}\,\overset{(2)}{p}_{i1}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}u_{r1}u_{1i}\overset{(21)}{p}_{ir}+\overset{(12)}{p}_{11},$$

из которого следует справедливость равенства (6) при $\forall t\in R^{-}$.

Равенство (7) доказывается аналогично.

Предположим теперь, что система уравнений (1) подвержена импульсному воздействию [13] по закону:

$$\begin{aligned} \Delta x|_{t=t_j} &= A_j x(t_j-0) + B_j y(t_j-0), \\ \Delta y|_{t=t_j} &= C_j x(t_j-0) + D_j y(t_j-0), \end{aligned} \tag{22}$$

где A_j, B_j, C_j, D_j — ограниченные по норме $\|\cdot\|$ постоянные бесконечные матрицы, импульсные моменты $t_j \in R^-$ разделены.

Подставляя (4) в (22), получаем систему вида

$$\begin{aligned} (E-U_1U_2)\Delta x_1|_{t=t_j} &= [(A_j + B_jU_2 - U_1C_j - U_1D_jU_2)x_1]_{t=t_j} + \\ &\quad + [(A_jU_1 + B_j - U_1C_jU_1 - U_1D_j)\, y_1]_{t=t_j}, \\ (E-U_2U_1)\Delta y_1|_{t=t_j} &= [(C_j + D_jU_2 - U_2A_j - U_2B_jU_2)x_1]_{t=t_j} + \\ &\quad + [(C_jU_1 + D_j - U_2A_jU_1 - U_2B_j)y_1]_{t=t_j}. \end{aligned}$$

Отсюда следует необходимое и достаточое условие, при котором замена переменных (4), расщепляющая систему уравнений (1), разделяет переменные в соотношениях (22):

$$\begin{aligned} A_jU_1(t_j) + B_j - U_1(t_j)C_jU_1(t_j) - U_1(t_j)D_j &= 0, \\ C_j + D_jU_2(t_j) - U_2(t_j)A_j - U_2(t_j)B_jU_2(t_j) &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Равенства (23) должны выполняться при всех моментах t_j импульсного воздействия.

В частном случае, когда $A_j = B_j = C_j = D_j = E$, из условия (23) вытекает соотношение $U_i^2(t_j) = E$ $(i = 1, 2)$. Но тогда $\|U_i(t_j)\| \geq 1$ $(i = 1, 2)$. Это означает, что для решения задачи следует искать решения уравнений Риккати (6), (7), норма которых в точках t_j больше или равна единице, а матрицы $(E - U_1U_2)$ и $(E - U_2U_1)$ обратимы при всех $t \in R^-$.

Обозначим через $C^0(\mathcal{T}_m)$ множество 2π-периодических по φ_i $(i = \overline{1, m})$ ограниченных по норме $\|\cdot\|$ матриц и вектор-функций, элементы которых непрерывны по $\varphi \in \mathcal{T}_m$, а через $C^0_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$ — подмножество из $C^0(\mathcal{T}_m)$, элементы которого удовлетворяют по φ условию Липшица, $\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор.

Определим норму $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_m}$ матрицы $P(\varphi)$ равенством

$$\|P(\varphi)\|_{\mathcal{T}_m} = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} |p_{ij}(\varphi)|,$$

и множество матриц из $C^0(\mathcal{T}_m)$, ограниченных вместе со своими производными по φ_i $(i = \overline{1, m})$ в норме $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_m}$, обозначим через $C^1_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{T}_m)$.

Рассмотрим задачу о расщепляемости для системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P_1(\varphi)x + P_{12}(\varphi)y, \\ \frac{dy}{dt} &= P_{21}(\varphi)x + P_2(\varphi)y, \end{aligned} \tag{24}$$

где $x, y \in \mathfrak{M}$, $a(\varphi) \in C^0_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, матрицы $P_1(\varphi), P_2(\varphi), P_{12}(\varphi), P_{21}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ и ограничены по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_m}$.

Отметим, что в конечномерном случае задачи о расщепляемости линейных расширений динамических систем на торе рассматривались в работах [1, 2].

Будем искать замену переменных

$$x = x_1 + U_1(\varphi)\, y_1, \quad y = y_1 + U_2(\varphi)\, x_1, \tag{25}$$

приводящую систему уравнений (24) к виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = \mathcal{P}_1(\varphi)x_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = \mathcal{P}_2(\varphi)y_1 \tag{26}$$

на всей числовой прямой R^1.

Пусть $\varphi_t = \varphi_t(\varphi)$ — решение уравнения угловых переменных системы (24) такое, что $\varphi_0(\varphi) = \varphi \in \mathcal{T}_m$.

Для простоты любые матрицы $Z(\varphi)$ и $Z(\varphi_t(\varphi))$ будем в дальнейшем обозначать через Z и $Z(t)$ соответственно.

Если дифференцируемые по φ_i $(i = \overline{1, m})$ матрицы U_1 и U_2 таковы, что

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) = \left.\frac{dU_1(t)}{dt}\right|_{t=0} = P_1U_1 - U_1P_2 - U_1P_{21}U_1 + P_{12}, \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) = \left.\frac{dU_2(t)}{dt}\right|_{t=0} = P_2U_2 - U_2P_1 - U_2P_{12}U_2 + P_{21}, \tag{28}$$

то при всех $t \in R^1$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ справедливы тождества вида (6) и (7), в которых под буквой t мы понимаем сейчас $\varphi_t(\varphi)$.

Тогда если матрицы $(E - U_1U_2), (E - U_2U_1)$ обратимы и обратные им матрицы ограничены по норме $\|\cdot\|$, то замена переменных (25) приводит (24) к виду (26) при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $t \in R^1$, где матрицы $\mathcal{P}_i$ $(i = 1, 2)$ определяются равенствами вида (8), в которые вместо t подставлено φ.

При этом если

$$\|(E - U_iU_j)^{-1}\|_{\mathcal{T}_m} < \infty \ \ (i \neq j;\ i, j = 1, 2),$$

то для системы уравнений (26) справедлива теорема Коши существования и единственности решения для любых начальных значений $(\varphi, t_0, x_1^0, y_1^0)$ из области $\mathcal{T}_m \times R^1 \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.

Обозначим через G^0 множество 2π-периодических по φ_i $(i = \overline{1, m})$ матриц с непрерывными по φ элементами, норма которых $\|\cdot\|_0 = \sup_{\varphi\in\mathcal{T}_m}\|\cdot\|$ ограничена постоянной α из условия (3). Легко убедиться, что множество G^0 полно в норме $\|\cdot\|_0$.

Решение $U_2 \in G^0$ уравнения (28) будем искать как матрицу $U_2(t)|_{t=0}$, которая является решением уравнения вида (7). Положим

$$V_2 = \int_{-\infty}^{0} \{\Omega_t^0(P_2)P_{21}(t)\Omega_0^t(P_1) - V_2(t)\Omega_t^0(P_1)P_{12}(t)\Omega_0^t(P_2)V_2(t)\}\,dt. \tag{29}$$

Если

$$\|\Omega_0^t(P_i)\| \leq K\exp\{-\gamma|t|\}, \quad t \in R^1 \quad (i = 1, 2) \tag{30}$$

и выполняется условие (3), в котором t заменено на $\varphi \in \mathcal{T}_m$, то оператор

$$L^0 S = \int_{-\infty}^{0} \{\Omega_t^0(P_2)P_{21}(t)\Omega_0^t(P_1) - S(t)\Omega_t^0(P_1)P_{12}(t)\Omega_0^t(P_2)S(t)\}\,dt$$

переводит множество G^0 в себя и является сжимающим. Это означает, что уравнение (29) имеет в G^0 единственное решение V_2 такое, что $\| V_2 \|_0 \le \alpha < 1$.

Если к тому же $V_2 \in C^1_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{T}_m)$, то матрица

$$U_2(\varphi_t) = \Omega_0^t(P_2)\, V_2(\varphi_t)\, \Omega_t^0(P_1)$$

является решением уравнения вида (7). Ясно, что искомое решение U_2 уравнения (28) совпадает с V_2.

Решение $U_1 \in G^0$ уравнения (27) находится аналогично, как решение интегрального уравнения

$$V_1 = \int_{-\infty}^{0} \{\Omega_t^0(P_1)P_{12}(t)\Omega_0^t(P_1) - V_1(t)\Omega_t^0(P_2)P_{21}(t)\Omega_0^t(P_1)V_1(t)\}\,dt. \tag{31}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для системы уравнений* (24) *выполняются условия* (3) *и* (30). *Тогда она расщепляется при всех* $\varphi \in \mathcal{T}_m$ *на всей оси* R^1, *если только решения* $V_1, V_2 \in G^0$ *уравнений* (29), (31) *принадлежат пространству* $C^1_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{T}_m)$.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
3. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Об э-дихотомичности и расщепляемости линейной системы уравнений // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, №4. – С. 755 – 756.
4. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* О расщепляемости линеаризованных систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, №5. – С. 587 – 597.
5. *Былов Б. Ф.* О структуре решений системы линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами // Мат. сб. – 1965. – **68**, №2. – С. 215 – 229.
6. *Миллионщиков В. М.* Структура фундаментальных матриц систем с почти-периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1966. – **171**, №2. – С. 238 – 291.
7. *Ткаченко В. И.* О блочной диагонализации почти-периодических систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – №6. – С. 18 – 20.
8. *Johnson R. A., Sell G. R.* Smoothness of spectral subbundles and reducibility of quasiperiodic linear differential systems // J. Diff. Equat.– 1981. – **41**. – P. 262 – 288.
9. *Kenneth J. Palmer.* Exponential dichotomy, integral separation and diagonalizability of linear systems of ordinary differential equations // Ibid. – 1982. – **55**, № 2. – P. 184 – 203.
10. *Kenneth J. Palmer.* An ordering for linear differential systems and a characterization of exponential separation in terms of reducibility // Ibid. – 1984. – **53**, № 1. – P. 67 – 99.
11. *Sacker J., Sell G.* A spectral theory for linear differential systems // Ibid. – 1978. – **27**, № 3. – P. 320 – 358.
12. *Персидский К. П.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 247 с.
13. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.

Получено 14.11.92